

水面形計算演習 (開水路)

1. 理論式と計算手順

1.1 開水路(跳水と水面形)の問題

河川や水路のデザインには、開水路水理学の知識が必要である。雨が降るなどして、ある流量が発生して、開水路に流れ込む場合、水位がどこまで上がるのか、というのはデザインの上で基礎的な問題となる。それは単純な水路の設計だけではなく、多様な自然を配置しながら河道を設計する場合も、水深の推定が必要であることには変わりはない。また植物の配置によっても、抵抗によって水深は変わってくる。

今回の計算（演習）では、以下の2つについて、計算・確認を行う。

(1) 水面形がどこから決まつてくるのかを学習する

(2) 水面形方程式を用いた水面形の計算

実験では、緩勾配の水面形、 M_1 と M_2 の計測を行った。このカーブを、水面形方程式を用いて計算し再現できるかどうかを確認し、考察する。

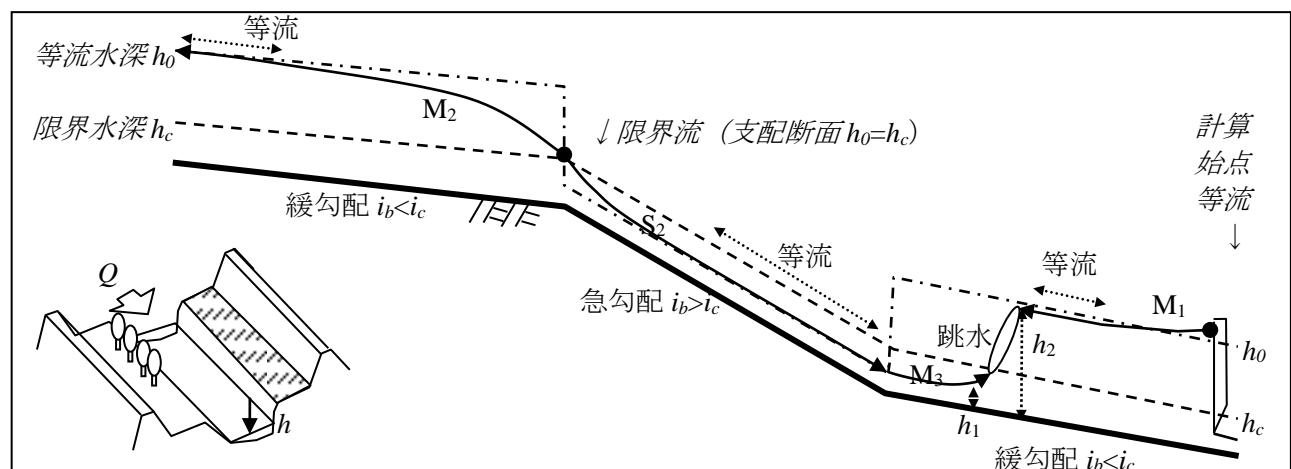


図-1 水路の水面形変化の例

1. 2 水面形方程式と計算の手順

1. 2. 1 理論

水面形方程式は、エネルギー保存則または運動量保存則から求めることができるが、本授業ではその導出は講義しない。よってこの方程式からいかに計算するかについて、説明する。

水面形方程式は、広矩形断面（幅広の長方形）では次式で表せる。

水面形方程式は、水深の勾配 dh/dx を水深 h の関数で書いている。

水面形方程式（参考）：

$$\frac{dh}{dx} = i_b \frac{1 - (h_0/h)^{10/3}}{1 - (h_c/h)^3} \quad (\text{Manning 則}) \quad (1)$$

ただし、式中の変数は以下の通り与える。

路床勾配 : i_b

$$\text{限界水深} : h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \quad (2)$$

$$\text{等流水深} : h_0 = \left(\frac{n^2 q^2}{i_b} \right)^{3/10} \quad (3)$$

（Manning 則の時、粗度係数 n 与える）数値がわかっているときは直接与える。

この式は、ある場所での水面の傾き（勾配 dh/dx ）は、その水深 h の関数できる、ということを示している。上流、あるいは下流で水深がわかっている場所があれば、そこから、その場所その場所の勾配を順に上下流につないでいけば、カーブが描ける。

（ここは数値計算の解説。図を理解してください。）

ここでは式が h の関数なので、次式のように逆数（分母分子を逆）にする方が計算しやすい。 x が h の関数であることとして、水深勾配の逆数

$$\frac{dx}{dh} = f(h) = \frac{1}{i_b} \frac{1 - (h_c/h)^3}{1 - (h_0/h)^{10/3}} \quad (\text{Manning 則}) \quad (2)$$

