

2. 管路

1. 理論式と実験手順

1. 1 管路の問題

管路は、上水道等での給水によく用いられる。水道での送水で問題になるのは、上流の送る側ではどの程度の圧力（または全水頭）をかけなければならないのか、末端まで必要な圧力を維持して流すにはどのような管や設備が必要なのかを考えなければならない。

ところが、ポンプなどで高い圧力をかけて、高い全水頭（全エネルギー）を与えて送り出しても、

- ・長い管を流れる間の摩擦による仕事（摩擦損失），
- ・バルブ・急拡大部・急縮部，曲がりなど局所的な形の変化のあるところの乱れ（局所損失），

によってエネルギーを失い、末端ではエネルギー（全水頭）は減ってしまう。

ベルヌイの定理によれば、全水頭＝速度水頭＋位置水頭＋圧力水頭である。

つまり、全水頭が少ないと、高い場所（高い位置水頭）で、蛇口（出口は大気圧）をひねって水を出そうとしても、速度水頭が小さくなり、十分な流量が得られない可能性がある。

つまり、摩擦損失や局所損失によって、供給元から出口まで、どの程度のエネルギーの損失があるのかを知っておくことは、なるべく損失が小さくなるように管路を設計したり、十分なポンプを選んだりするのに、有用である。

本実験では、すでに習ったこれらの摩擦損失・局所損失の式が成立するかどうかを確認する。具体的には、摩擦損失係数や急拡大・急縮損失係数がどの程度の値になるのか、を確認する。

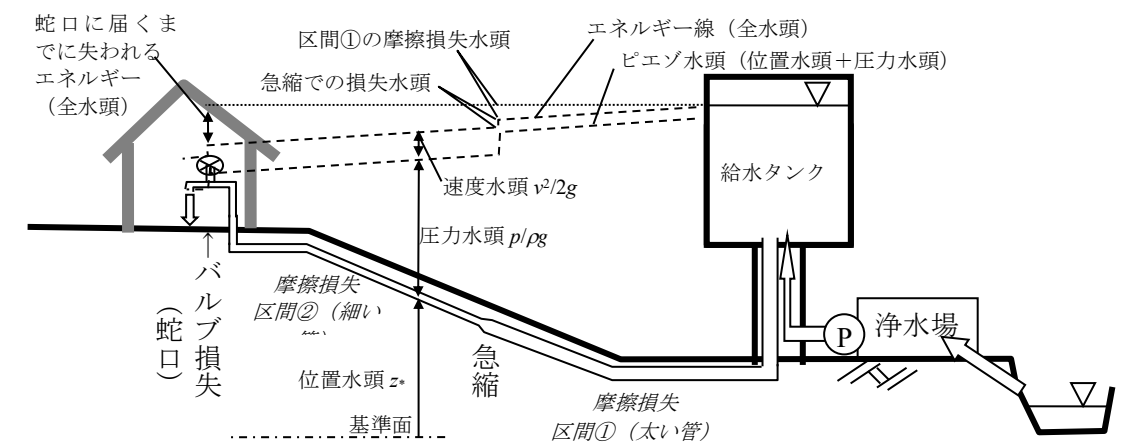


図-1.1 管路のエネルギー損失（水道の例）

1. 2 実験結果と比較するための理論式

(1) 摩擦損失

摩擦損失係数の定義と、理論式は以下の通りである。

$$h_f = f \frac{l}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (1)$$

(ダルシー・ワイズバッハ Darcy-Weisbach の式)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.74 - 2 \log_{10} \left(\frac{2k_s}{D} + \frac{18.7}{\text{Re} \sqrt{f}} \right) \quad (2)$$

(コールブルック Colebrook の式)

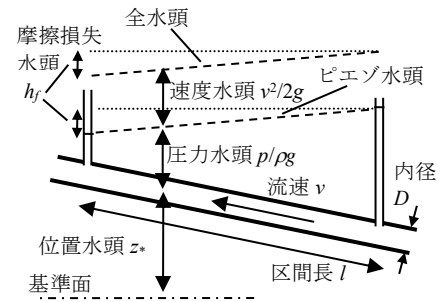


図-1.3 摩擦損失（内径一定）

ここに、

v : 管内の平均流速 (cm/sec),

h_f : 損失水頭 (cm),

(=管路のある区間の上流端と下流端での全水頭の差)

f : 摩擦損失係数 (無次元, 単位がない),

g : 重力加速度 (980cm/sec²),

k_s : 相当粗度(cm, 管の壁面の粗さ, 本実験では 0cm)

