４．跳水・水面形　（開水路）

1.　理論式と実験手順

1．1　開水路（跳水と水面形）の問題

河川や水路のデザインには，開水路水理学の知識が必要である．

雨が降るなどして，ある流量が発生して，開水路に流れ込む場合，水位がどこまで上がるのか，というのはデザインの上で基礎的な問題となる．それは単純な水路の設計だけではなく，多様な自然を配置しながら河道を設計する場合も，水深の推定が必要であることには変わりはない．また植物の配置によっても，抵抗によって水深は変わってくる．

本実験では，以下の３つについて，計算・確認を行う．

(1) 限界水深の計算と流れの分類

水面形を考える際の基礎量として，「限界水深」がある．これより実際の水深が浅いか深いかによってある，２つの流れの状態を分類する．水深が浅くジェット的な「射流」と深く緩やかな「常流」と分ける．こうした流れの状態をいくつかの点から確認する．

(2) 跳水の理論の確認

図-1.1 の下流区間の様に，浅い「射流」から，深い「常流」に変化する現象を「跳水」という．その上下流の水深を計測し，跳水理論と比較する．

(3) 水面形の計測と，分類の確認

自然に流れが近づこうとする水深＝「等流水深」を計測する．これは日常的に必要な量である．そして水路上を徐々に水位が変化してゆく様子，水深分布＝「水面形」を計測し，「等流水深」「限界水深」を用いて水面形の分類を判定する．

