

1. オリフィス・堰

1. 理論式と実験手順

1. 1 オリフィス・堰とは...

オリフィスとは水槽や貯水槽、あるいは水路や河川にあるダムなどの横断構造物等に設けた穴のことである(図-1.1(a))。また、堰とは水路や河川にあるダムなどの横断構造物等に設けた越流部のことである(図-1.1(b))。背後の水位が上がらないと下流へ流す流量が増えないので、図-1.2の様に、上流から流れ込む流量を一旦貯留して流出を遅らせるなどの制御に用いられる。

出口の形状が決まれば、水位と流量とが一定の関係になるため、(いちいちバケツなどで) 流量を測ることなく水位から流量を推定できるので便利である。本実験では、この水位と流量の関係を、模型実験で確認し、理論式と比較することを目的とする。

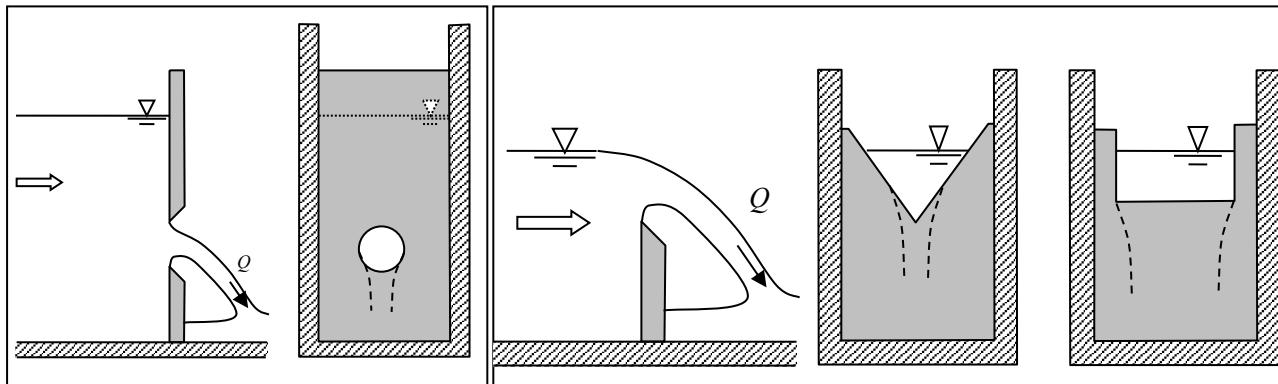


図-1.1(a)オリフィス（円形孔と矩形孔）

図-1.1(b) 堤（三角堰と四角堰）

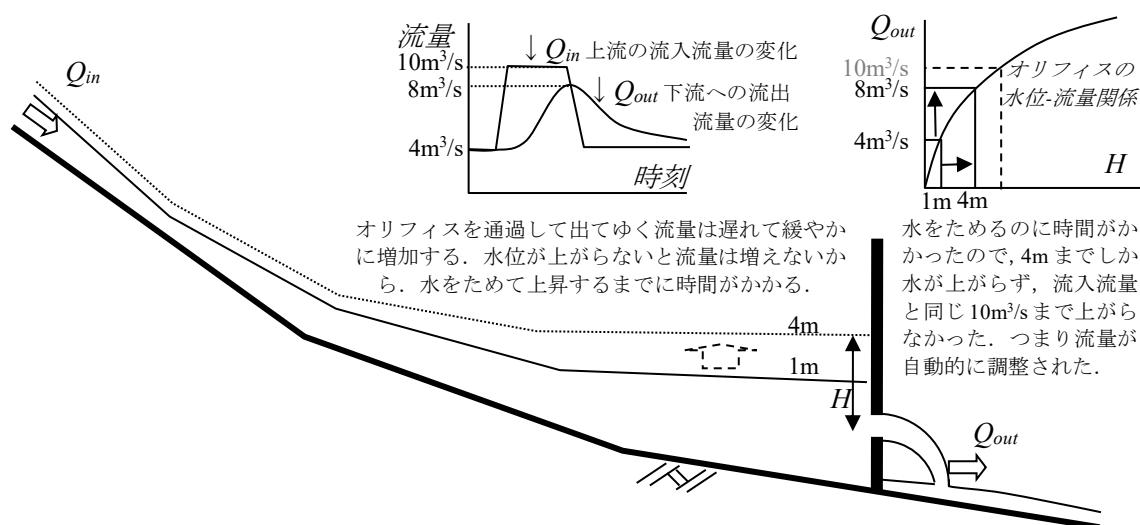


図-1.2 オリフィス式穴あきダムの流量調整機能と、流量の推定

1. 2 実験装置の概要

図-1.3(a)～(c)に示しているように、オリフィス・堰の板の部分は、取り外して、孔の大きさや形を変化させることができる。1～2班はオリフィスの実験を行い、3～4班は堰の実験を行う。オリフィスは2種類の孔の大きさについて、堰は三角堰と四角堰について、2種類の形状でデータを取る。供給側にバルブがあるので、これで流量（あるいは水位）を調整・変化させるために操作する。

