３．跳水　（開水路）

１． 理論式と実験手順

１．１　開水路における跳水の問題

河川や水路のデザインには，開水路水理学の知識が必要である．雨が降るなどして，ある流量が発生して，開水路に流れ込む場合，水位がどこまで上がるのか，というのはデザインの上で基礎的な問題となる．それは単純な水路の設計だけではなく，多様な自然を配置しながら河道を設計する場合も，水深の推定が必要であることには変わりはない．また植物の配置によっても，抵抗によって水深は変わる．

跳水とは，その上流で急勾配によって生じた，高エネルギーを持つジェット的な浅く早い流れを，深く緩い流れにするとともに，エネルギーを効率よく失わせる．これによって流れを緩くすることで，下流の河床洗掘や護岸等構造物の破壊を抑制することができる．このとき，下流の水深がいくらになるのか知る必要がある．よって，理論に基づいて，上流水位と下流水位の関係を知ることが重要である．

本実験では，以下の３つについて，計算・確認を行う．

⑴ 限界水深の計算と流れの分類

水面形を考える際の基礎量として，「限界水深」がある．これより実際の水深が浅いか深いかによってある，２つの流れの状態を分類する．水深が浅くジェット的な「射流」と深く緩やかな「常流」と分ける．こうした流れの状態をいくつかの点から確認する．

⑵ 跳水の理論の確認

図-1.1 の下流区間の様に，浅い「射流」から，深い「常流」に変化する現象を「跳水」という．その上下流の水深を計測し，跳水理論と比較する．

水路全体の水面形については，実験４で計測を行う．

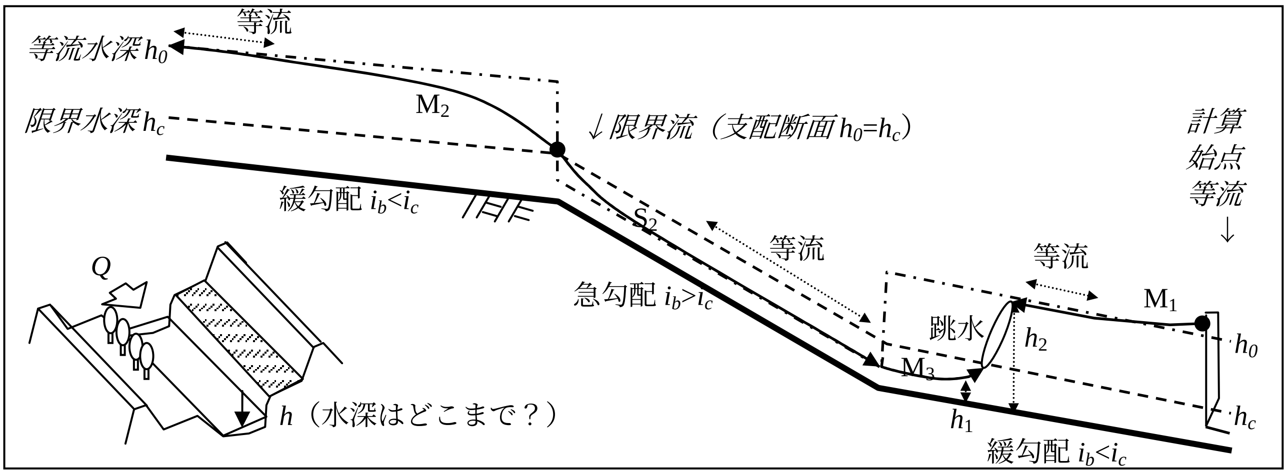


図-1.1　水路の水面形変化の例

１．２　実験装置の概要と計測方法

図-1.2 に示しているように，上流側のバルブで流量調整し，出口で流量計測する．跳水は 1 段目において計測し，水位の制御は 1 段目下流のゲートを上げ下げして行う．