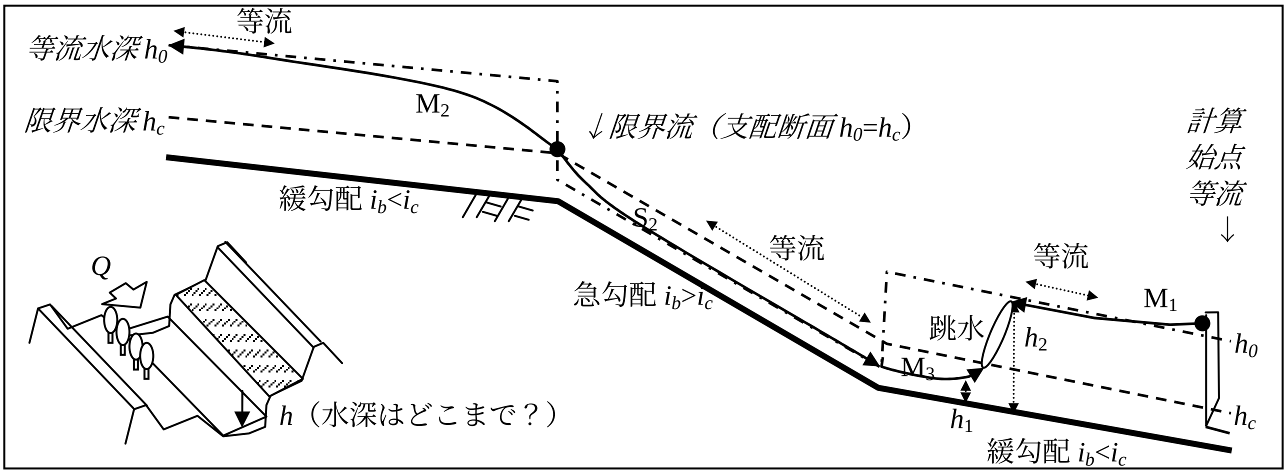


図-1.1　水路の水面形変化の例

１．２　実験装置の概要と計測方法

１．２．１　実験装置の概要

図-1.2 に示しているように，上流下流側のバルブで流量調整し，出口で流量計測する．跳水は 1 段目において計測し，水面形は 3 段目で計測する．

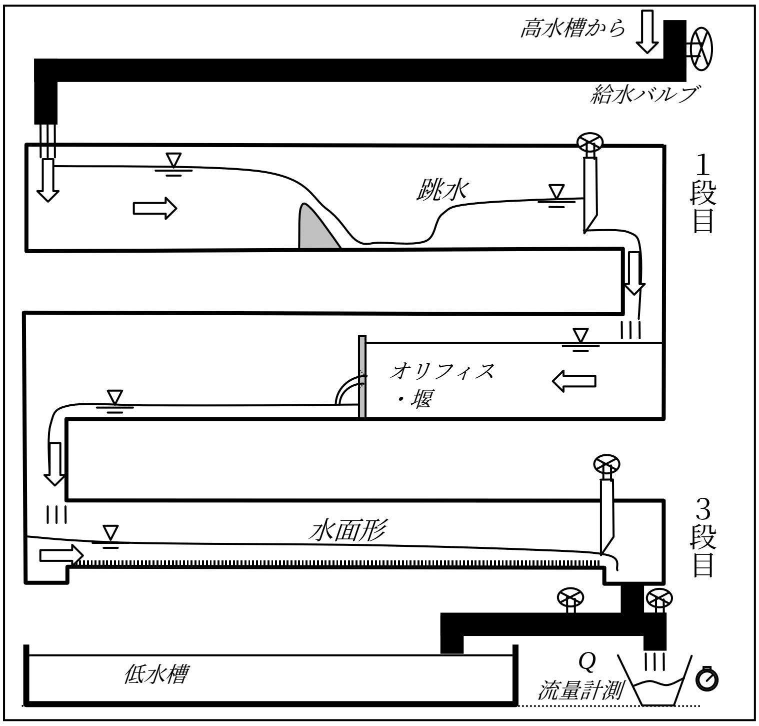


図-1.2　実験装置の概要

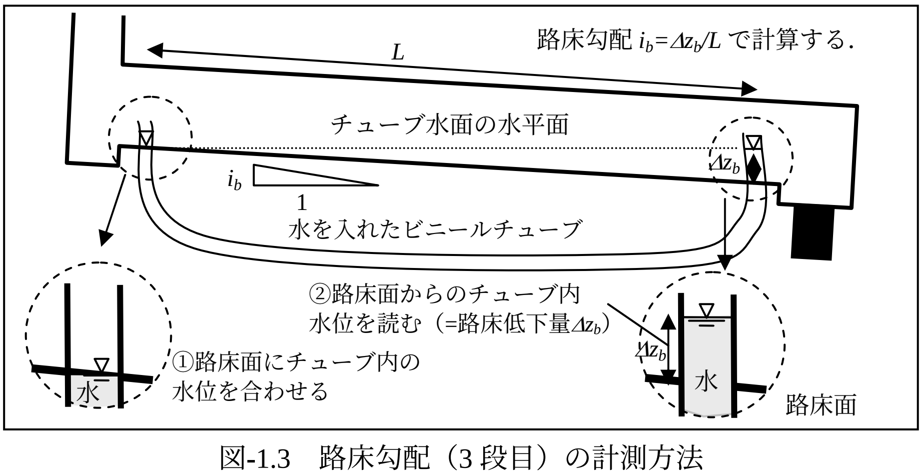


図-1.3　路床勾配（3 段目）の計測方法

１．２．２　計測手順と記録内容

（1）諸元の把握と計測

計測を始める前に，変化しない量（諸元）を把握しておく必要がある．

質問：それは何か？　答え：水路の＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

3 段目水路の＿＿＿＿＿＿＿（そのための＿＿＿＿＿＿と区間長 L）

3 段目水路の路床勾配は，図-1.3 の様に，水の入ったビニールチューブを使って計測する．

（２）各変量の計測

ある流量（バルブ開度）における計測は，以下を行う．流量は３通り実施する．

(a)流量 Q の計測

流量 Q は３回づつ計測する．流量は直接測れないので，水路下端でバケツで捉える体積 V をその時間 t で割って流量 Q とする．電子天秤で重量を計り，1g=1cm^3 として体積に変換する．これを３回繰り返し (Q_1～Q_3)，平均してそのバルブ開度の Q とする．単位を m^3/s に直すこと．さらにこの時点で，単位幅流量 $q=Q/B$(m^2/s)を計算し，これを基礎量として扱うこと．

