

水面形計算演習（開水路）

1. 理論式と計算手順

1.1 開水路（跳水と水面形）の問題

河川や水路のデザインには、開水路水理学の知識が必要である。

雨が降るなどして、ある流量が発生して、開水路に流れ込む場合、水位がどこまで上がるのか、というのはデザインの上で基礎的な問題となる。それは単純な水路の設計だけではなく、多様な自然を配置しながら河道を設計する場合も、水深の推定が必要であることには変わりはない。また植物の配置によっても、抵抗によって水深は変わってくる。

今回の計算（演習）では、以下の2つについて、計算・確認を行う。

(1) 水面形がどこから決まってくるのかを学習する

(2) 水面形方程式を用いた水面形の計算

実験では、緩勾配の水面形、 M_1 と M_2 の計測を行った。このカーブを、水面形方程式を用いて計算し再現できるかどうかを確認し、考察する。

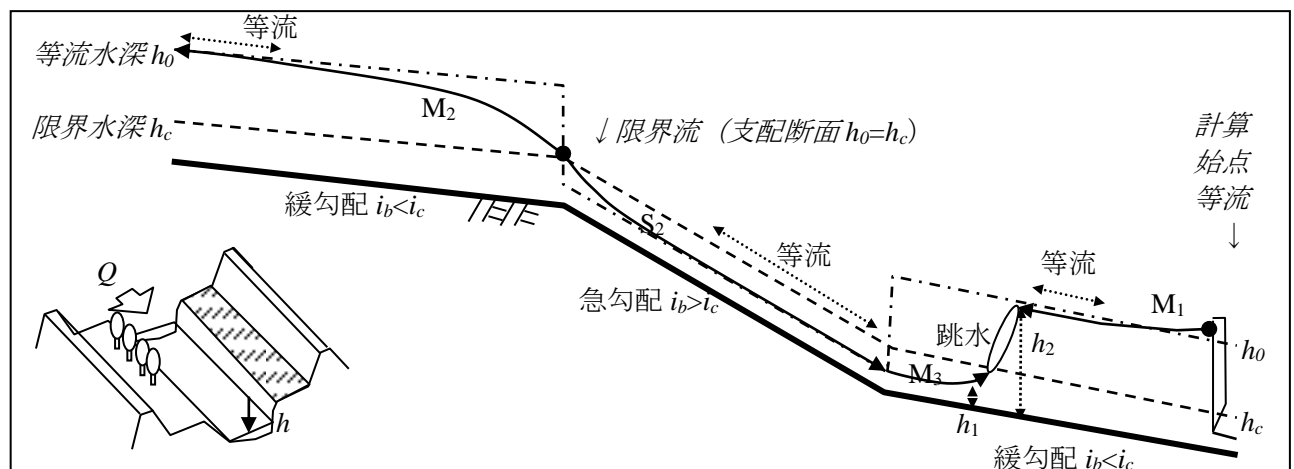


図-1 水路の水面形変化の例

1. 2 水面形方程式と計算の手順

1. 2. 1 理論

水面形方程式は、エネルギー保存則または運動量保存則から求めることができるが、本授業ではその導出は講義しない。よってこの方程式からいかに計算するかについて、説明する。

水面形方程式は、広矩形断面（幅広の長方形）では次式で表せる。

水面形方程式は、水深の勾配 dh/dx を水深 h の関数で書いている。

水面形方程式（参考）：

$$\frac{dh}{dx} = i_b \frac{1 - (h_0/h)^{10/3}}{1 - (h_c/h)^3} \quad (\text{Manning 則}) \quad (1)$$