D : 管の直径(cm)

l : 管の区間の長さ (cm)

$\text{Re} = vD/\nu$: レイノルズ数, 2320 以上で乱流 (以下は層流)

ν : 動粘性係数 (水の粘りを表す, 20℃で約 0.010cm²/s)

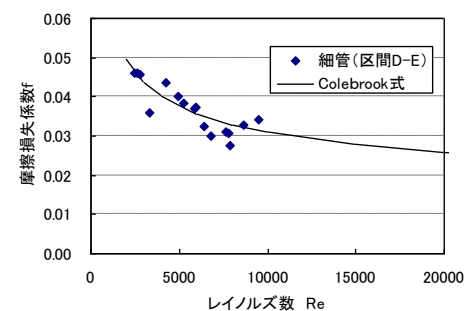


図-1.4 レイノルズ数と摩擦損失係数

である。変化する量は速度水頭 $v^2/2g$ と損失水頭 h_f であり, h_f は速度水頭にほぼ比例する。式 (1) において, 摩擦損失係数 f はほぼ一定になる。その値が予めわかれば, 摩擦損失がどの程度になるか予測でき, 設計に使える。経験的に f の値は管の粗さ k_s によってほぼ決まり, 滑面ではレイノルズ数 Re によって変化することがわかっている。本実験では, アクリルパイプを用いているので滑面 ($k_s=0$) である。

本実験では,

①実験データ (速度水頭 $v^2/2g$ と h_f) から式 (1) で摩擦損失係数 f を求めるとどの程度になるのか,

②式 (2) のようなレイノルズ数の関数となるかどうか,

の 2 点について図-1.4 のようなグラフで確認する。

本実験では 2 つの径の管があるが, 細い管 (直径 $D=D_n$) でデータを集める。

→具体的な整理方法は, 1. 4 で説明する

(理論式つづき)

(2) 急拡大損失・急縮損失

急拡大・急縮の損失係数の定義は以下の通り。

$$h_{se} = \zeta_{se} \frac{v_n^2}{2g} \quad (3) \text{ (急拡大)}$$

$$h_{sc} = \zeta_{sc} \frac{v_n^2}{2g} \quad (4) \text{ (急縮)}$$

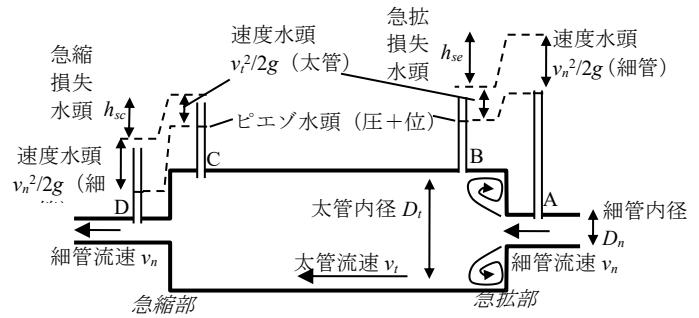


図-1.5 急拡大・急縮

ここに

v_n : 細い管の平均流速 (cm/sec), $v_n = Q/A_n$, Q : 流量 (cm³/sec), A_n : 細い管の断面積 (cm²)

h_{se} : 急拡大部の損失水頭 (cm), 急拡大部の上流側と下流側での全水頭の差

h_{sc} : 急縮部の損失水頭 (cm), 急縮部の上流側と下流側での全水頭の差

ζ_{se} : 急拡大損失係数 (無次元, 単位なし) (ギリシャ文字は「ツェータ」「ゼータ」と読む)

ζ_{sc} : 急縮損失係数 (無次元, 単位なし)

g : 重力加速度 (980cm/sec²),

変化する量は細管の速度水頭 $v_n^2/2g$ と損失水頭 h_{se} または h_{sc} であり, 損失水頭は細管の速度水頭にほぼ比例する. 式 (3) (4) において, 損失係数はいずれもほぼ一定になっている. そこで,

③ここでは損失係数 ζ_{se} , ζ_{sc} が未知だが,

(1) 一定になるか (ばらつくか),

(2) 平均値を計算し, 理論的な値・経験的な値に近いかどうか確認する.