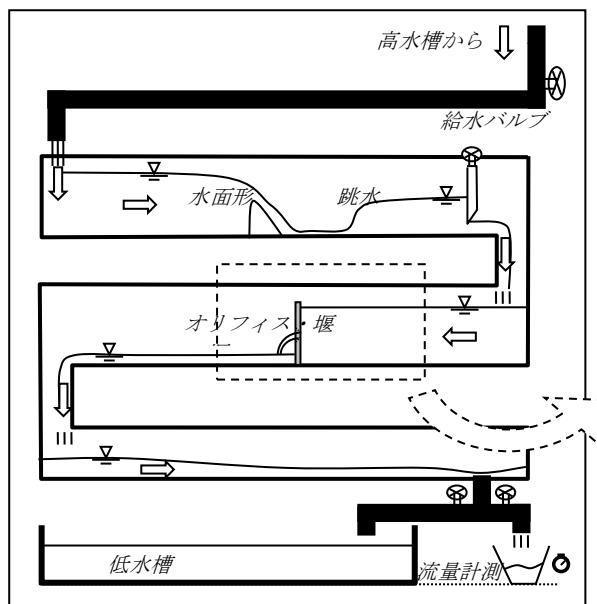


図-1.3(a) 実験装置の概要

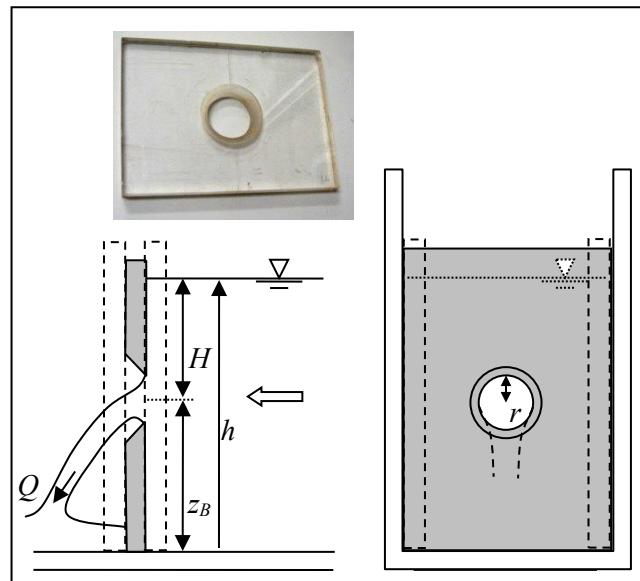


図-1.3(b) オリフィスの形状の諸元

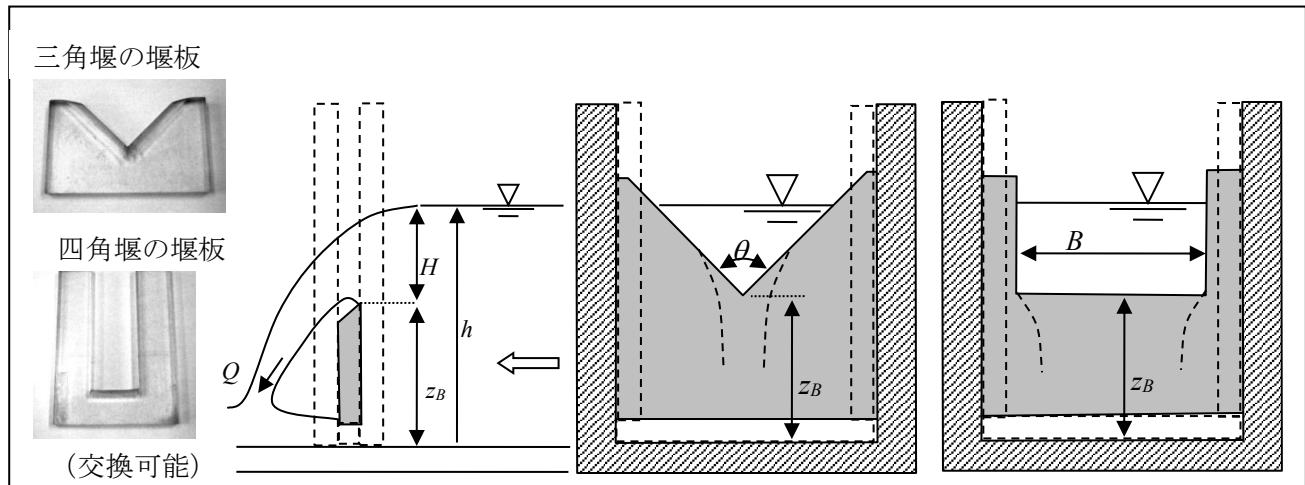


図-1.3(c) 三角堰・四角堰の形状の諸元

1. 3 計測方法

変化する量は、流量 Q と孔からの水位 H である。計測は、この変化する量を求めるために行う。

(1) 諸元の把握と計測

計測を始める前に、装置の諸元（固定パラメータ）を把握しておく必要がある。

質問：それは何か？ 答え： , (オリフィス)
 , , (堰)

(2) 変量 (H, Q) の計測

H は、孔の高さから水面までであるから、底から孔の高さ z_B (cm) を諸元として測っておき、実験時には、底からの水位 h (cm) を計測して、後に $H=h-z_B$ として計算するとよい。
ある流量（水位、バルブ開度）における計測は、以下を行う。

- 流量 Q は 3 回づつ計測する。流量（単位時間当たりに流れる体積）を直接測ることはできないので、水路下端でバケツで捉える体積 V をその時間 t で割って流量 Q とする。体積は、電子天秤で重量を計り、比重を 1 として体積に変換する。（つまり、 $1\text{g}=1\text{cm}^3$ ）これを 3 回繰り返して 3 つの Q ($Q_1 \sim Q_3$)を得、これらを平均して、そのバルブ開度に対応する Q とする。
- 水位 H は孔の高さから水面までであるが、孔の高さは読みにくいので、底からの水位 h (cm) を計測する。予め底から孔の高さ z_B (cm) を諸元として測っておき、後に $H=h-z_B$ として計算する。

給水バルブを操作して流量を順次変化させ、上記の計測を 7 回程度繰り返す。 (H, Q) の組を 7 個程度得る。)

バケツは全く同じ重量のものを 3 つ用意する。バケツ重量は、天秤が覚えてくれる。体積と時間をシートに直接記入する必要はなく、計算用紙と電卓を用意し、そのつど割り算をして流量を元データとして記入すればよい。（計算専用の役、記録係、等、役割を分けられる。）電子天秤の精度は 5g なので、時間は長めに取ったほうが流量の精度は上がる。