(b)限界水深 h_c の計算

式（１）から，q を使って限界水深 h_c(m)を計算する．

(c)跳水の共役水深（h_1，h_2）の計測と現象の観察

１段目水路の越流下流部（右側）で，下流端ゲートを絞ることでせきあげ，跳水を発生させる．流量が一定でもこの絞り方で，跳水の位置と，水深関係が変化する．このゲートの絞り方，つまり下流側水深を２通り変化させ，各ケースでの跳水の上流水深 h_1 と下流水深 h_2 を計測する．（流量が３つなので計６通り）　また，上下流で水面に触れ，上流へ波が伝わるか確認する．

(d)跳水水面形の計測（1 段目水路，最大・最小流量時のみ）

最大・最小流量時の各１ケースについて，跳水部分の水面形を記録する．（5cm～10cm の間隔で位置を変えながら，水深 h を記録する．例：表-1.1，図-1.4 参照）

(e)等流水深 h_0 の計測（３段目水路）

3 段目水路の中心付近で，水位が一定になっている部分を等流であると仮定し，等流水深 h_0(m)として計測する（図-1.4）．底面は人工芝となっているので，芝面上端からの水深を計測する．

(f)水面形の計測　（3 段目水路，最大・最小流量時のみ）

最大流量と最小流量において，下流端ゲートを上げて開放した場合（水位が低い場合）と，絞った場合（高い場合）について，それぞれ水面形を計測する．水面形の記録方法は跳水と同じである．（0.1m～0.5m の間隔で位置を変えながら，水深 h を記録する．例：表-1.2，図-1.5 参照）

上流バルブを操作して流量を変化させ，上記の計測を２回繰り返す．　　　***→データシートを考えよ．***

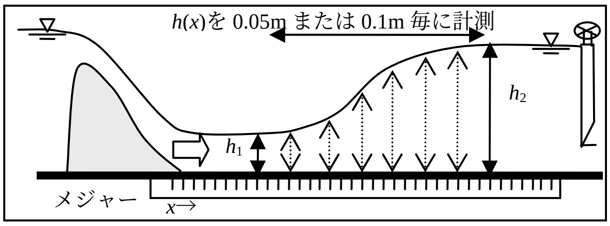


図-1.4　跳水部分の計測（1 段目）

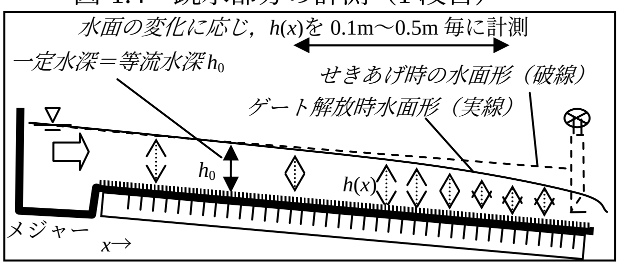


図-1.5　水面形の計測（3 段目）

表-1.1　跳水水面形データ（例，流量毎）

q(m^2/s)=0.00502		q(m^2/s)=0.00293	
ケース1		ケース1	
x(m)	h(m)	x(m)	h(m)
0.0	0.004		
0.1	0.004		
0.2	0.004		
0.3	0.005		
0.4	0.013		
0.45	0.016		
0.5	0.019		
0.55	0.022		
0.6	0.025		
0.7	0.030		
0.8	0.032		
0.9	0.033		
1.0	0.033		

表-1.2　水面形データ（例）

	最大流量時		最小流量時	
q(m^2/s)=	0.00502		0.00293	
hc(m)=	0.0137		0.00958	
h0(m)=	0.0170		0.0130	
ゲート	解放	絞り	解放	絞り
x(m)	h(m)	h(m)	h(m)	h(m)
0.50	0.0170	0.0170	0.0120	0.0120
1.00	0.0170	0.0170	0.0130	0.0120
1.25	0.0165	0.0173	0.0130	0.0123
1.50	0.0160	0.0177	0.0120	0.0127
1.60	0.0155	0.0175	0.0120	0.0125
1.70	0.0150	0.0178	0.0115	0.0128
1.80	0.0140	0.0185	0.0110	0.0135
1.90	0.0135	0.0193	0.0105	0.0143
2.00	0.0100	0.0200	0.0060	0.0150

