

水面形計算演習（開水路）

1. 理論式と計算手順

1.1 開水路（跳水と水面形）の問題

河川や水路のデザインには、開水路水理学の知識が必要である。

雨が降るなどして、ある流量が発生して、開水路に流れ込む場合、水位がどこまで上がるのか、というのはデザインの上で基礎的な問題となる。それは単純な水路の設計だけではなく、多様な自然を配置しながら河道を設計する場合も、水深の推定が必要であることには変わりはない。また植物の配置によっても、抵抗によって水深は変わってくる。

今回の計算（演習）では、以下の2つについて、計算・確認を行う。

(1) 水面形がどこから決まってくるのかを学習する

(2) 水面形方程式を用いた水面形の計算

実験では、緩勾配の水面形、 M_1 と M_2 の計測を行った。このカーブを、水面形方程式を用いて計算し再現できるかどうかを確認し、考察する。

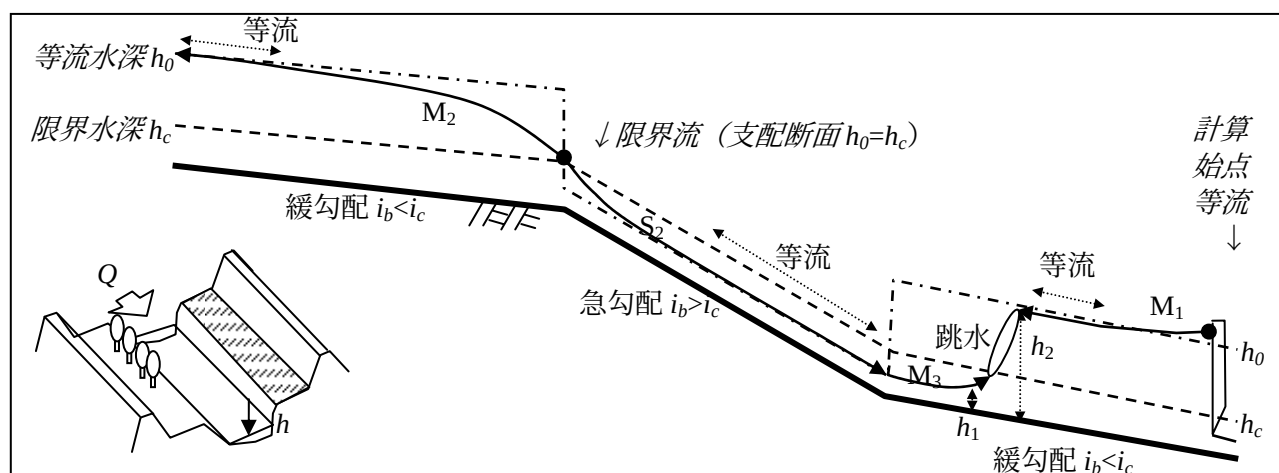


図-1 水路の水面形変化の例

1.2 水面形方程式と計算の手順

1.2.1 理論

水面形方程式は、エネルギー保存則または運動量保存則から求めることができるが、本授業ではその導出は講義しない。よってこの方程式からいかに計算するかについて、説明する。

水面形方程式は、広矩形断面（幅広の長方形）では次式で表せる。

水面形方程式は、水深の勾配 dh/dx を水深 h の関数で書いている。

水面形方程式（参考）：

$$\frac{dh}{dx} = i_b \frac{1 - (h_0/h)^{10/3}}{1 - (h_c/h)^3} \quad (\text{Manning 則}) \quad (1)$$

ただし、式中の変数は以下の通り与える。

路床勾配： i_b

$$\text{限界水深：} \quad h_c = 3 \sqrt{\frac{q^2}{g}} \quad (2)$$

$$\text{等流水深：} \quad h_0 = \left(\frac{n^2 q^2}{i_b} \right)^{3/10} \quad (3)$$

（Manning 則の時、粗度係数 n 与える）数値がわかっているときは直接与える。

この式は、ある場所での水面の傾き（勾配 dh/dx ）は、その水深 h の関数で表せる、ということを示している。上流、あるいは下流で水深がわかっている場所があれば、そこから、その場所その場所の勾配を順に上下流につないでいけば、カーブが描ける。

（ここは数値計算の解説。図を理解してください。）

ここでは式が h の関数なので、次式のように逆数（分母分子を逆）にする方が計算しやすい。 x が h の関数であると思ふこととして、水深勾配の逆数

$$\frac{dx}{dh} = f(h) = \frac{1}{i_b} \frac{1 - (h_c/h)^3}{1 - (h_0/h)^{10/3}} \quad (\text{Manning 則}) \quad (2)$$