を既知の計算開始点 (x_b, h_b) から積分するのが、古典的な水面形の計算法である。

この式を解析的（数学的に積分するのは難しく、 x を h の関数で明示できないので、少しづつ水深を変化させながらつぎの x を計算してゆくという、逐次計算を行うことがある。

たとえば、下図のように、M2 カーブを下流から計算する場合、計算開始点付近の勾配が分かれれば、少し高い水位（上流側）での位置が計算できる。さらに、計算が進んで、ある水深 h_i での位置が x_i であったなら、そこから Δh だけ高い水深 $h_{i+1}=h_i+\Delta h$ に対応する位置 x_{i+1} が計算できる。

この「次の水深 $h_{i+1}=h_i+\Delta h$ となる位置 x_{i+1} 」を求めるには、式(3-2)をわずかに Δh だけ、つまり h_i から h_{i+1} までを積分すればよい。

$$x_{i+1} = x_i + \int_{h_i}^{h_{i+1}} \frac{dx}{dh} dh = x_i + \int_{h_i}^{h_{i+1}} f(h) dh \quad (4-1)$$

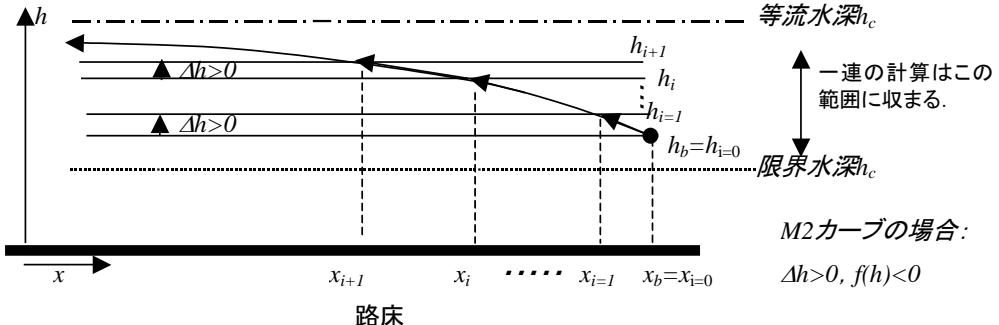
また、その積分を近似する式として Simpson の 1/3 則がある。これが(4-2)の式である。

$$x_{i+1} \equiv x_i + \frac{\Delta h}{6} \{ f(h_i + 4f(h_{i+1/2}) + f(h_{i+1})) \} \quad (4-2)$$

関数 $f()$ は式(3-2)に対応する。その中の各水深は、

$$h_i \ (=h_b+i\Delta h), \quad h_{i+1/2}=h_i+\Delta h/2, \quad h_{i+1}=h_i+\Delta h \quad (=h_b+(i+1)\Delta h) \quad \text{をあらわす。}$$

よって、 Δh を決めて、ある (h_i, x_i) から h_{i+1} に対応する位置 x_{i+1} を求めるには、式(3-2) に $h_i, h_{i+1/2}, h_{i+1}$ をそれぞれ式(4-2) に代入して得られる。これを繰り返すことによって、水面形（水深分布）が得られる。



1. 2. 2 計算手順

この一連の手続きは、データシートを作り計算できる。ここでは、簡単に計算するために、ホームページから、エクセルファイルをダウンロードし、計算してみることとする。

<http://www.daido-it.ac.jp/~t-sumi/exp/exp.htm> （「鷲見哲也研究室」で検索も OK）

重要なのは、計算開始点を知っておくことである。講義したように、常流では上流に波が伝播するから、下流から水面形が決まる。よって、下流端の水位を知ることが出来なければ、計算できない。
(射流の場合は逆である。) 表-1 の、矢印の方向に水面形が決まる。

表-1 水面形の分類と、水面形の決まる方向（矢印）

勾配の名称	緩勾配	限界勾配	急勾配
限界水深・等流 水深の関係	$h_0 > h_c$	$h_0 = h_c$	$h_0 < h_c$
図 h_0 と h_c の関係 と水面形の分類 (各水路勾配で、 3つのうちの どれかの水面形 が現れる)			
勾配の関係	$i_b < i_c$	$i_b = i_c \equiv \frac{g^{10/9} n^2}{q^{2/9}}$	$i_b < i_c$