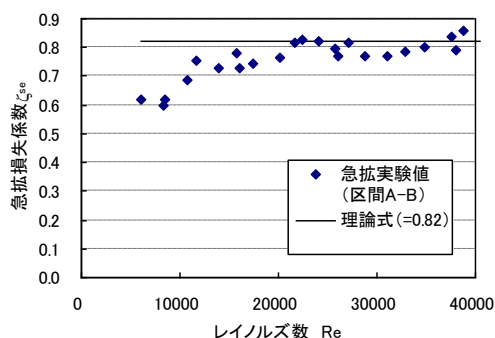
$$\text{急拡大損失係数の理論式 (Borda-Carnot 式)} \quad \zeta_{se} = (1 - A_n/A_t)^2, \quad (5)$$

$$\text{急縮損失係数の経験式} : \zeta_{sc} = 0.481 - 0.489 A_n/A_t \quad (6)$$

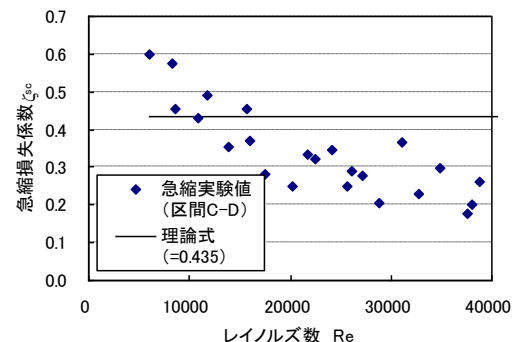
ただし, A_n : 細い管の断面積 (cm²), A_t : 太い管の断面積 (cm²)

④横軸に細管のレイノルズ数 Re の値とし, 縦軸に各損失係数 ζ_{se} , ζ_{sc} をとったグラフ上で, 一定かどうか確認する. (図-1.6(a) (b))

→具体的な整理方法は, 1. 4 で説明する



(a) レイノルズ数 Re と急拡大損失係数 ζ_{se}



(b) レイノルズ数 Re と急縮損失係数 ζ_{sc}

図-1.6 整理するグラフの例 (局所損失)

1. 3 実験装置の概要

図-1.7 に示しているように、下流側のバルブで流量調整し、出口で流量計測する。また、管の壁面から 5 点でマノメータが接続されており、ピエゾ水頭（→復習せよ）を計測できるようになっている。

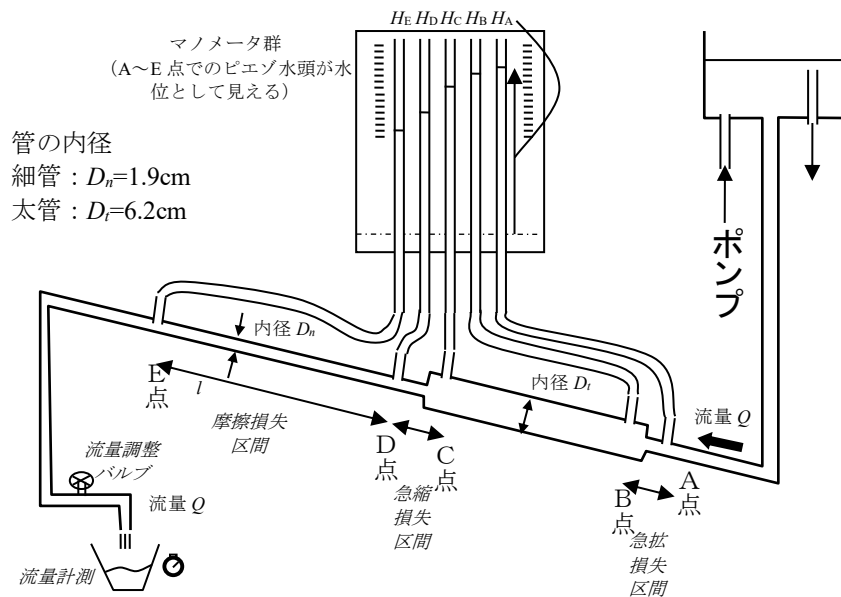


図-1.7 実験装置の概要

1. 4 計測方法と整理の方法

変化する量は、各損失区間での速度水頭と、損失水頭である。

(1) 諸元の把握と計測

計測を始める前に、変化しない量（諸元）を把握しておく必要がある。

質問：それは何か？ 答え：細管の _____ , _____
 太管の _____ , _____
 区間 D-E の _____ (細管)