を既知の計算開始点（ x_b, h_b ）から積分するのが、古典的な水面形の計算法である。

この式を解析的（数学的に積分するのは難しく、 x を h の関数で明示できないので、少しずつ水深を変化させながら x を計算してゆくという、逐次計算を行うことがある。

たとえば、下図のように、M2 カーブを下流から計算する場合、計算開始点付近の勾配が分かれば、少し高い水位（上流側）での位置が計算できる。さらに、計算が進んで、ある水深 h_i での位置が x_i であったなら、そこから Δh だけ高い水深 $h_{i+1} = h_i + \Delta h$ に対応する位置 x_{i+1} が計算できる。

この「次の水深 $h_{i+1} = h_i + \Delta h$ となる位置 x_{i+1} 」を求めるには、式(3-2)をわずかに Δh だけ、つまり h_i から h_{i+1} までを積分すればよい。

$$x_{i+1} = x_i + \int_{h_i}^{h_{i+1}} \frac{dx}{dh} dh = x_i + \int_{h_i}^{h_{i+1}} f(h) dh \quad (4-1)$$

また、その積分を近似する式として Simpson の 1/3 則がある。これが(4-2)の式である。

$$x_{i+1} \cong x_i + \frac{\Delta h}{6} \{f(h_i) + 4f(h_{i+1/2}) + f(h_{i+1})\} \quad (4-2)$$

関数 $f()$ は式(3-2)に対応する。その中の各水深は、

$$h_i (=h_b + i\Delta h), \quad h_{i+1/2} = h_i + \Delta h/2, \quad h_{i+1} = h_i + \Delta h \quad (=h_b + (i+1)\Delta h) \quad \text{をあらわす。}$$

よって、 Δh を決めて、ある (h_i, x_i) から h_{i+1} に対応する位置 x_{i+1} を求めるには、式(3-2) に $h_i, h_{i+1/2}, h_{i+1}$ をそれぞれ式(4-2) に代入して得られる。これを繰り返すことで、水面形（水深分布）が得られる。

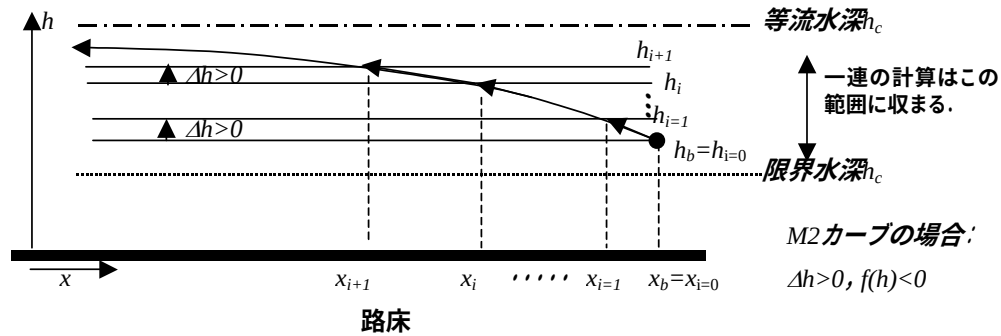


図-2

1.2.2 計算手順

この一連の手続きは、データシートを作り計算できる。ここでは、簡単に計算するために、ホームページから、エクセルファイルをダウンロードし、計算してみることとする。

<http://godos2.daido-it.ac.jp/kpage/sumi/exp/exp.htm>

重要なのは、計算開始点を知っておくことである。講義したように、常流では上流に波が伝播するから、下流から水面形が決まる。よって、下流端の水位を知ることが出来なければ、計算できない。

(射流の場合は逆である。) 表-1 の、矢印の方向に水面形が決まる。

表-1 水面形の分類と、水面形が決まる方向（矢印）

勾配の名称	緩勾配	限界勾配	急勾配
限界水深・等流水深の関係	$h_0 > h_c$	$h_0 = h_c$	$h_0 < h_c$
図 h_0 と h_c の関係と水面形の分類 (各水路勾配で、3つのうちのどれかの水面形が現れる)			
勾配の関係	$i_b < i_c$	$i_b = i_c \equiv \frac{g^{10/9} n^2}{q^{2/9}}$	$i_b > i_c$

常流と、射流の判定は、等流水深 h_0 と限界水深 h_c で（自動的に）判定できる。（図-3 参照）
 よって、入力情報は、

単位幅流量, Manning の粗度係数, 水路勾配, 計算開始点の x 方向位置 x_b とそこでの水深 h_b ,
 があればよい. そのほかに, どの位置まで計算するのか x_{end} , 計算開始点での水路の高さ z_b ,
 を与える. 本エクセルシートでは, 瞬時に水面形が計算でき, グラフにも現れる.