■ケース 1, 2 の計算

常流と、射流の判定は、等流水深 h_0 と限界水深 h_c で（自動的に）判定できる。（図-3 参照）
よって、入力情報は、

単位幅流量、Manning の粗度係数、水路勾配、計算開始点の x 方向位置 x_b とそこでの水深 h_b 、
があればよい。そのほかに、どの位置まで計算するのか x_{end} 、計算開始点での水路の高さ z_b 、
を与える。本エクセルシートでは、瞬時に水面形が計算でき、グラフにも現れる。

1枚目のシートでケース 1を、2枚目のシートでケース 2を計算する。

シートの切り替えは、画面下方のタグをクリックして行う。

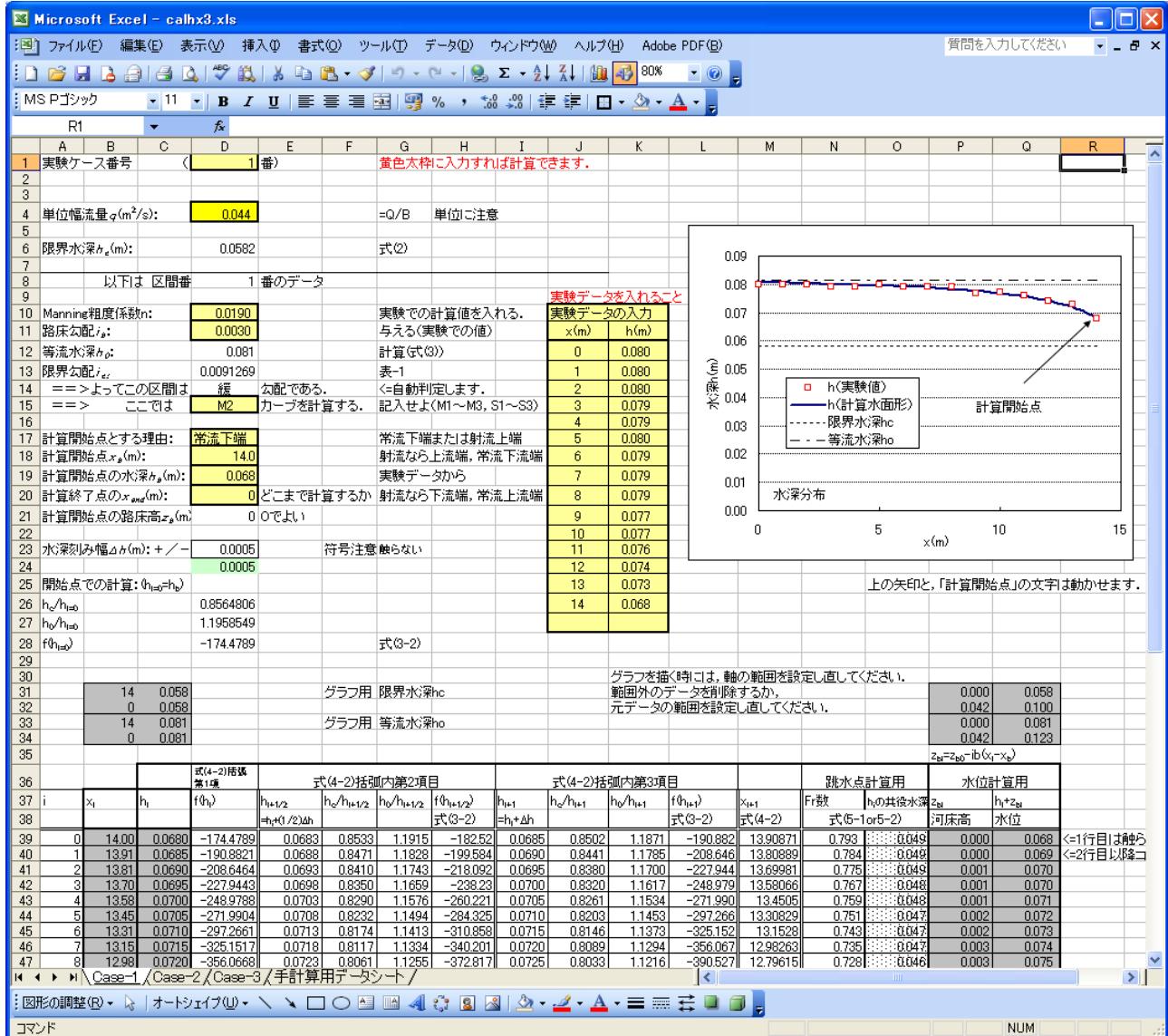


図-3 ケース 1 またはケース 2 の計算シート

■ケース3（跳水のケース）の計算

実験データを、ゲート下流のデータ($x=0m$)から入力する。

計算開始点（上流側、下流側）の情報、単位幅流量等を入力する。

計算結果には、3つのカーブが描かれる。上流の水面形（射流）、下流の水面形（常流）に加え、下流水深の共役水深が描かれる。この共役水深と上流水面形がクロスする点（一致する点）が跳水点である。ここに縦の赤い矢印を動かし、跳水点として表示する。