１．３　理論式と，実験後の整理方法・考察内容

本実験では，粗度係数の取り扱いの関係で，**すべてｍ（cm ではない！）と sec（秒）の単位系で扱う**．

（１）限界水深 h_c

限界水深 h_c は，ある断面形（この実験では，矩形）の水路に，ある流量で流した場合に，「射流」と「常流」の間の限界を決める水深である．（表-1.3 参照）　実験の矩形断面では，式（１）で表される．

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad (1)$$

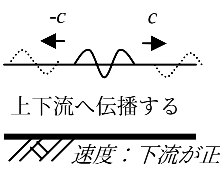
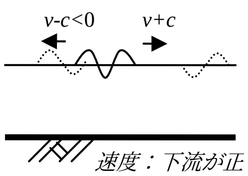
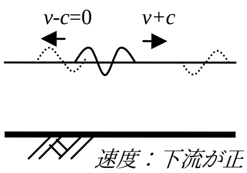
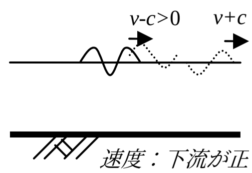
（矩形断面における限界水深の式）

限界水深 h_c は単位幅流量 q だけで決まる．実験では，この式から各（単位幅）流量に対する限界水深 h_c を計算して求める．（6 ページ表-1.4 に整理の例）　　*（ここではまだ，確認事項はない．）*

＜解説＞

ある流量に対し，ある場所の水深がこの限界水深より深く，流れが緩やかだと「常流」，逆に浅く速い流れだと「射流」となる．常流では，下流の水位変化や波が上流に伝わるが，射流では伝わらない．擾乱で発生した波は上流と下流に伝わるが，流速がその伝播速度（$c = \sqrt{gh}$）を超えると伝わらなくなるからである．この分類を，表-1.3 で認識しておこう．その場所の流速 v と伝播速度 $c = \sqrt{gh}$ の比を Froude 数と呼び，これが 1 を超えると射流，下回ると常流となる．

表-1.3　流れの分類（常流と射流）　（太枠部は，レポートの「理論」の部分で必要）

流れの状態	常流	限界流	射流
水深 h	$h > h_c$	$h = h_c$	$h < h_c$
フルード数 $Fr = \frac{q}{\sqrt{gh^3}} = \frac{v}{\sqrt{gh}}$	$Fr < 1$	$Fr = 1$	$Fr > 1$
擾乱伝播速度 $c = \sqrt{gh}$ と流速との関係	$c = \sqrt{gh} > v$ （流速の方が小さい）	$c = \sqrt{gh} = v$ （流速と同じ）	$c = \sqrt{gh} < v$ （流速の方が大きい）
擾乱の伝播  -c　c 上下流へ伝播する 速度：下流が正 静水中	 v-c<0　v+c 速度：下流が正 上流へも下流へも伝わる	 v-c=0　v+c 速度：下流が正 上流へ伝わろうとする波がその場にとどまる．	 v-c>0　v+c 速度：下流が正 下流へのみ伝わる．

（２）跳水の理論流れの分類

図-1.6 のように上流水深 h_1 から跳水する場合下流水深 h_2 は限界水深より深くなる．この２つの水深の関係を互いに「共役水深」という．（h_2 は h_1 の共役水深）

運動量保存則（９ページ参照）から，次式のようになる．

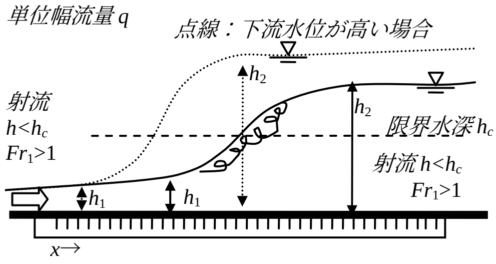


図-1.6　跳水

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{-1+\sqrt{1+8Fr_1^2}}{2} \quad （２）$$