ただし、式中の変数は以下の通り与える。

路床勾配： i_b

$$\text{限界水深：} \quad h_c = 3 \sqrt{\frac{q^2}{g}} \quad (2)$$

$$\text{等流水深：} \quad h_0 = \left(\frac{n^2 q^2}{i_b} \right)^{3/10} \quad (3)$$

（Manning 則の時、粗度係数 n 与える）数値がわかっているときは直接与える。

この式は、ある場所での水面の傾き（勾配 dh/dx ）は、その水深 h の関数で表せる、ということを示している。上流、あるいは下流で水深がわかっている場所があれば、そこから、その場所その場所の勾配を順に上下流につないでいけば、カーブが描ける。

（ここは数値計算の解説。図を理解してください。）

ここでは式が h の関数なので、次式のように逆数（分母分子を逆）にする方が計算しやすい。 x が h の関数であると思ふこととして、水深勾配の逆数

$$\frac{dx}{dh} = f(h) = \frac{1}{i_b} \frac{1 - (h_c/h)^3}{1 - (h_0/h)^{10/3}} \quad (\text{Manning 則}) \quad (2)$$

を既知の計算開始点（ x_b, h_b ）から積分するのが、古典的な水面形の計算法である。

この式を解析的（数学的に積分するのは難しく、 x を h の関数で明示できないので、少しずつ水深を変化させながら x を計算してゆくという、逐次計算を行うことがある。

たとえば、下図のように、M2 カーブを下流から計算する場合、計算開始点付近の勾配が分かれば、少し高い水位（上流側）での位置が計算できる。さらに、計算が進んで、ある水深 h_i での位置が x_i であったなら、そこから Δh だけ高い水深 $h_{i+1} = h_i + \Delta h$ に対応する位置 x_{i+1} が計算できる。

この「次の水深 $h_{i+1} = h_i + \Delta h$ となる位置 x_{i+1} 」を求めるには、式(3-2)をわずかに Δh だけ、つまり h_i から h_{i+1} までを積分すればよい。

$$x_{i+1} = x_i + \int_{h_i}^{h_{i+1}} \frac{dx}{dh} dh = x_i + \int_{h_i}^{h_{i+1}} f(h) dh \quad (4-1)$$

また、その積分を近似する式として Simpson の 1/3 則がある。これが(4-2)の式である。

$$x_{i+1} \cong x_i + \frac{\Delta h}{6} \{f(h_i) + 4f(h_{i+1/2}) + f(h_{i+1})\} \quad (4-2)$$

関数 $f()$ は式(3-2)に対応する。その中の各水深は、

$$h_i (=h_b + i\Delta h), \quad h_{i+1/2} = h_i + \Delta h/2, \quad h_{i+1} = h_i + \Delta h \quad (=h_b + (i+1)\Delta h) \quad \text{をあらわす。}$$

よって、 Δh を決めて、ある (h_i, x_i) から h_{i+1} に対応する位置 x_{i+1} を求めるには、式(3-2) に $h_i, h_{i+1/2}, h_{i+1}$ をそれぞれ式(4-2) に代入して得られる。これを繰り返すことで、水面形（水深分布）が得られる。

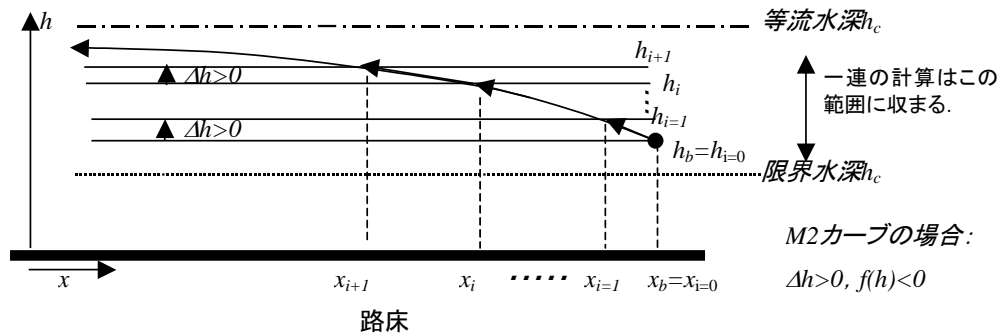


図-2

1. 2. 2 計算手順

この一連の手続きは、データシートを作り計算できる。ここでは、簡単に計算するために、ホームページから、エクセルファイルをダウンロードし、計算してみることにする。

<http://www.daido-it.ac.jp/~t-sumi/exp/exp.htm> （「鷲見哲也研究室」で検索も OK）

重要なのは、計算開始点を知っておくことである。講義したように、常流では上流に波が伝播するから、下流から水面形が決まる。よって、下流端の水位を知ることが出来なければ、計算できない。

