１．オリフィス

1.　理論式と実験手順

１．１　オリフィスとは...

オリフィスとは水槽や貯水槽，あるいは水路や河川にあるダムなどの横断構造物等に設けた穴のことである（図-1.1）．背後の水位が上がらないと下流へ流す流量が増えないので，図-1.2 の様に，上流から流れ込む流量を一旦貯留して流出を遅らせるなどの制御に用いられる．

オリフィス孔の状態が決まっていれば，水位と流量とが一定の関係になるため，（いちいちバケツなどで）流量を測ることなく水位から流量を推定できるので便利である．本実験では，この水位と流量の関係を，模型実験で確認し，理論式と比較することを目的とする．

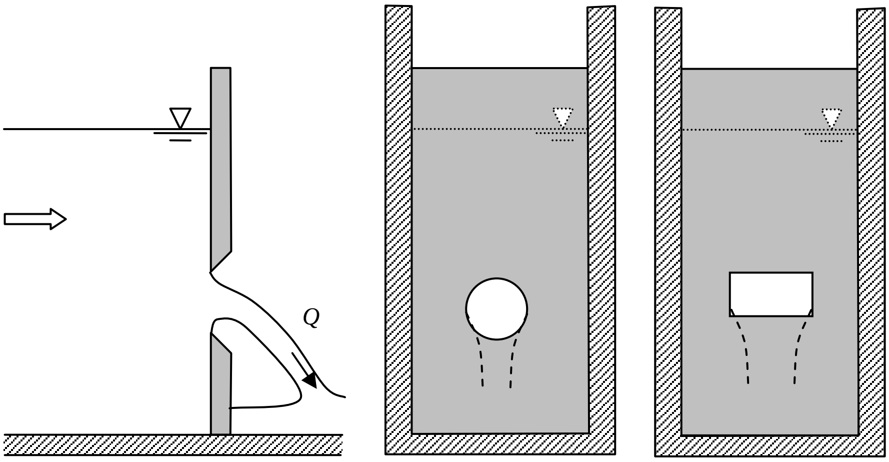


図-1.1　オリフィス（円形孔と矩形孔）

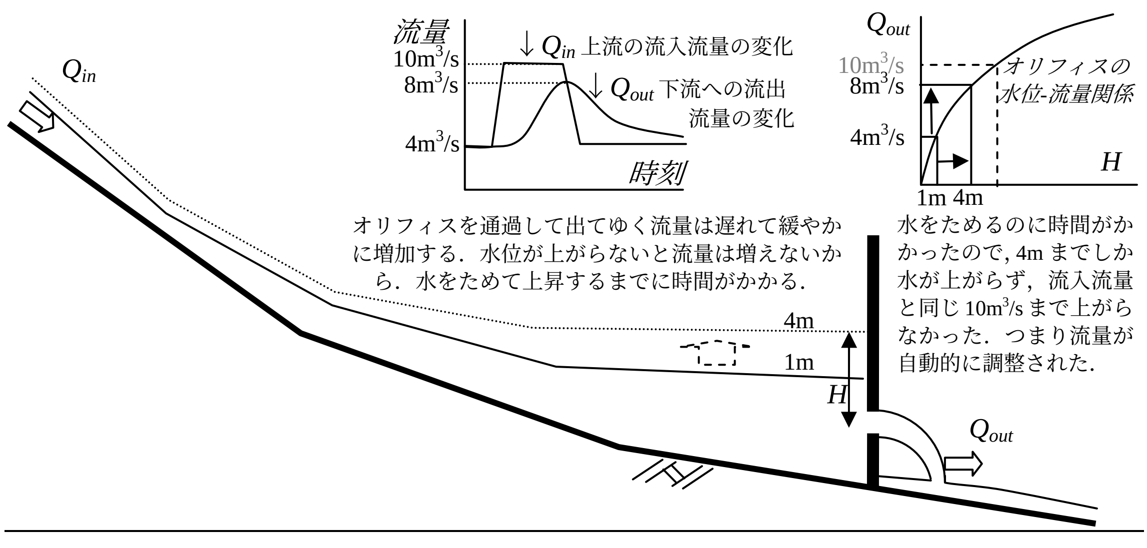


図-1.2　流量調整機能と，流量の推定

１．２　実験結果と比較するための理論式

小型オリフィスと大型オリフィスとに分類される．大型オリフィスは流出孔が比較的大きく，オリフィス孔の内側で高さ方向に流速が変化するため，理論式に若干の違いがある．

理論式は小型オリフィス公式の式（１）と大型オリフィスの式（２）である．

$$Q = C \cdot A\sqrt{2gH} \qquad (1)$$

$$Q = C \cdot A\sqrt{2gH}\left\{1-\frac{1}{32}\left(\frac{r}{H}\right)^2\right\} \qquad (2)$$