→どのようなデータシートにすればよいか考えよ。（班長の宿題）

1. 4 (a) オリフィス：実験結果と比較するための理論式と整理方法 (1~2班)

式(1)の小型オリフィス公式と式(2)の大型オリフィスの2つの公式に分類される。大型オリフィスは流出孔が比較的大きく、オリフィス孔の内側で高さ方向に流速が変化するため、理論式に若干の違いがある。ここでは、式(1)の小型オリフィス公式についてのみ、考えることとする。

$$Q = C \cdot A \sqrt{2gH} \quad (1)$$

$$Q = C \cdot A \sqrt{2gH} \left\{ 1 - \frac{1}{32} \left(\frac{r}{H} \right)^2 \right\} \quad (2) \text{ 参考}$$

ここに、

Q ：流量 (cm^3/sec)、

H ：孔中心から水面までの高さ(cm)、

(=底から水面までの高さ h −底から孔中心までの高さ z_B)

C ：流量係数 (無次元、単位がない)、

g ：重力加速度 (980 cm/sec^2)、

r ：孔の半径(cm)、

A ：孔の断面積(cm^2)で、ここでは $A=\pi r^2$

である。変化する量は、 Q と H であり、 Q が H の関数となっている、つまり、 H で Q がわかる、ということである。この実験では、理論式の関係が成立しているかを、3つの方法で確認する。

チェックポイント **①**：ここでは流量係数 C が未知だが、

(1) 一定になるか (ばらつくか)、

(2) 平均値を計算し、0.60~0.64に近いかどうか確認。

小型公式の式(1)について行うこと。(穴の半径 r について2通りを扱う。)

HOWto1→表-1.1のような整理をする。予め、データシート上で、 H と Q は計算しておく。各流量での C の計算は、表中③のように、式(1)右辺の C 以外の式 $A\sqrt{2gH}$ を計算し、これで流量 Q を割れば④の C を求められる。

式(2)については、同様に⑤(式が違う)から⑥で C を計算する。

HOWto2→ C の値のばらつきを見るとともに、平均値はいくらか計算する(表-1.1④)。

式(2)も同じ(⑥)。

表-1.1 オリフィスのデータ整理表
(諸元の表は含んでいない、 $r=1.5\text{cm}$ の例、2種類の r 每に作成)