（射流の場合は逆である。）表-1 の、矢印の方向に水面形が決まる。

表-1 水面形の分類と、水面形が決まる方向（矢印）

勾配の名称	緩勾配	限界勾配	急勾配
限界水深・等流水深の関係	$h_0 > h_c$	$h_0 = h_c$	$h_0 < h_c$
図 h_0 と h_c の関係と水面形の分類（各水路勾配で、3つのうちのどれかの水面形が現れる）			
勾配の関係	$i_b < i_c$	$i_b = i_c \equiv \frac{g^{10/9} n^2}{q^{2/9}}$	$i_b > i_c$

■ ケース 1, 2 の計算

常流と、射流の判定は、等流水深 h_0 と限界水深 h_c で（自動的に）判定できる。（図-3 参照）
 よって、入力情報は、

単位幅流量, Manning の粗度係数, 水路勾配, 計算開始点の x 方向位置 x_b とそこでの水深 h_b , があればよい. そのほかに, どの位置まで計算するのか x_{end} , 計算開始点での水路の高さ z_b , を与える. 本エクセルシートでは, 瞬時に水面形が計算でき, グラフにも現れる.

1枚目のシートでケース1を、2枚目のシートでケース2を計算する。

シートの切り替えは、画面下方のタブをクリックして行う。

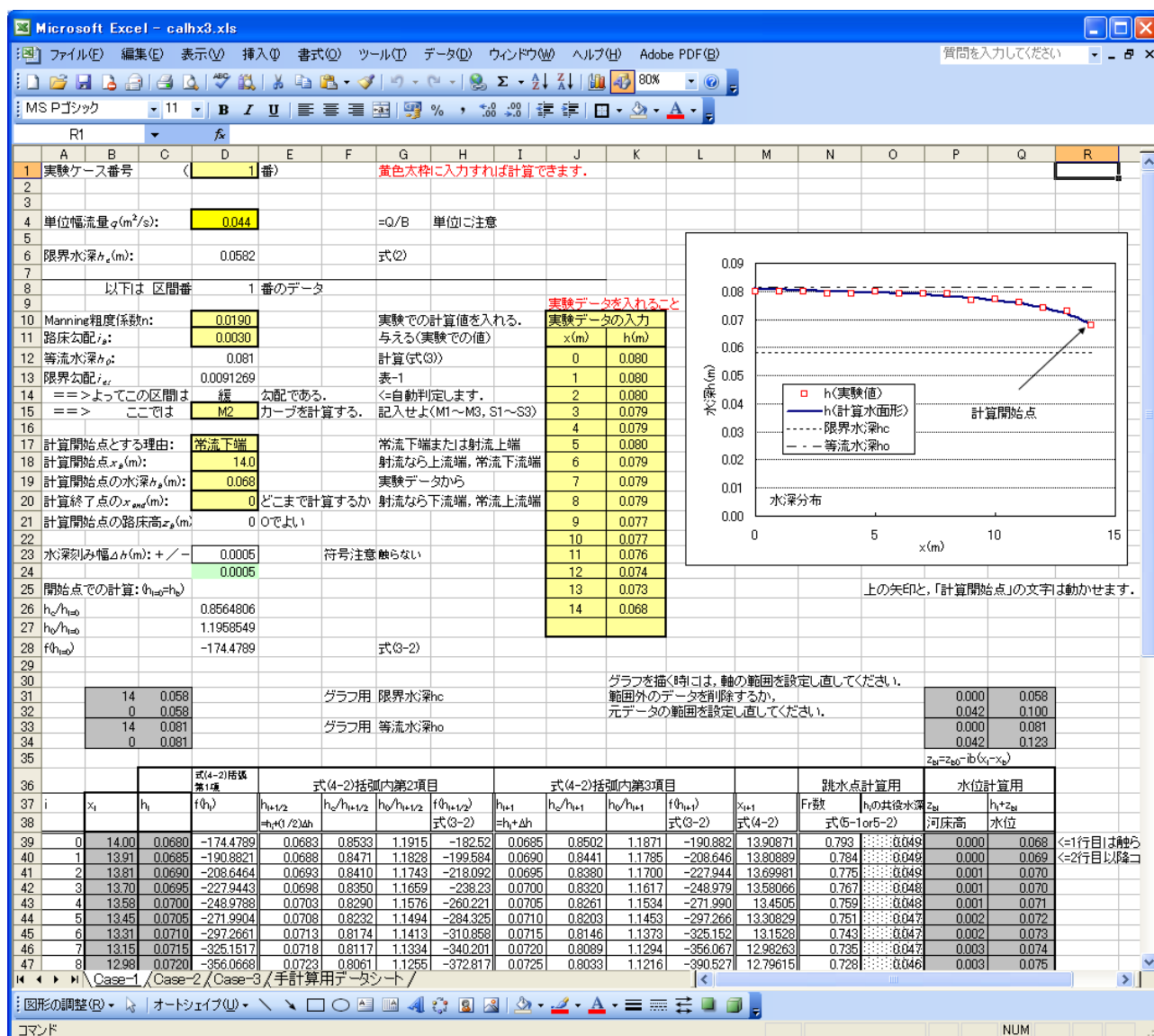


図-3 ケース1またはケース2の計算シート

■ ケース 3（跳水のケース）の計算

実験データを，ゲート下流のデータ($x=0\text{m}$) から入力する．

計算開始点（上流側，下流側）の情報，単位幅流量等を入力する．

計算結果には，3つのカーブが描かれる．上流の水面形（射流），下流の水面形（常流）に加え，下流水深の共役水深が描かれる．この共役水深と上流水面形がクロスする点（一致する点）が跳水点である．ここに縦の赤い矢印を動かし，跳水点として表示する．