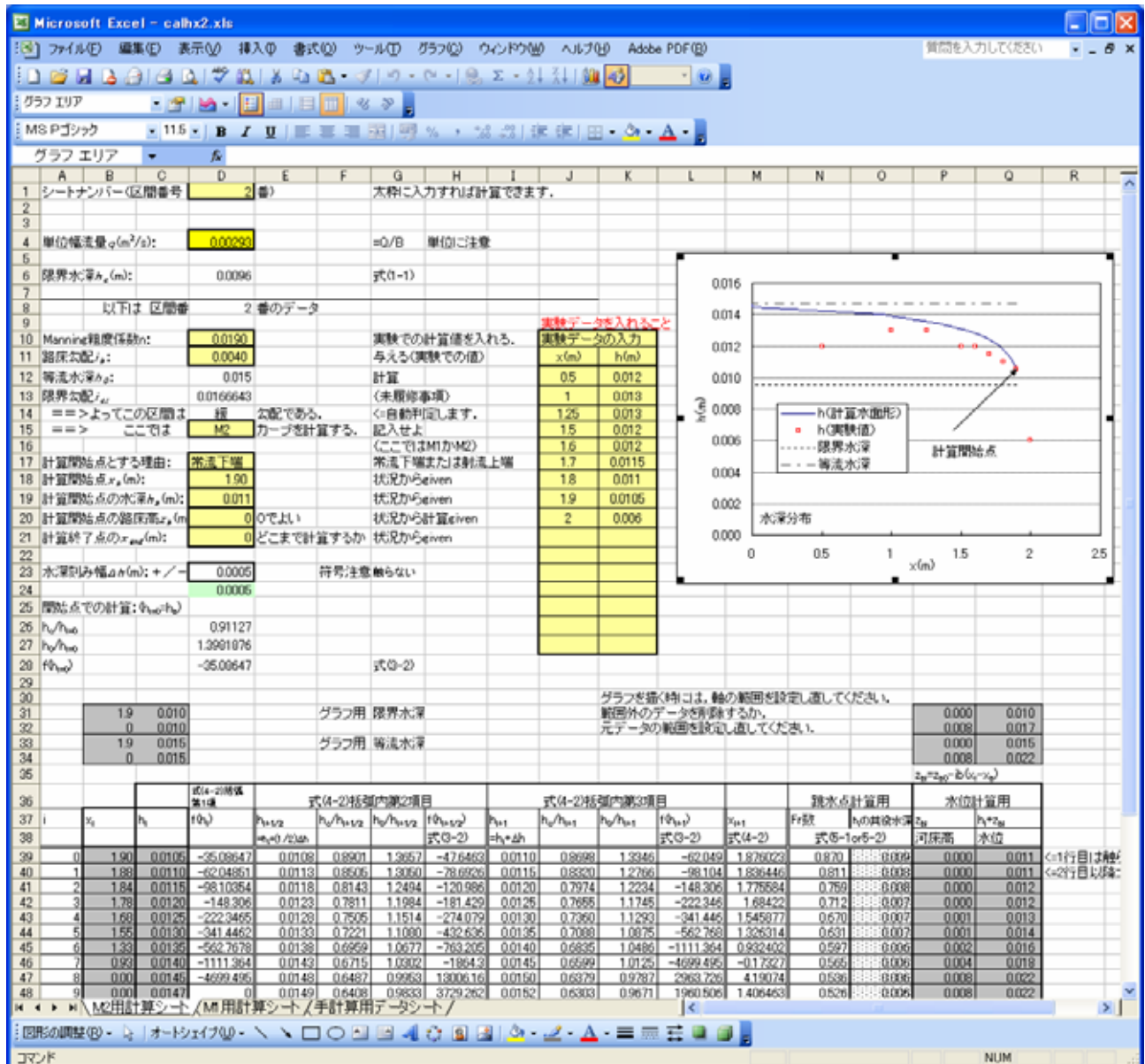


図-3 路床勾配（3 段目）の計測方法

レポート課題：

諸君の前回実験のデータのうち、M1 カーブおよび M2 カーブのデータについて、2 通り計算し、上記のようなグラフを添付して、提出せよ。計算開始点もわかるようにしておくこと。表紙不要。

提出期限：7/27（期末試験時，持参のこと） 無論次回発表会でもよい。
る。