$$Fr_1 = \frac{q}{\sqrt{gh_1^3}} = \frac{v_1}{\sqrt{gh_1}} \quad （３）$$

$$Fr_2 = \frac{q}{\sqrt{gh_2^3}} = \frac{v_2}{\sqrt{gh_2}} \quad （４）$$

ここに

q：単位幅流量（m^2/sec)，$q=Q/B$，Q：流量（m^3/sec)，B：水路幅（m)，$A=Bh$：断面積（m^2)

v_1：上流側の平均流速（m/sec)，$v_1=q/h_1=Q/A_1$，Q：流量（m^3/sec)，$A_1=Bh_1$：上流側断面積（m^2)

h_1：上流側水深(m) （流れは射流，$h_1<h_c$，限界水深より浅い）

h_2：下流側水深(m) （流れは常流，$h_2>h_c$，限界水深より深い）

Fr_1：上流側のフルード数(Froude 数）（無次元，跳水の上流側では「射流」で，1 より大きい．$Fr_1>1$）

Fr_2：下流側のフルード数(Froude 数）（無次元，跳水の下流側では「常流」で，1 より小さい．$Fr_2<1$）

g：重力加速度（9.8m/sec^2）

跳水の上下流では，流れが異なり，上流側では「射流」が現れ，下流側では「常流」が現れる．

ここでの確認事項は，以下のとおり．

①跳水の上流側で「射流」，下流側で「常流」であることを，以下の３点で確認する．

限界水深 h_c を式（１）で計算した上で，

（１）上流側水深 h_1 は限界水深 h_c より浅く，下流側水深 h_2 は限界水深 h_c より深いか？

（２）上流側フルード数 Fr_1 は１より大きく，下流側 Fr_2 は 1 より小さいか？

（３）実験中に，擾乱を与えて上流側に伝播するかを確認．（上流の「射流」では伝播しない．）

HOWto①→（１）（２）は，表-1.4 の様にデータ整理表の上で確認する．（２）については，式（３）（h_1 と q→Fr_1），および式（４）（h_2 と q→Fr_2）からフルード数を求める．（３）については，実験中に現象を２，３度確認した結果を記述する．

②表-1.1 の跳水の水面形のデータをグラフにする．跳水長さは，下流側水深の 6 倍程度といわれているが，どうか確認せよ．

HOWto②→跳水の水面形（表-1.1 データ，最大・最小流量で各１ケース）をグラフにする．限界水深線 h_0 を図-1.8 にならって記入すること．跳水部分の長さ（跳水長）を読み取り，h_2 の何倍になるか計算し，上記を確認する．

③流量も変えたケースも含め，h_2 と h_1 の関係は理論どおりか確認する．実験値から得られる h_2/h_1（縦軸）と，式（２）の h_2/h_1 の理論値（横軸）が一致するか確認する．

HOWto③→表-1.3 のように，実験値の h_2/h_1 と計算し，また，h_1 と Fr_1 から式（２）によって h_2/h_1 の理論値を計算しておき，前者を縦軸，後者を横軸にプロットする（図-1.7)．これが 45 度の線（縦軸＝横軸の線）に載るかどうかによって，一致するかを考察する．

表-1.4　データ整理の例（跳水部分）

$q(m^2/s)=$ 0.00502	hc(m)= 0.0137	（流量1回目）			
実験値 h_1(m)	実験値 h_2(m)	Fr_1	Fr_2	h_2/h_1 実験値	h_2/h_1 理論値※1
0.004	0.035	6.339	0.245	8.75	8.48
0.007	0.022	2.738	0.491	3.14	3.40
$q(m^2/s)=$ 0.00420	hc(m)= 0.0122	（流量2回目）			
実験値 h_1(m)	実験値 h_2(m)	Fr_1	Fr_2	h_2/h_1 実験値	h_2/h_1 理論値※1
0.004	0.030	5.303	0.258	7.50	7.02
0.007	0.020	2.291	0.474	2.86	2.78
$q(m^2/s)=$ 0.00293	hc(m)= 0.0096	（流量3回目）			
実験値 h_1(m)	実験値 h_2(m)	Fr_1	Fr_2	h_2/h_1 実験値	h_2/h_1 理論値※1
0.004	0.022	6.479	0.411	6.29	8.68
0.006	0.019	2.887	0.512	3.17	3.61