(2) 変量（ピエゾ水頭、流量）の計測

ある流量（バルブ開度）における計測は、以下を行う。

○流量 Q は 3 回づつ計測する。流量（単位時間当たりに流れる体積）を直接測ることはできないので、水路下端でバケツで捉える体積 V をその時間 t で割って流量 Q とする。体積は、電子天秤で重量を計り、比重を 1 として体積に変換する。（つまり、 $1\text{g}=1\text{cm}^3$ ）これを 3 回繰り返して 3 つの $Q (Q_1 \sim Q_3)$ を得、これらを平均して、そのバルブ開度に対応する Q とする。

○A 点～E 点でのピエゾ水頭、 $H_A \sim H_E$ を読み取る。ミリまで読むこと。

脚立に登るので足元に注意すること。

下流端バルブを操作して流量を順次変化させ、上記の計測を 10 回程度繰り返す。

→どのようなデータシートにすればよいか考えよ。

(3) 実験後の整理

1. 2で説明した確認事項について具体的に示す.

実験で計測したのは, A 点~E 点でのピエゾ水頭 $H_A \sim H_E$ と流量 Q である. このままでは, 式 (1) ~ (4) と比較できない. 損失係数を計算するために, 1. 2で述べたように, 各区間での損失水頭と速度水頭の組みを求める必要がある.

このために, 以下のデータを順に計算し求める.

(a) 速度水頭の求め方:

- まず, 太管での流速 $v_t=Q/A_t$, 細管の流速 $v_n=Q/A_n$, を求める.
- そして, 太管と細管の速度水頭 $v_t^2/2g$, $v_n^2/2g$ を求める.
- A 点, D 点, E 点では細管速度水頭, B 点, C 点では太管速度水頭を持つことに注意する.

(b) 損失水頭の求め方:

損失水頭は, 全点での全水頭を求めてから, 各区間の隣同士でその差を求める.

- まず, A~E の各地点で, ピエゾ水頭 $H_A \sim H_E$ に速度水頭を加えて全水頭 $E_A \sim E_E$ を計算する.
- 次に, 各区間の上流側全水頭から下流側全水頭を引いて, その区間の損失水頭とする.

(例: 区間 D-E 摩擦損失①: $h_f=E_D-E_E$)

こうして, 各区間の速度水頭と損失水頭の組が求められる.

(c) 式(1)(3)(4)に従って, 損失水頭各損失係数を求める.

- 区間 D-E の摩擦損失係数 f は 式 (1) を, $f=$ の式に変形して求めよ.
- 区間 A-B の急拡大損失係数 ζ_{se} は 式 (3) を, $\zeta_{se}=$ の式に変形して求めよ
- 区間 C-D の急縮小損失係数 ζ_{sc} は 式 (4) を, $\zeta_{sc}=$ の式に変形して求めよ.

(d) レイノルズ数 Re の計算.

摩擦損失係数はレイノルズ数 Re の関数となるので, 細管の Re を求めておく.

$$Re = \frac{vD}{\nu} \quad (\text{分母は動粘性係数, } 20^\circ\text{Cで約 } 0.010\text{cm}^2/\text{s}, \text{ギリシャ文字の「ニュー」})$$