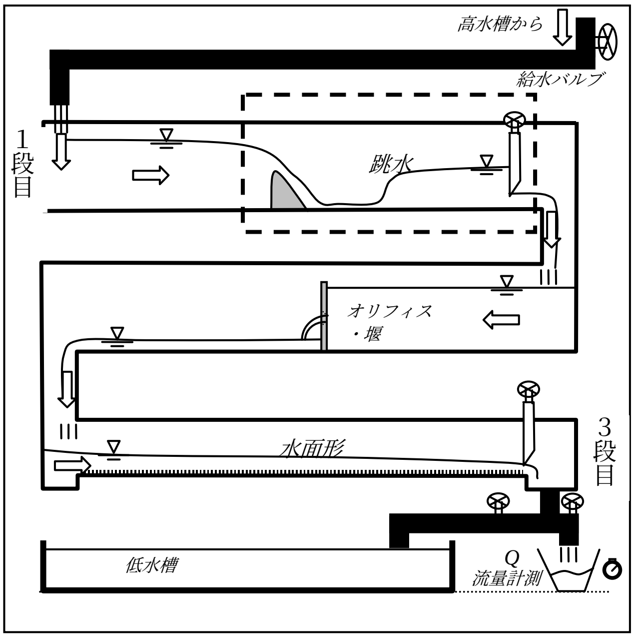


図-1.2　実験装置の概要

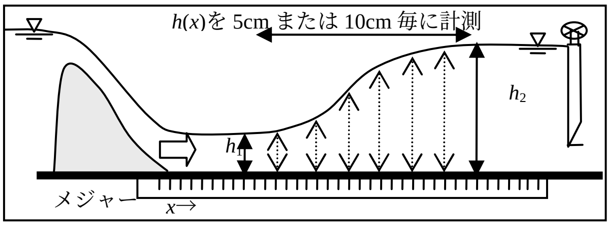


図-1.3　跳水計測部（1 段目）

表-1.1　跳水水面形データ（例）

Q(m³/s)=502				Q(m³/s)=293			
q(cm²/s)=50.2				q(cm²/s)=29.3			
hc(cm)=1.37				hc(cm)=0.958			
ケース1-1		ケース1-2		ケース2-1		ケース2-2	
h_1(cm)=	0.4	h_1(cm)=		h_1(cm)=		h_1(cm)=	
h_2(cm)=	3.2	h_2(cm)=		h_2(cm)=		h_2(cm)=	
x(cm)	h(cm)	x(cm)	h(cm)	x(cm)	h(cm)	x(cm)	h(cm)
0	0.4						
10	0.4						
20	h_1 $\boxed{0.4}$						
30	0.5						
40	1.3						
45	1.6						
50	1.9						
55	2.2						
60	2.5						
70	3.0						
80	h_2 $\boxed{3.2}$						
90	3.3						
100	3.3						

（１）諸元の把握と計測: 計測を始める前に，変化しない量（諸元）を把握しておく必要がある．

質問：それは何か？　答え：水路の______________________

（２）各変量の計測:　ある流量における計測は，以下を行う．流量はこれまで通り 3 回計測する．

(a)流量 Q の計測：　流量 Q は 3 回づつ計測する．流量は直接測れないので，水路下端でバケツで捉える体積 V をその時間 t で割って流量 Q とする．電子天秤で重量を計り，1g=1cm^3 として体積に変換する．これを 3 回繰り返し (Q_1～Q_3)，平均してそのバルブ開度の Q とする．単位は cm^3/s でよい．さらにこの時点で，単位幅流量 $q=Q/B$(cm^2/s)を計算し，これをデータ整理の基礎量として扱うこと．

(b)限界水深 h_c の計算：　式（１）から，q を使って限界水深 h_c(cm)を計算する．

(c)下流ゲート操作による水面形の設定:　下流端ゲートを絞ることでせきあげ, 跳水を発生させる．このゲートの絞り方，つまり下流側水深を 2 通り変化させて，それぞれ以下の計測を行う．