※1：実験値のh_1とFr_1を用い，式(2)で計算する．
※2：Fr_1,Fr_2はqとh_1，h_2から式(3)(4)で計算する．

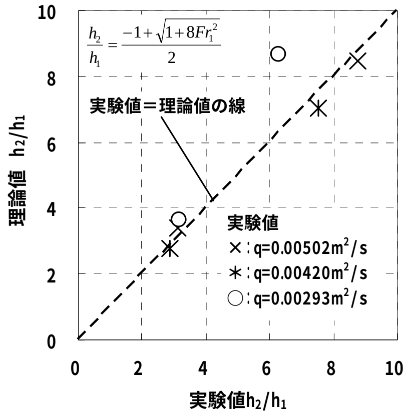


図-1.7　跳水前後水深比 h_2/h_1 の実験と理論の比較

（３）等流水深 h_0 と路床勾配の分類，および水面形の分類

等流水深 h_0 は，ある断面形のまま，ある粗度（流れの抵抗）を持ち，ある勾配（傾き）のまま続く水路（河川）に，ある流量を流した時に，一定となって現れる水深である（図-1.5 参照）．長い区間ではこの水深に近づこうとする．

等流水深 h_0 は，単位幅流量 q，水の流れにくさを表す粗度係数 n，水路の傾きである路床勾配 i_b によって変化する．路床勾配は直接計測が可能だが，粗度係数は直接計ることができないため，本実験では，等流状態（水深が一定の状態）を作って等流水深 h_0 を計測し，それから粗度係数 n を求め，一定となるかを調べる．広矩形断面での粗度係数は次式で得られる．

$$n=\frac{h^{5/3}i_b^{\ 1/2}}{q} \qquad \text{（５）（粗度係数の計算式）}$$

ただし，諸量は次のとおり．

q：単位幅流量（m^2/sec)，（矩形断面水路では，$q=Q/B$，Q は流量(m^3/sec)，B は水路幅(m)

i_b：路床勾配（河床勾配）（無次元）　，　i_b＝路床高の区間低下量Δz_b／水路区間長 L

n：マニング（Manning）の粗度係数（$m^{-1/3}$s，式（５）の諸量はすべて m,sec の単位で与える）

等流状態（水位一定）の時の $h=h_0$（等流水深），路床勾配 i_b，単位幅流量 q から，粗度係数 n を得る．

<解説>

平均流速は，抵抗則によって，粗度，水深（水理径深），エネルギー勾配で決まる．抵抗則で有名なものは，次の Manning 則である．

$$v=Q/A=q/h=\frac{1}{n}R^{2/3}I^{1/2}\approx\frac{1}{n}h^{2/3}i_b^{\ 1/2} \qquad (6)$$

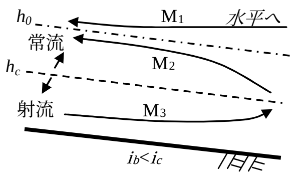
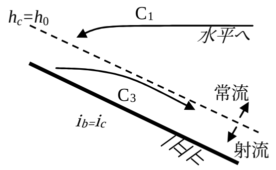
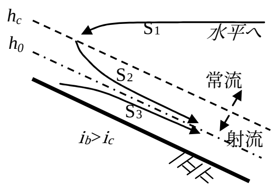
A：流水の断面積(m^2)，矩形断面では $A=Bh$，I：エネルギー勾配だが，ここでは路床勾配（$I=i_b$）
S：潤辺長(m)，横断面内で水が壁面と接触する長さ．矩形断面では $B+2h$ だが，実験では S　B とする．
R：水理径深(m)，$R=A/S$，ここでは上記から，$R=Bh/(B+2h)$　h.
この式を変形すれば，予め粗度係数がわかっている場合には，等流水深が予測できる．

$$h_0=\left(\frac{n^2q^2}{i_b}\right)^{3/10} \qquad \text{（７）（本実験で使用しない）（Manning 式が抵抗則の場合の矩形断面の等流水深の式）}$$