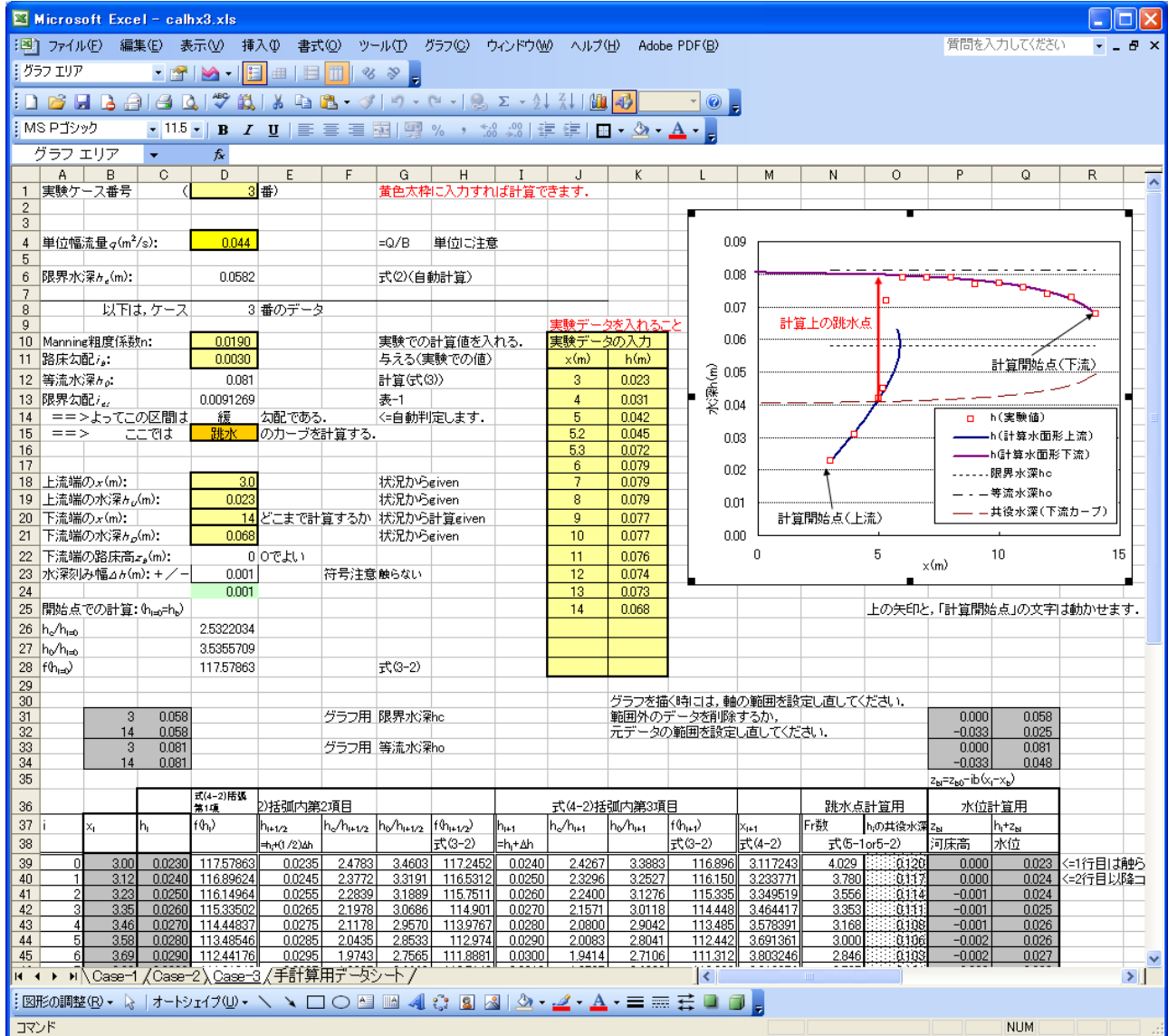


図-4 ケース 3（跳水ケース）の計算シート

課題（本日中に出すこと）：

諸君の前回実験のデータ3ケースをそれぞれ計算し、上記うち、計算条件（単位幅流量、限界水深、路床勾配、カーブの種類、計算開始点位置、開始水深）、および水面形のグラフを添付し、簡単な考察を加えて、提出せよ。計算開始点もわかるようにしておくこと。表紙は不要。1 ページ目の始めに、班、学籍番号、氏名、レポート作成時間を記述すること。ホチキス止めしない。

レポートのテンプレートがホームページにあるので、ダウンロードして貼り付ける。

提出期限：本日中。（17:00 まで）

レポート 水面形計算

班番号
学籍番号 氏名
提出日
作成時間

実験条件：

表-1 実験条件

単位幅流量 $q=$
 限界水深 $h_c=$
 等流水深 $h_0=$
 Manning 粗度係数 $n=$
 路床勾配 $ib=$

ケース 1（水面形分類：M2）

図-1 ケース 1 の計算結果

ケース 3（水面形分類：跳水 M3→M2）

図-2 ケース 3（跳水）の計算結果

考察：

ケース 1，2 は、計算のカーブは実験値に沿っている。

ケース 3 は、跳水の位置がややずれているが、そのほかは計算のカーブは実験値に一致している。

次回レポート提出時の注意：

今回の結果を次回提出のレポートに貼り付けて、「水面形の理論との比較」として考察すること。（班長レポート・要約レポート、ともに）