(d)各ケースについて，跳水部分の水面形を記録する．（5cm～10cm の間隔で位置を変えながら，水深 h を記録する．例：表-1.1，図-1.4 参照）

(e)跳水の共役水深（h_1，h_2）の計測と現象の観察：　流量が一定でもこの絞り方で, 跳水の位置と，水深関係が変化する．　跳水の上流水深 h_1 と下流水深 h_2 を記録する（表-1.1□で囲った部分)．また，上下流で水面に触れ，上流へ波が伝わるか確認する．

上流バルブを操作して流量を変化させ，<u>上記の計測を繰り返す</u>．流量が 2 通り，それぞれの流量での水面形が 2 通り，合計 4 通りの水位を計測する．　***→データシートを考えよ．***

１．３　理論式と，実験後の整理方法・考察内容

（１）限界水深 h_c

限界水深 h_c は，ある断面形（この実験では，矩形）の水路に，ある流量で流した場合に，「射流」と「常流」の間の限界を決める水深である．（表-1.3 参照）　実験の矩形断面では，式（１）で表される．

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad (1)$$

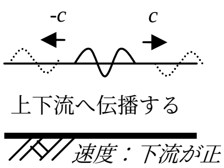
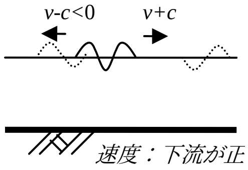
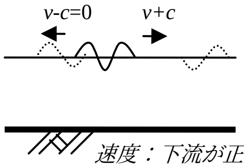
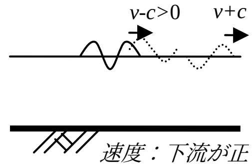
（矩形断面における限界水深の式）

限界水深 h_c は単位幅流量 q だけで決まる．実験では，この式から各（単位幅）流量に対する限界水深 h_c を計算して求める．（2 ページ表-1.1，および 4 ページ表-1.4 に整理の例）　*（ここではまだ，確認事項はない．）*

＜解説＞

ある流量に対し，ある場所の水深がこの限界水深より深く，流れが緩やかだと「常流」，逆に浅く速い流れだと「射流」となる．常流では，下流の水位変化や波が上流に伝わるが，射流では伝わらない．擾乱で発生した波は上流と下流に伝わるが，流速がその伝播速度（$c = \sqrt{gh}$）を超えると伝わらなくなるからである．この分類を，表-1.3 で認識しておこう．その場所の流速 v と伝播速度 $c = \sqrt{gh}$ の比を Froude 数と呼び，これが 1 を超えると射流，下回ると常流となる．

表-1.3　流れの分類（常流と射流）　（太枠部は，レポートの「理論」の部分で必要）

流れの状態	常流	限界流	射流
水深 h	$h > h_c$	$h = h_c$	$h < h_c$
フルード数 $Fr = \frac{q}{\sqrt{gh^3}} = \frac{v}{\sqrt{gh}}$	$Fr < 1$	$Fr = 1$	$Fr > 1$
擾乱伝播速度 $c = \sqrt{gh}$ と流速との関係	$c = \sqrt{gh} > v$ （流速の方が小さい）	$c = \sqrt{gh} = v$ （流速と同じ）	$c = \sqrt{gh} < v$ （流速の方が大きい）
擾乱の伝播  -c　c 上下流へ伝播する 速度：下流が正 静水中	 v-c<0　v+c 速度：下流が正 上流へも下流へも伝わる	 v-c=0　v+c 速度：下流が正 上流へ伝わろうとする波がその場にとどまる．	 v-c>0　v+c 速度：下流が正 下流へのみ伝わる．