（解説おわり）

ある流量 Q（単位幅流量 q）では，限界水深 h_c と等流水深 h_0 の大小関係で，路床勾配が分類される．

表-1.5　緩勾配と急勾配の区別　（太枠部は，レポート中，「理論」として必要）

<table>
<tr><td>勾配の名称</td><td>緩勾配</td><td>限界勾配</td><td>急勾配</td></tr>
<tr><td>限界水深・等流水深の関係</td><td>$h_0 > h_c$</td><td>$h_0 = h_c$</td><td>$h_0 < h_c$</td></tr>
<tr><td>図
h_0 と h_c の関係と水面形の分類（各水路勾配で，３つのうちのどれかの水面形が現れる）</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>勾配の関係</td><td>$i_b < i_c$</td><td>$i_b = i_c \equiv \dfrac{g^{10/9} n^2}{q^{2/9}}$</td><td>$i_b < i_c$</td></tr>
</table>

表中，限界勾配 i_c とは，ある流量で，急勾配と緩勾配の境界となる勾配．

そこで 3 段目水路の実験についてまず，各流量について，以下を確認する．（表-1.6 にまとめの例）

④一定の流量で等流状態を作り，水路の粗度係数 n を式（５）から計算する．この n が２つの流量で一致するかどうかを確認する．（0.017 程度で滑面に相当するので，これを下回ることはない．）

HOWto④→式（５）での諸量の単位はすべて，m と sec に統一すること．

⑤計算した限界水深 h_c と計測した等流水深 h_0 から，水路（3 段目）が緩勾配か急勾配かを判定する．

HOWto⑤→表-1.5 を参考に，限界水深 h_c と等流水深 h_0 の大小関係から，緩勾配か急勾配かを，各流量において判定する．

最後に，最大・最小流量で各２ケース（ゲート開放時と絞り時）の計 4 ケースの水面形について，以下を確認する．

⑥グラフ用紙に，横軸に位置 x，縦軸に水深 h をとり，各水面形を別々にグラフに描け（図-1.8）．図中に限界水深 h_c を破線で，等流水深 h_0 を一点鎖線で併記せよ．そして，それらが表 1.5 の図のどの水面形に当たるか，各ケース（水面形）に対して確認せよ．（表-1.6 にまとめの例）

HOWto⑥→表-1.2 のデータをグラフ用紙に記入し，その時の限界水深 h_c（破線）と等流水深 h_0（一点鎖線）をグラフ上に一定値としてそれぞれ記入する（図-1.8）．そして，表-1.5 と比較して，緩勾配なら M_1～M_3，急勾配ならば S_1～S_3 のうち，どれに当てはまるか判定する．

表-1.6　水面形等のまとめ（例）

				解説
単位幅流量q(m²/s)=	0.00502	0.00420	0.00293	計測 (q=Q/B)
限界水深hc(m)=	0.0137	0.0122	0.00957	式 (1)
等流水深h0(m)=	0.0170	0.0150	0.0130	計測 (水路一定水深部)
Manning粗度係数n=	0.0194	0.0188	0.0212	式(5)
勾配の分類	緩勾配	緩勾配	緩勾配	表-1.5から
ゲート解放時の水面形分類	M2	M2	M2	表-1.5から
ゲート絞り時の水面形分類	M1	M1	M1	表-1.5から

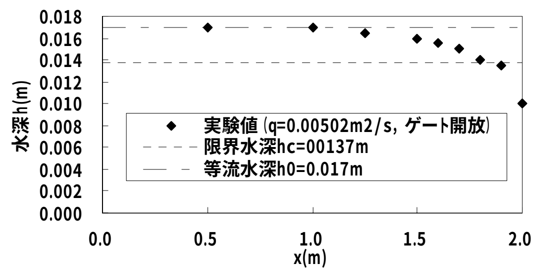


図-1.8　水面形（q=0.00502m^2/s，ゲート開放の場合）

（この図が４つ必要，上記は M2 カーブの例）

2. 理論（跳水の理論）

射流から常流へ流れの遷移する状況を**跳水**（**hydraulic jump**）と呼ぶ．水路床が水平で，底面摩擦を無視すると，跳水前後の水深は共役水深の関係にある．ここでは，運動量保存則から式(2)を誘導する．