①越流水深 (cm)	②流量 (cm^3/s)	小型オリフィス(式(1))	
		③式(1)右辺C以外 $A\sqrt{2gH}$ (cm^3/s)	④小型流量係数 $=\frac{\text{②}}{\text{③}}$
3.31	360.9	565.1	0.639
3.43	382.4	575.3	0.665
3.73	394.9	600.0	0.658
4.15	408.4	632.9	0.645
4.67	438.4	671.4	0.653
小型のC 平均値→		0.652	

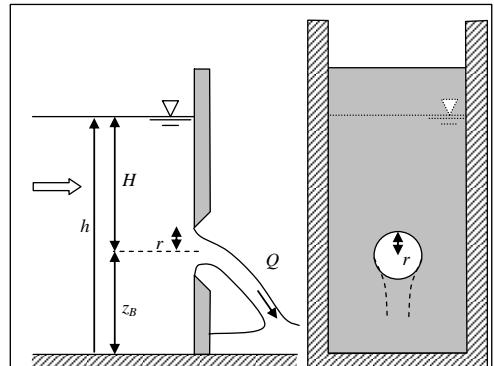


図-1.4 諸変数の定義

チェックポイント **②**:

横軸を右辺の C 以外の項の値とし、縦軸に Q をとったグラフ上で、実験データ（点）と理論式（直線）を比較する。（図-1.5(a)）

HOWto1 → H から、 $A\sqrt{2gH}$ を計算する（表-1.1 中の③列参照）。これを横軸、②列の Q を縦軸にとってプロットする。（孔の半径 r 每に、この図-1.5 を作成）

HOWto2 → 理論式は原点を通る斜めの直線で、傾きは C となる。表-1.1 で計算した C の平均値をこのグラフの傾きとして描くこと。

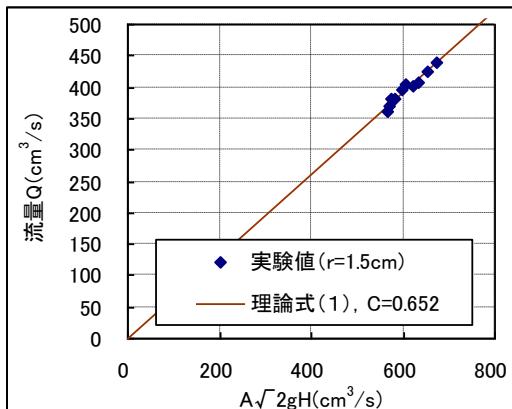
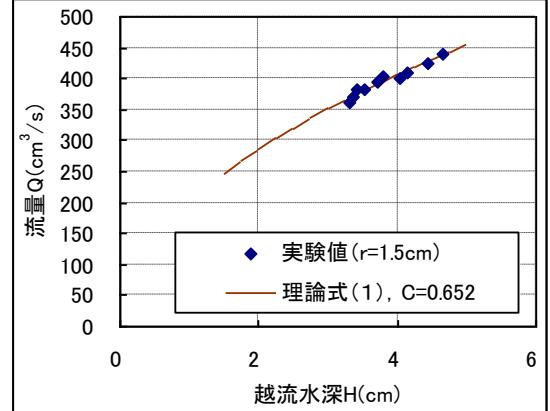
図-1.5 $A\sqrt{2gH}$ と流量 Q の関係 ($r=1.5\text{cm}$)図-1.6 越流水深 H と流量 Q の関係 ($r=1.5\text{cm}$)

図-1.5 整理するグラフの例（小型オリフィス公式（1））

チェックポイント **③**:

実験値の平均を正しい C として用いれば、理論式は完成する。横軸に H 、縦軸に Q をとったグラフ上に実験データ（点）と理論式（カーブ）を描き、比較する。（図-1.6）

HOWto1 → 図-1.6 のように、実験データはプロット（点）で、理論式はカーブで描く。

HOWto2 → 理論式のカーブの描き方：表-1.2 の様に、実験データとは別に、少しづつ H を増やして理論式の Q を計算しておき、この $H-Q$ の値をグラフ上にプロットし、それをカーブでつなぐで描く。理論式は、小型オリフィスの式（1）、のみでよい

表-1.2 の補足：

- C は表-1.1 の各平均値を使用
- この表は図-1.6 で理論式のグラフを描くのに必要。直線ではないから、 H を適当な間隔（表では 0.05cm 間隔）毎に理論式の値を計算

表-1.2 理論式の $H-Q$ グラフ
用計算表
(各半径 r 每に作成)