（２）跳水の理論流れの分類

図-1.6 のように上流水深 h_1 から跳水する場合下流水深 h_2 は限界水深より深くなる．この２つの水深の関係を互いに「共役水深」という．（h_2 は h_1 の共役水深）運動量保存則（６ページ参照）から，次式のようになる．

$$\frac{h_2}{h_1}=\frac{-1+\sqrt{1+8Fr_1^2}}{2} \qquad (2)$$

$$Fr_1=\frac{q}{\sqrt{gh_1^3}}=\frac{v_1}{\sqrt{gh_1}} \qquad (3)$$

$$Fr_2=\frac{q}{\sqrt{gh_2^3}}=\frac{v_2}{\sqrt{gh_2}} \qquad (4)$$

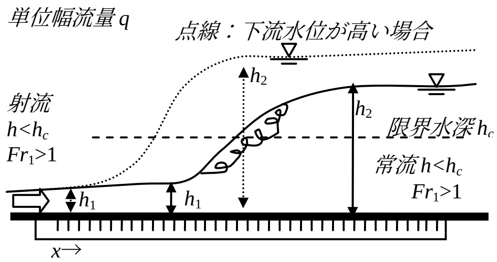


図-1.6　跳水

ここに

q：単位幅流量（cm^2/sec），$q=Q/B$，Q：流量（cm^3/sec），B：水路幅（cm），$A=Bh$：断面積（cm^2）
v_1：上流側の平均流速（cm/sec），$v_1=q/h_1=Q/A_1$，　　$A_1=Bh_1$：上流側断面積（cm^2）
v_2：下流側の平均流速（cm/sec），$v_2=q/h_2=Q/A_2$，　　$A_2=Bh_2$：下流側断面積（cm^2）
h_1：上流側水深(cm)　（流れは射流，$h_1<h_c$，限界水深より浅い）
h_2：下流側水深(cm)　（流れは常流，$h_2>h_c$，限界水深より深い）
Fr_1：上流側のフルード数(Froude 数)（無次元，跳水の上流側では「射流」で，１より大きい．$Fr_1>1$）
Fr_2：下流側のフルード数(Froude 数)（無次元，跳水の下流側では「常流」で，１より小さい．$Fr_2<1$）
g：重力加速度（980cm/sec^2）

跳水の上下流では，流れが異なり，上流側では「射流」が現れ，下流側では「常流」が現れる．

ここでの確認事項は，以下のとおり．

①跳水の上流側で「射流」，下流側で「常流」であることを，以下の３点で確認する．

まず，限界水深 h_c を式（１）で計算しておく．

（１）上流側水深 h_1 は限界水深 h_c より浅く，下流側水深 h_2 は限界水深 h_c より深いか？

（２）上流側フルード数 Fr_1 は１より大きく，下流側 Fr_2 は１より小さいか？

（３）実験中に，擾乱を与えて上流側に伝播するかを確認．（上流の「射流」では伝播しない．）

HOWto①→（１）（２）は，表-1.4 の様にデータ整理表の上で確認する．（２）については，式（３）（h_1 と q→Fr_1），および式（４）（h_2 と q→Fr_2）からフルード数を求める．（３）については，実験中に現象を２，３度確認した結果を記述する．

表-1.4　データ整理の例（h_1 と h_2 の関係のみ）

q(cm^2/s)=	50.2	hc(cm)=	1.37	(流量1回目)	
実験値 h_1(cm)	実験値 h_2(cm)	Fr_1	Fr_2	h_2/h_1 実験値	h_2/h_1 理論値※1
0.4	3.2	6.339	0.280	8.00	8.48
0.7	2.2	2.738	0.491	3.14	3.40
q(cm^2/s)=	29.3	hc(cm)=	0.957	(流量2回目)	
実験値 h_1(cm)	実験値 h_2(cm)	Fr_1	Fr_2	h_2/h_1 実験値	h_2/h_1 理論値※1
0.4	2.2	6.479	0.411	6.29	8.68
0.6	1.6	2.887	0.663	2.67	3.61