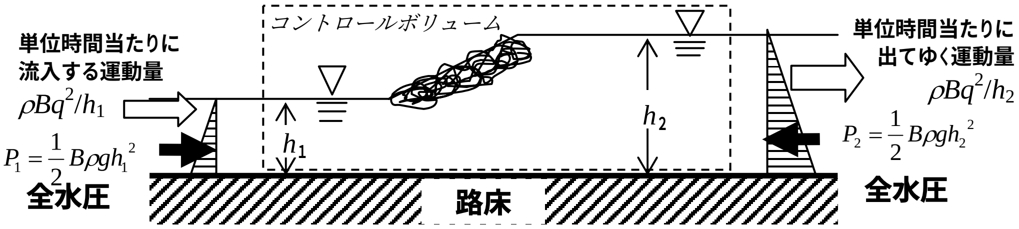


図-2.1　跳水（右が正）

ここでの運動量保存則は，右向き方向を正に考えると，この区間の体積（コントロールボリューム，図中の点線枠）について，
$\boxed{1}$単位時間当たりに[出てゆく運動量（右向き正）ー入ってくる運動量（右向き正）]
は,
$\boxed{2}$この区間（コントロールボリューム）に作用している力（右向き正）
に等しい事を保障する．

諸量を以下に定義する．

ρ：水の密度（1000kg/m^3）（体積当りの質量）

q：単位幅流量（m^2/sec)，矩形断面水路では，$q=Q/B$，Q は流量(m^3/sec)，B は水路幅(m)

A：流水の断面積(m^2)，矩形断面では $A=Bh$,

まず，単位時間に断面を通過する運動量について考える．

$Q=Bq$ であることから，単位時間に断面を通過する質量は，$\rho Q=\rho Bq$ である．それが持っている右向きの速度は $v=Q/A=Q/Bh=q/h$ である．運動量は質量 x 速度であるから，単位時間に断面を通過する運動量はこれらをかけたものとなる．つまり，$\rho\ Q^2/A\ =\rho Bq^2/h$ である．これを入口側と出口側で考える．出てゆく運動量は右側断面で$\rho Bq^2/h_2$ となり，入ってくる運動量は左側断面で$\rho Bq^2/h_1$ であるから，上記の$\boxed{1}$は$\rho Bq^2/h_1$-$\rho Bq^2/h_2$ となる．

次に$\boxed{2}$について考えると，作用する力は，区間左側からかかる全水圧 P_1 が正の方向（右）に作用し，区間右側から全水圧 P_1 が，負の方向（左）に作用する．

各全水圧は $P_1=\frac{1}{2}B\rho g h_1^{\,2}$，$P_2=\frac{1}{2}B\rho g h_2^{\,2}$ であり，これらの差 $P_1-P_2=\frac{1}{2}B\rho g h_1^{\,2}-\frac{1}{2}B\rho g h_2^{\,2}$ が作用する力となる．

よって，$\boxed{1}=\boxed{2}$より，

$\rho Bq^2/h_1-\rho Bq^2/h_2=B\rho g h_1^{\,2}/2-B\rho g h_2^{\,2}/2$　　となり，$\rho Bq^2 g/2$ で割ると，

$2q^2/\mathrm{g}(1/h_1-1/h_2)=h_1^{\,2}/2-h_2^{\,2}/2$　　となる．これを整理すると，

$$(h_1-h_2)\left\{\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2+\frac{h_2}{h_1}-2\frac{q^2}{g h_1^{\,3}}\right\}=0$$

となる．よって，$h_1=h_2$ 以外の解として，

$$\frac{h_2}{h_1}=\frac{-1+\sqrt{1+8Fr_1^{\,2}}}{2}$$

（式(2)）が得られる．ここに，$Fr_1^{\,2}=\frac{q^2}{g h_1^{\,3}}$ である．　　以上