越流水深 H (cm)	理論式 (小型オリフィス) 流量 Q 式(1) (cm^3/s)
1.50	248.7
1.75	268.6
2.00	287.2
2.25	304.6
2.50	321.1
2.75	336.8
3.00	351.7
3.25	366.1
3.50	379.9
3.75	393.3
4.00	406.2
4.25	418.7
4.50	430.8
4.75	442.6
5.00	454.1

1. 4 (b) 堰の実験：実験結果と比較するための理論式と整理方法 (3~4班)

本実験では、三角堰と四角堰の実験を行う。理論式は両者で異なる。

理論式は三角堰の公式 (3) と四角堰の公式 (4) である。

$$Q = C \cdot \frac{8}{15} \tan(\theta/2) \sqrt{2g} H^{5/2} \quad (3) \text{ (三角堰)}$$

$$Q = C \cdot \frac{2}{3} \sqrt{2g} B \cdot H^{3/2} \quad (4) \text{ (四角堰)}$$

ここに、

Q : 流量 (cm^3/sec , または m^3/sec),

H : 越流水深 (cm, または m), (=底から水面までの高さ h - 底から堰高までの高さ z_B)

C : 流量係数 (無次元, 単位はなし), g : 重力加速度 (980cm/sec^2 , または 9.8m/sec^2),

B : 四角堰の幅(cm, または m),

θ : 三角堰の頂角

である。単位は、「mとsec」または、「cmとsec」のいずれかに統一すること。

本実験の三角堰の頂角は直角 ($\theta=90^\circ$) であるので, $\tan(\theta/2)=1$ となる。

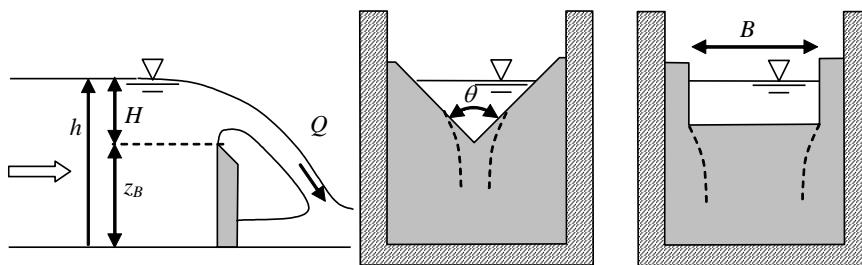


図-1.7 諸変数の定義

変化する量は、 Q と H であり、 Q が H の関数となっている、つまり、「 H から Q がわかる」ということである。この実験では、理論式の関係が成立しているかを、3つの方法で確認する。三角堰公式 (3)、四角堰公式 (4) の両者について行うこと。

チェックポイント **堰①**:

(1)係数 C の実験結果は一定になるか (ばらつくか), (2)平均値はいくらか を確認。

HOWto1 → 表-1.3 のような整理をする。各流量での C の計算は、表中③のように、式 (3), (4) の

右辺の C 以外の式 (三角堰では $\frac{8}{15} \tan(\theta/2) \sqrt{2g} H^{5/2}$, 四角堰では $\frac{2}{3} \sqrt{2g} B H^{3/2}$) を計算し,

これで流量 Q を割れば④列の C を求められる。

HOWto2 → C の値のばらつきを見るとともに、平均値はいくらか計算する (表-1.3 ④列)。

表-1.3 データ整理表 (データシート, 諸元表は含んでいない)

(a) 三角堰の例

①越流水深 (cm)	②流量 (cm ³ /s)	三角堰(式(3))	
		③式(3)右辺C以外 (8/15)tan(θ/2)(√2g)H ^{5/2} (cm ³ /s)	④係数 =(②)/(③) C
2.59	208.8	139.3	1.499
1.92	90.8	65.9	1.378
2.35	137.9	108.6	1.269
2.98	264.2	197.7	1.336
3.07	292.9	213.0	1.375
三角堰のC 平均値→		1.371	

(b) 四角堰の例

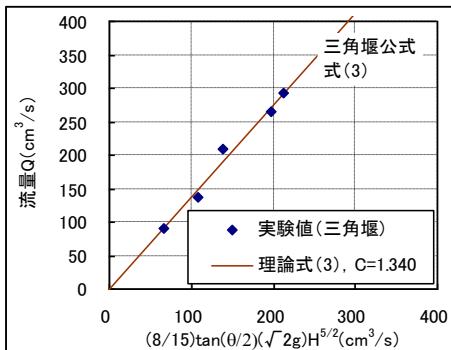
①越流水深 (cm)	②流量 (cm ³ /s)	四角堰(式(4))	
		③式(4)右辺C以外 (2/3)B(√2g)H ^{3/2} (cm ³ /s)	④係数 =(②)/(③) C
0.77	21.9	79.8	0.274
1.53	54.8	223.4	0.245
2.12	84.6	364.4	0.232
2.43	114.0	447.2	0.255
3.05	143.6	628.8	0.228
四角堰のC 平均値→		0.247	