※1：実験値のh_1とFr_1を用い，式(2)で計算する．
※2：Fr_1,Fr_2はqとh_1，h_2から式(3)(4)で計算する．

②表-1.1 の跳水の水面形のデータをグラフにする．跳水長さは，下流側水深の 6 倍程度といわれている．そうなっているかどうか確認せよ．

HOWto②→跳水の水面形（表-1.1 データ，最大・最小流量で各１ケース）をグラフにする．限界水深線 h_c を図-1.7 にならって記入すること．跳水部分の長さ（跳水長）を読み取り，h_2 の何倍になるか計算し，上記を確認する．

表-1.1　跳水水面形データ（再掲）

$Q(m^3/s)=502$				$Q(m^3/s)=293$			
$q(cm^2/s)=50.2$				$q(cm^2/s)=29.3$			
hc(cm)=1.37				hc(cm)=0.958			
ケース1-1		ケース1-2		ケース2-1		ケース2-2	
h_1(cm)=	0.4	h_1(cm)=		h_1(cm)=		h_1(cm)=	
h_2(cm)=	3.2	h_2(cm)=		h_2(cm)=		h_2(cm)=	
x(cm)	h(cm)	x(cm)	h(cm)	x(cm)	h(cm)	x(cm)	h(cm)
0	0.4						
10	0.4						
20	0.4						
30	0.5						
40	1.3						
45	1.6						
50	1.9						
55	2.2						
60	2.5						
70	3.0						
80	3.2						
90	3.3						
100	3.3						

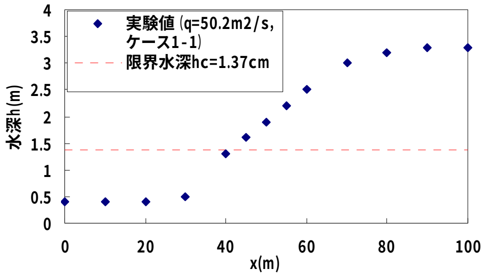


図-1.7　跳水の水面形（ケース 1-1 の場合）
(ケース 1-2 も同図に載せて良い，
ケース 1-1,1-2 を一つに，2-1,2-2 を一つに．）

③流量も変えたケースも含め，h_2 と h_1 の関係は理論どおりか確認する．実験値から得られる h_2/h_1（縦軸）と，式（２）の h_2/h_1 の理論値（横軸）が一致するか確認する．

HOWto③→表-1.3 のように，実験値の h_2/h_1 と計算し，また， h_1 と Fr_1 から式（２）によって h_2/h_1 の理論値を計算しておき，前者を縦軸，後者を横軸にプロットする（図-1.8）．これが 45 度の線（縦軸＝横軸の線）に載るかどうかによって，一致するかを考察する．

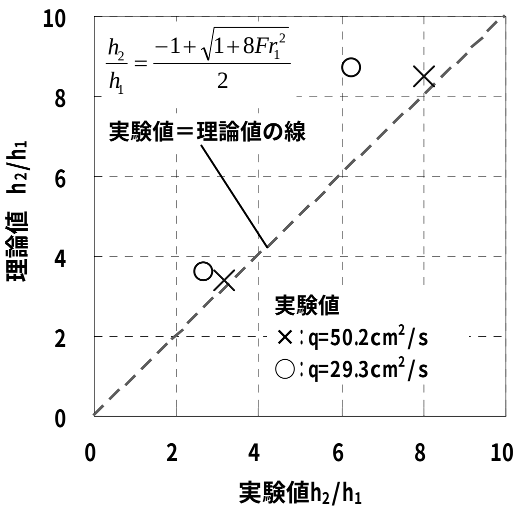


図-1.8　跳水前後水深比 h_2/h_1 の実験と理論の比較

2. 理論（跳水の理論）

射流から常流へ流れの遷移する状況を**跳水**（**hydraulic jump**）と呼ぶ．水路床が水平で，底面摩擦を無視すると，跳水前後の水深は共役水深の関係にある．ここでは，運動量保存則から式(2)を誘導する．