表-1.2 損失係数計算表の項目の例

流量	ピエゾ水頭(cm)					平均流速(cm/s)		速度水頭(cm)		全水頭(cm)					摩擦損失水頭	摩擦損失係数	急拡大損失水頭	急拡大損失係数	急縮小損失水頭	急縮小損失係数	Re数
Q (cm ³ /s)	H _A	H _B	H _C	H _D	H _E	太管 v_t	細管 v_n	太管 $v_t^2/2g$	細管 $v_n^2/2g$	E _A	E _B	E _C	E _D	E _E	h_f (cm)	f	h_{se} (cm)	ζ_{se}	h_{sc} (cm)	ζ_{sc}	細管 $v_n D_n/\nu$
590	123.6	119.4	119.6	80.4	44.8	19.54	208.1	0.195	22.09	145.7	119.6	119.8	102.5	66.9	35.6	0.031	26.1	1.181	17.3	0.783	39537
567	129.7	125.5	125.9	91.5	58.7	18.78	200	0.18	20.4	150.1	125.7	126.1	111.9	79.1	32.8	0.031	24.4	1.106	14.2	0.642	37996
542	133.0	128.6	128.8	95.6	64.0	17.95	191.2	0.164	18.64	151.6	128.8	129.0	114.2	82.6	31.6	0.032	22.9	1.036	14.7	0.666	36321

(4) 各損失係数の理論値・経験値との比較

- ①細管の摩擦損失係数 f は、どの程度になるのか、
 ②式(2)のようなレイノルズ数 Re の関数となるかどうか。

HOWto①→表-1.2 から、細管（区間 D-E）でどの程度となるのか。

HOWto②→図-1.8 のように、グラフで横軸に Re 数、縦軸に摩擦損失係数を取り、実験値（太管、細管）と理論値（曲線）を描く。理論値は、式(2)の Colebrook 式だが、滑面 ($k_s=0$) では表-1.3 の値となるのでこれを用いて描いてよい。

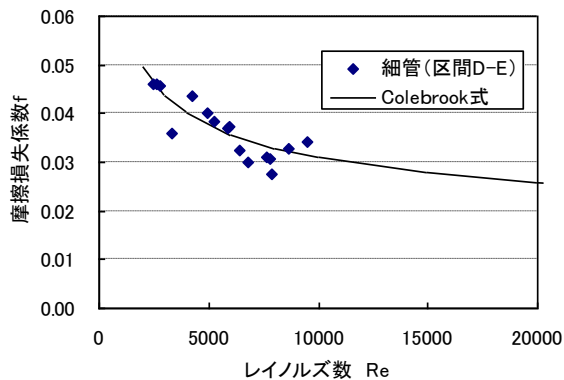


図-1.8 レイノルズ数と摩擦損失係数
 (図-1.4 と同じ)

表-1.3 Colebrook 式(3)の値（滑面）

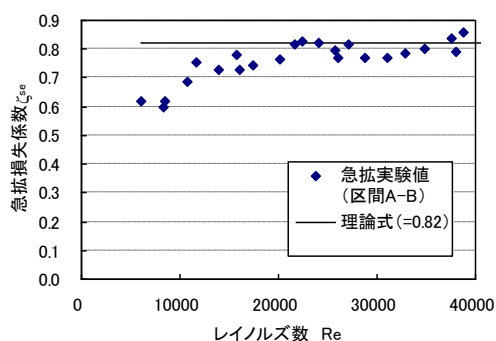
Re数	摩擦損失係数 f
2000	0.0495
3000	0.0436
4000	0.0400
6000	0.0356
8000	0.0328
10000	0.0309
15000	0.0278
20000	0.0259
30000	0.0235
40000	0.0220
50000	0.0209

- ③急拡大損失係数 ζ_{se} 、急縮損失係数 ζ_{sc} について、
 (1) 一定になるか（ばらつくか）、
 (2) 平均値を計算し、式(5)(6)の理論値・経験値と比較する。
 ④横軸に細管のレイノルズ数 Re の値とし、縦軸に急拡大損失係数 ζ_{se} 、または急縮損失係数 ζ_{sc} をとったグラフを描き、一定かどうか確認する。(図-1.9)

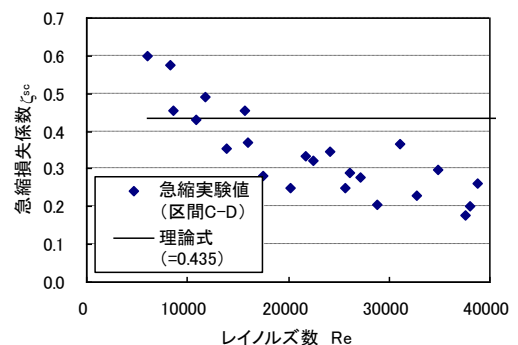
HOWto③→表-1.3 において、急拡大損失係数 ζ_{se} 、急縮損失係数 ζ_{sc} の平均値をそれぞれ求めておく。