チェックポイント ❷:

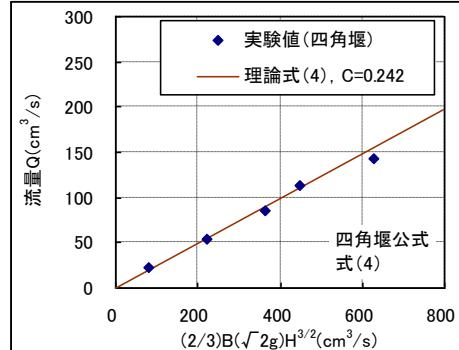
横軸を右辺の C 以外の項の値とし、縦軸に Q をとったグラフで、実験データ（点）と理論式（直線）を比較する。（図-1.8）この傾きが C である。 C が一定ならば、直線上にのる。

HOWto1 → (式右辺の C 以外の項) = 表 1.3③を横軸、 Q を縦軸にとってプロットする。（図-1.8）

HOWto2 → 理論式は原点を通る斜めの直線で、傾きは C となる（式（3）（4）を見直せ）。計算した C の平均値をこの図-1.8 のグラフの傾きとして描くこと。



(a) 三角堰の例 (式 (3))



(b) 四角堰の例 (式 (4))

図-1.8 右辺 C 以外の項と流量の関係

チェックポイント ❸:

平均値を C と与えれば式（3）（4）は H と Q 以外のすべてが決まり、理論式は完成する。横軸に H 、縦軸に Q をとったグラフ上に実験データ（点）と理論式（カーブ）を描き、比較する。（図-1.9）

HOWto1 → 図-1.9 のように、実験データはプロット（点）で、理論式はカーブで描く。実験データは、表-1.3 の① (H) と② (Q) をプロットする。

HOWto2 → 理論式のカーブの描き方：実験データとは別に、表-1.4 の様に、少しづつ H を増やして対応する理論式（式（3）、式（4））の値 Q を計算しておき、この $H-Q$ の値をグラフ上にプロットし、カーブでつなぐ。式に用いる C は、表-1.3 で計算した C の平均値を用いる。

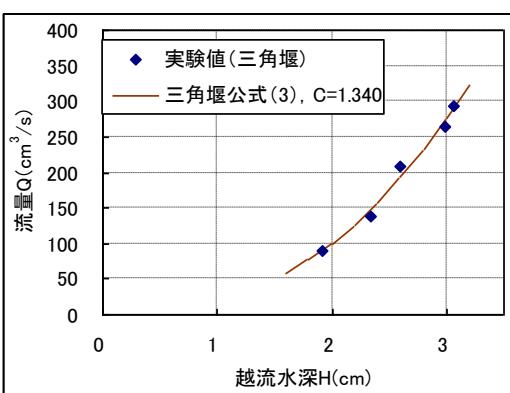
表-1.4 理論式の $H-Q$ グラフ計算表

(a) 三角堰の例 (式 (3))

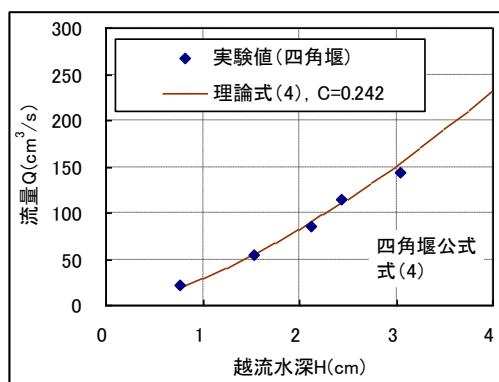
越流水深 H (cm)	理論式 (三角堰) 流量 Q 式(3) (cm^3/s)
1.60	57.3
1.80	76.9
2.00	100.1
2.20	127.0

(b) 四角堰の例 (式 (4))

越流水深 H (cm)	理論式 (四角堰) 流量 Q 式(4) (cm^3/s)
0.75	18.9
1.00	29.2
1.25	40.8
1.50	53.6
1.75	67.5



(a) 三角堰の例 (式 (3))



(b) 四角堰の例 (式 (4))