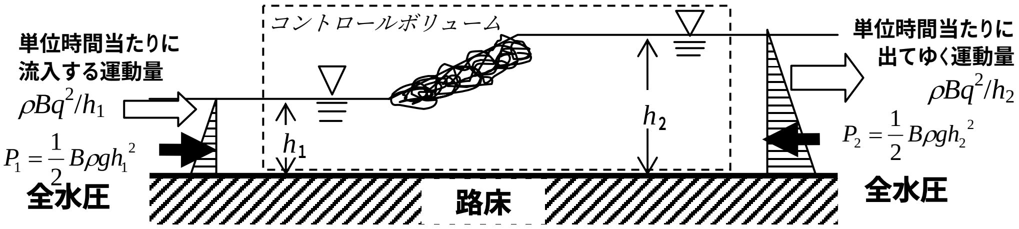


図-2.1　跳水（右が正）

ここでの運動量保存則は，右向き方向を正に考えると，この区間の体積（コントロールボリューム，図中の点線枠）について，
$\boxed{1}$単位時間当たりに[出てゆく運動量（右向き正）ー入ってくる運動量（右向き正）]
は,
$\boxed{2}$この区間（コントロールボリューム）に作用している力（右向き正）
に等しい事を保障する．

諸量を以下に定義する．

ρ：水の密度（1000kg/m^3 または 0.001kg/cm^3）（体積当りの質量）

q：単位幅流量（m^2/sec または cm^2/sec)，矩形断面水路では，$q=Q/B$,

Q：流量(m^3/sec または cm^3/sec)，B は水路幅(m または cm)

A：流水の断面積(m^2 または cm^2)，矩形断面では $A=Bh$,

まず，単位時間に断面を通過する運動量について考える．

$Q=Bq$ であることから，単位時間に断面を通過する質量は，$\rho Q=\rho Bq$ である．それが持っている右向きの速度は $v=Q/A=Q/Bh=q/h$ である．運動量は質量 x 速度であるから，単位時間に断面を通過する運動量はこれらをかけたものとなる．つまり，$\rho\ Q^2/A=\rho Bq^2/h$ である．これを入口側と出口側で考える．出てゆく運動量は右側断面で$\rho Bq^2/h_2$ となり，入ってくる運動量は左側断面で$\rho Bq^2/h_1$ であるから，上記の$\boxed{1}$は$\rho Bq^2/h_1$-$\rho Bq^2/h_2$ となる．

次に$\boxed{2}$について考えると，作用する力は，区間左側からかかる全水圧 P_1 が正の方向（右）に作用し，区間右側から全水圧 P_1 が，負の方向（左）に作用する．

各全水圧は $P_1=\frac{1}{2}B\rho g h_1^2$，$P_2=\frac{1}{2}B\rho g h_2^2$ であり，これらの差 $P_1-P_2=\frac{1}{2}B\rho g h_1^2-\frac{1}{2}B\rho g h_2^2$ が作用する力となる．

よって，$\boxed{1}=\boxed{2}$より，

$\rho Bq^2/h_1-\rho Bq^2/h_2=B\rho g h_1^2/2-B\rho g h_2^2/2$　　となり，$\rho Bq^2 g/2$ で割ると，

$2q^2/g(1/h_1-1/h_2)=h_1^2/2-h_2^2/2$　　となる．これを整理すると，

$$(h_1-h_2)\left\{\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2+\frac{h_2}{h_1}-2\frac{q^2}{gh_1^3}\right\}=0$$

となる．よって，$h_1=h_2$ 以外の解として，

$$\frac{h_2}{h_1}=\frac{-1+\sqrt{1+8Fr_1^2}}{2}$$

（式(2)）が得られる．ここに，$Fr_1^2=\frac{q^2}{gh_1^3}$ である．　　以上