急拡大については理論値（式(5)）と比較し、急縮損失については経験値(式(6)) と比較する。

HOWto④→図-1.9 については、を横軸にレイノルズ数（実験の細管値）を取り、縦軸に損失係数を用いる。式(5)の値（急拡大、図-1.9(a)）および式(6)の値（急縮、図-1.9(b)）を、比較のため、一定値として水平に引く。



(a) レイノルズ数 Re と急拡大損失係数 ζ_{se}



(b) レイノルズ数 Re と急縮損失係数 ζ_{sc}

図-1.9 整理するグラフの例（局所損失、図-1.6 に同じ）

2. 理論(管路の損失)

一般に管路や開水路の定常流はエネルギー損失を伴う。ここでは、管路を中心に取り上げ、損失を考慮したベルヌイ式を考える。いま、管路におけるある2つの断面間をコントロールボリュームにとると、ベルヌイ式は次の様に拡張される。(iは管の区分、jは局所損失毎を表す)

$$E_1 = E_2 + \sum_i f_i \frac{l_i}{D_i} \frac{v_i^2}{2g} + \sum_j \zeta_j \frac{v_j^2}{2g} \quad (9) \quad (\rightarrow \Delta E = E_1 - E_2 = \sum_i f_i \frac{l_i}{D_i} \frac{v_i^2}{2g} + \sum_j \zeta_j \frac{v_j^2}{2g})$$

ここに、右辺第2項は摩擦損失、第3項は形状損失を表す。これらは、コントロールボリューム(断面1と2の間)での損失水頭の和である。詳細は以下に示す。

摩擦損失水頭 h_f は、長さ l の区間において、管の内径 D および水理径深 R が一定であれば、摩擦損失係数 f (無次元) を導入して、次式で表される。($D=4R$)

$$h_f = f \frac{l}{D} \frac{v^2}{2g} = f \frac{l}{4R} \frac{v^2}{2g} \quad (10)$$

摩擦損失係数 f は一般に層流や滑らかな壁面では流れの状態 (Reynolds 数) の関数になる。粗面、滑面両方で使える式として、コールブルック Colebrook 式が提案されている。

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.74 - 2 \log_{10} \left(\frac{2k_s}{D} + \frac{18.7}{\text{Re} \sqrt{f}} \right) \quad (11)$$

ここに、

k_s : 相当粗度(cm, 管の壁面の粗さ, 本実験では 0cm)

$\text{Re} = vD/\nu$: レイノルズ数, 2320 以上で乱流 (それ以下は層流) であることを示す。

ν : 動粘性係数 (水の粘りを表す, 20°C で約 0.010 cm²/s)

十分粗く完全乱流においては、一定値を取り、Manning の粗度係数 n とも関係を持つ。

$$f = \frac{8gn^2}{R^{1/3}} = \frac{124.5n^2}{D^{1/3}} \quad (12) \quad (\text{m,s 単位系})$$

一方、**局所損失, 形状損失** h_l は形状損失係数 ζ を用いて一般に次式で示される。

$$h_l = \zeta \frac{v^2}{2g} \quad (13)$$

損失部前後で内径に変化がある場合、 **v は細い方の管の流速で表す**。各損失係数を次に示す。

入口損失 ζ_e : 形状によって変化する。(およそ 0.5.)