図-1.9 $H-Q$ 関係（表-1.3 の①列= H 、②列= Q をプロットし、表-1.4 の H と Q をカーブで描く）

2. 理論導出

2. 1 オリフィスの公式

(a) 小型オリフィスの公式

オリフィス上流側の水面に A 点をとり、オリフィス出口の最も縮流した部分「ベナコントラクタ」に B 点をとり、この 2 点間でベルヌーイの定理を適用する。

図-2.1 のように、水面における流速、圧力の強さ、および基準面からの高さを、A 点でそれぞれ v_A, p_A, z_A および、B 点 v_B, p_B, z_B とすると、

$$\frac{v_A}{2g} + \frac{p_A}{w} + z_A = \frac{v_B}{2g} + \frac{p_B}{w} + z_B$$

である。ここで、圧力は、A 点、B 点ともに大気圧

に等しく、 $p_A=p_B=0$ となる。さらに $(z_A - z_B)$ は両点の高低差 H であるから、 $\frac{v_B^2}{2g} = \frac{v_A^2}{2g} + H$ であり、
 $v_B = \sqrt{2g(H + v_A^2/2g)}$ となる。

上の式において、 v_A を接近流速、 $v_A^2/2g + H$ を有効水頭という。上流側の断面積がオリフィスの断面積に比べてきわめて大きい場合、流れが極めて遅くなるので $v_A \approx 0$ と考えられる。この場合は $v_B = \sqrt{2gH}$ である。実際には出口でのエネルギー損失の為に流速は理論的な流速より小さい値になる。

つまり水槽と出口の間でのエネルギー損失水頭を $fe(v_B^2/2g)$ とするとベルヌーイの定理から

$$\frac{v_A^2}{2g} + H = \frac{v_B^2}{2g} + fe \frac{v_B^2}{2g} \quad \text{よって,} \quad v_B = \frac{1}{\sqrt{1+fe}} \sqrt{2g(H + \frac{v_A^2}{2g})}$$

より $v_B = C_v \sqrt{2g(H + h_A)}$

である。ただし $h_A = v_A^2/2g$ ， $C_v = 1/\sqrt{1+fe}$ と置いてある。ここで接近流速 v_A を無視すれば
 $v_B = C_v \sqrt{2gH}$

である。ここに C_v は実際の流速の理論流速に対する比で流速係数といい、オリフィスの断面積を A 、ベナコントラクタの断面積を a_0 とすると各断面積の比つまり断面補正係数（あるいは縮流係数） C_A は

$$C_A = a_0/A$$

となる。オリフィスから流出する実際の流量はベナコントラクタでの流速 v_B に断面積 a_0 を乗じて $Q = v_B \cdot a_0$ と求まる。つまり、

$$Q = C_v C_A \cdot A \sqrt{2g(H + h_A)} = C \cdot A \sqrt{2g(H + h_A)}$$

である。ここに $C = C_v \cdot C_A$ であり接近流速を無視できる場は次式となる。

$$Q = C \cdot A \sqrt{2gH} \quad (1)$$

C は実際の流量と理論流量との比で流量係数といい、値は 0.6~0.65 程度である。

図-2.1 小型オリフィスの概念図

2. 2 堰の流量公式

堰を越流する際には堰頂部のある部分において支配断面つまり限界水深が発生する。堰の多くは流れに直角に設けられて、堰板の内面から約 2mm の間をせき板に直角な平面として、それより外側に向かって約 45° の傾斜をつける。これが刃形堰と言い、形によって四角堰、三角堰など形状も様々である。

(a) 三角堰の公式

堰の切り口の形が三角形になった刃形堰を三角堰といい、比較的流量が少ない場合に越流水深を大きくして流量を測るときに使う。三角堰の流量は接近流速を無視するとベルヌーイの式から流速は $v = C\sqrt{2gz}$ と

して求められ、 C は補正係数である。任意の越流幅 b は $b=2(H-z)\tan\theta$ の関係があり、図-2.3 の斜線部の微小面積を通過する流量 dQ は流量係数 C を一定として、堰を越流する水深を H とすると

$$\begin{aligned} dQ &= C \cdot v \cdot b \cdot dz \\ &= C \cdot v \cdot (H - z) \cdot \tan(\theta/2) \cdot dz \\ &= C \cdot (H - z) \cdot \tan(\theta/2) \cdot \sqrt{2gz} dz \end{aligned}$$

となる。よって、 z を 0 から H まで積分すれば全流量 Q となる。

$$\begin{aligned} Q &= C \sqrt{2g} \tan(\theta/2) \int_0^h (H - z) \sqrt{z} dz \\ &= \frac{8}{15} C \sqrt{2g} \tan(\theta/2) H^{5/2} \end{aligned}$$