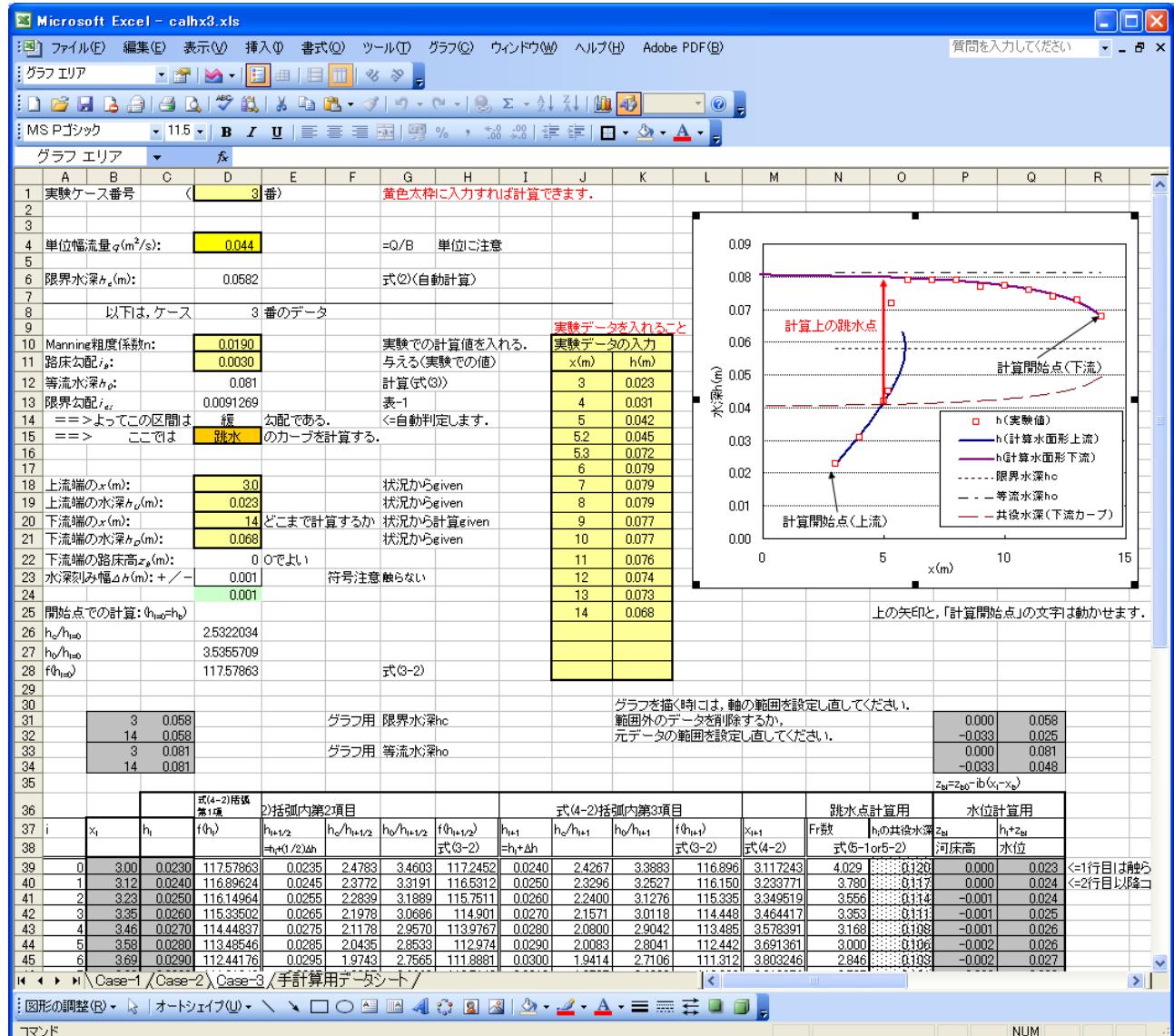


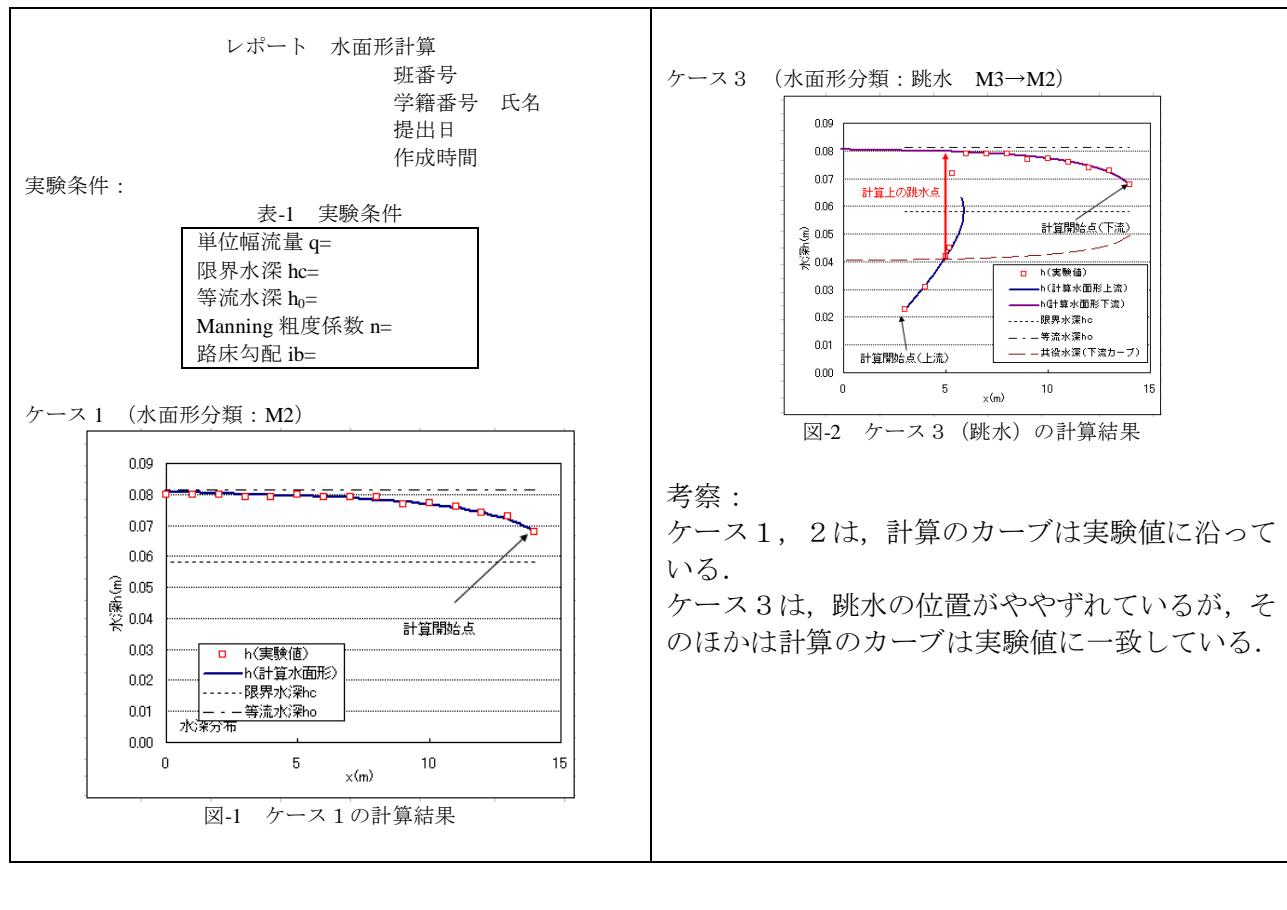
図-4 ケース3（跳水ケース）の計算シート

課題（本日中に出すこと）：

諸君の前回実験のデータ3ケースをそれぞれ計算し、上記うち、計算条件（単位幅流量、限界水深、路床勾配、カーブの種類、計算開始点位置、開始水深）、および水面形のグラフを添付し、簡単な考察を加えて、提出せよ。計算開始点もわかるようにしておくこと。表紙は不要。1ページ目の始めに、班、学籍番号、氏名、レポート作成時間を記述すること。ホチキス止めしない。

レポートのテンプレートがホームページにあるので、ダウンロードして貼り付ける。

提出期限：本日中。（17:00まで）

次回レポート提出時の注意：

今回の結果を次回提出のレポートに貼り付けて、「水面形の理論との比較」として考察すること。（班長レポート・要約レポート、ともに）