出口損失 ζ_o : 一般に、 $\zeta_o=1$ とする。(急拡における $A_t=\infty$ に相当)

急拡 ζ_{se} : Carnot-Borda 式 $\zeta_{se}=(1-A_n/A_t)^2$

A_n, A_t : 入口側 (細管), 出口側 (太管) 断面積, 運動量保存則等から得られる。

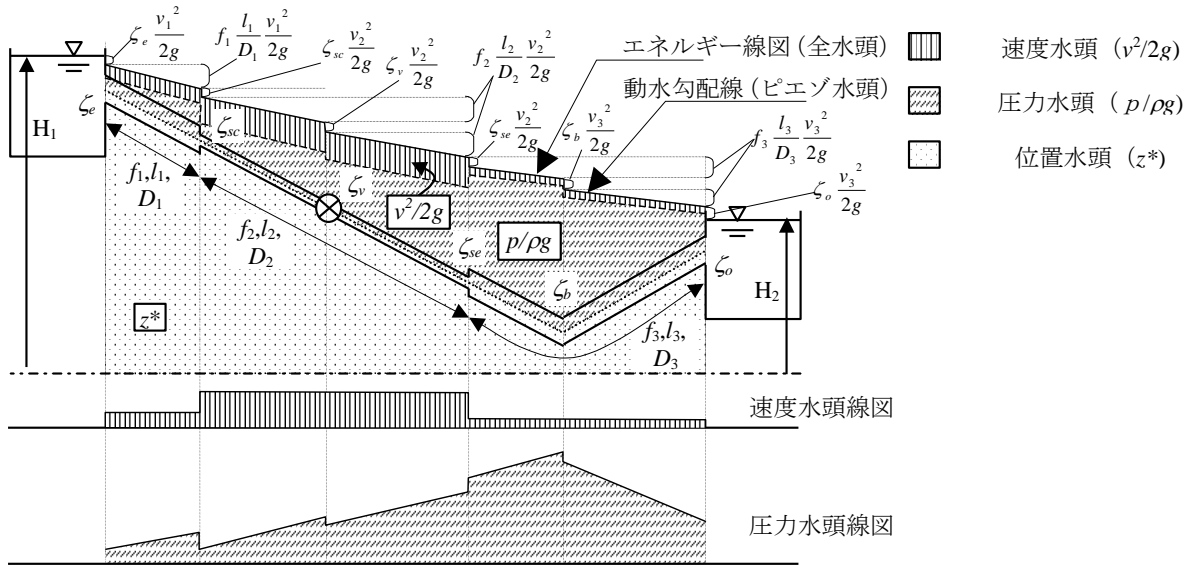
急縮 ζ_{sc} : Weisbach の実験結果等から, A_n/A_t と関連づけられている。

およそ $\zeta_{sc}=0.481-0.489A_n/A_t$ となることが経験的にわかっている。

バルブ ζ_v : バルブ弁の種類・開度で変化する。

曲がり・屈折 ζ_b : 曲率・中心角等により変化する。

その他（漸拡，分岐・合流）



$$\Delta E = E_1 - E_2 = H_1 - H_2$$

$$= \left(f_1 \frac{l_1}{D_1} \frac{v_1^2}{2g} + f_2 \frac{l_2}{D_2} \frac{v_2^2}{2g} + f_3 \frac{l_3}{D_3} \frac{v_3^2}{2g} \right) + \left(\zeta_e \frac{v_1^2}{2g} + \zeta_{sc} \frac{v_1^2}{2g} + \zeta_v \frac{v_2^2}{2g} + \zeta_{se} \frac{v_2^2}{2g} + \zeta_b \frac{v_3^2}{2g} + \zeta_o \frac{v_3^2}{2g} \right) \quad (14)$$

解法のヒント：

流量を求める問題の場合：全水頭が既知である断面と，流速以外，或いは全水頭が既知である断面間で上式(14)又は(9)式を立て，流速を流量で記述 ($v=Q/A$) して得られる。

既知の条件： タンク部では一般に速度水頭は無視でき，この水面がそこでの全水頭となる。

大気への放水部：圧力水頭が 0 である。全水頭は，速度水頭と位置水頭の和となる。

管路における位置水頭は普通既知である。

流量と断面積が既知の断面では，速度水頭が既知である。

ピエゾメータの水面が既知であれば，ピエゾ水頭は既知。（圧力+位置） など

エネルギー線図・圧力線図等：

- ①全水頭線は，上流から摩擦損失・局所損失を考慮して引く。
- ②上記の方法で流量を求め，速度水頭を得る。
- ③全水頭から速度水頭を差し引くことで動水勾配線（ピエゾ水頭線）が描ける。
- ④ピエゾ水頭線図から位置水頭をひくことで，圧力水頭線図が描ける。