と任意の三角堰 θ での流量公式が得られた。これが、本実験で用いる公式である。

特に直角三角堰の場合、 $\theta = 90^\circ$ であるから $\tan(\theta/2) = 1$ より

$$Q = \frac{8}{15} C \sqrt{2g} H^{5/2}$$

となる。なお定数 $\frac{8}{15} C$ を K と置き、 K については以下の黒川・淵沢の実験式がある。

$$Q = K \cdot H^{5/2}$$

$$K = 1.353 + \frac{0.004}{H} + (0.14 + \frac{0.2}{\sqrt{H_b}}) \left(\frac{H}{B} - 0.09 \right)^2 \quad (\text{ただし単位は, m, sec})$$

$$\text{適用範囲 } 0.5m \leq b \leq 1.2m, 0.1m \leq H_b \leq 0.75m, 0.07m \leq H \leq 0.26m \quad (H \leq \frac{B}{3})$$

K も水深により若干変化するが、ともかく H から流量 Q を求めることが出来る。

本実験では、適用範囲外であるので、この実験式は用いず、 C がいくらに成るのかを求める。

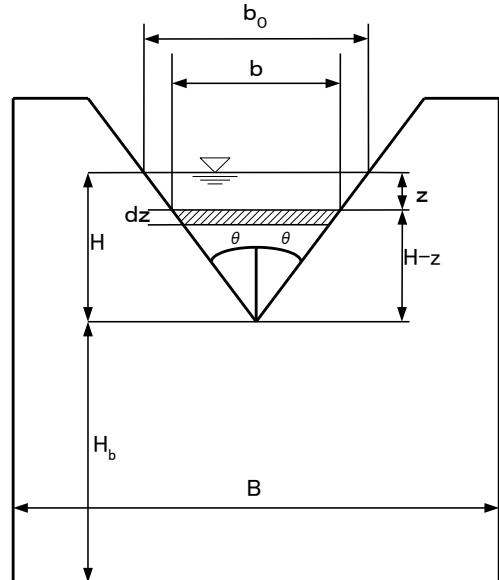


図-2.3 三角堰の概念図

(b) 四角堰の公式

水路幅 B の水路に越流高 z_b , 越流幅 B , 越流水深 H で越流しているものとする。三角堰と同様、また、矩形の大型オリフィスと同様に導くと、図-2.4 の斜線部の微小面積は Bdz である。堰上流側の接近水頭（速度水頭）を無視できるものとすると、ここを流出する流速は、ベルヌイの定理（トリシェリの定理）に従い、流速は $v = C\sqrt{2gz}$ と表される。 C は補正係数である。よって、この微小面積を通過する流量 dQ は、

$$\begin{aligned} dQ &= C \cdot v \cdot B \cdot dz \\ &= C \cdot B \sqrt{2gz} dz \end{aligned}$$

と表され、

$$\begin{aligned} Q &= C \cdot B \sqrt{2g} \int_0^H \sqrt{z} dz \\ &= C \cdot \frac{2}{3} \sqrt{2g} B \cdot H^{3/2} \end{aligned}$$

と表すことが出来る。これが、本実験で用いる公式である。

流量係数 K を用いると、

$$Q = KBH^{\frac{3}{2}}$$

となる。なお流量係数 K は J I S に用いられている式（板谷・手島の式）によれば、

$$K = 1.785 + \frac{0.00295}{H} + 0.237 \frac{H}{H_b} - 0.428 \sqrt{\frac{(b-B)H}{bz_b}} + 0.034 \sqrt{\frac{b}{z_b}}$$

(適用範囲) $0.5m \leq b \leq 6.3m$ 、 $0.15m \leq B \leq 5m$ 、 $0.15m \leq H_b \leq 3.5m$

$$\frac{BH_b}{b^2} \geq 0.06, 0.03m \leq H \leq 0.45\sqrt{B}$$

のように、流量係数は、若干水位の関数となる。本実験では、適用範囲外なので、用いない。

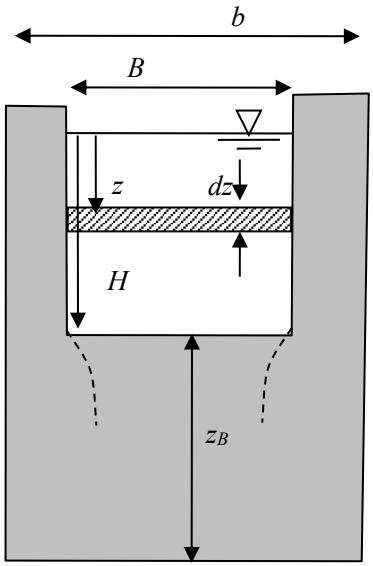


図-2.2 四角堰の概念図