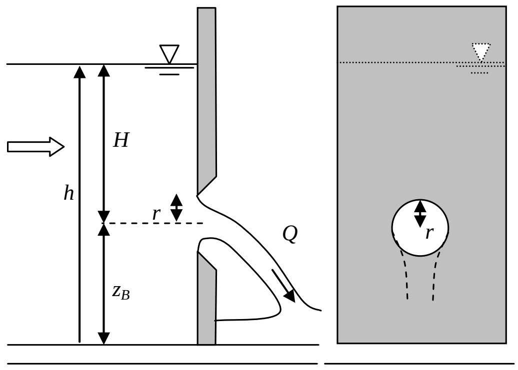


図-1.3　諸変数の定義

ここに，

Q：流量（cm^3/sec),

H：孔中心から水面までの高さ(cm),

（=底から水面までの高さ hー底から孔中心までの高さ z_B）

C：流量係数（無次元，単位がない),

g：重力加速度（980cm/sec^2),

r：孔の半径(cm),

A：孔の断面積(cm^2)で，ここでは $A=\pi r^2$

である．変化する量は，　Q と H であり，Q が H の関数となっている，つまり，H で Q がわかる，ということである．この実験では，理論式の関係が成立しているかを，３つの方法で確認する．

①ここでは流量係数 C が未知だが，

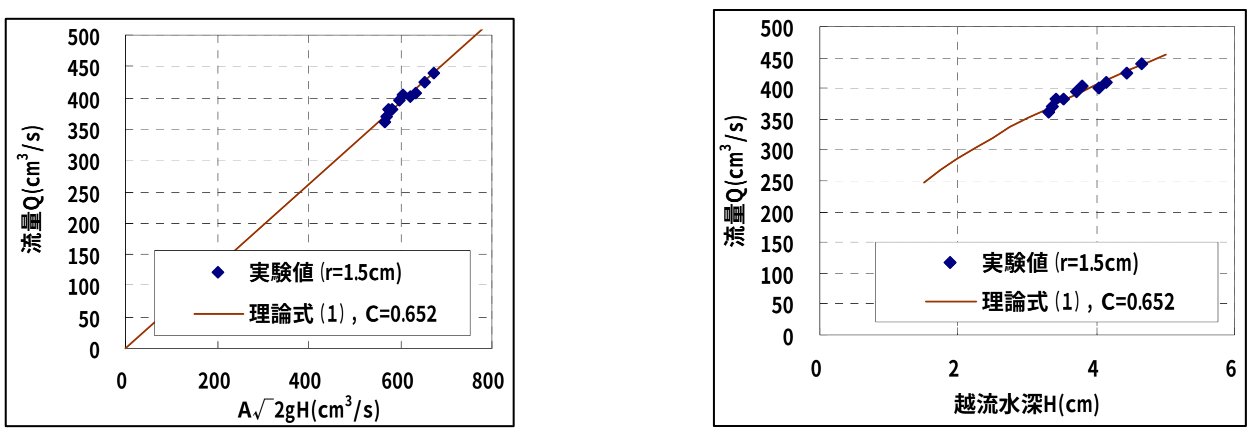
（１）一定になるか（ばらつくか),

（２）平均値を計算し，0.60～0.64 に近いかどうか確認.

②横軸を右辺の C 以外の項の値とし，縦軸に Q をとったグラフ上で，実験データ（点）と理論式（直線）を比較する．(図-1.4(a))

③実験値の平均を正しい C として用いれば，理論式は完成する．横軸に H, 縦軸に Q をとったグラフ上に実験データ（点）と理論式（カーブ）を描き，比較する．(図-1.4(b))

→具体的な整理方法は，１．４で説明する



(a) $A\sqrt{2gH}$ と流量 Q の関係（式１のみ）　　(b) 越流水深 H と流量 Q の関係

図-1.4　整理するグラフの例（小型オリフィスの例，半径 r=1.5cm）

１．３　実験装置の概要

図-1.5 に示しているように，オリフィスの部分は，取り外して，孔の大きさを 4 種類に変化させることができる．各班，異なった大きさのオリフィスを使用する．供給側にバルブがあるので，これで流量（あるいは水位）を調整・変化させるために操作する．

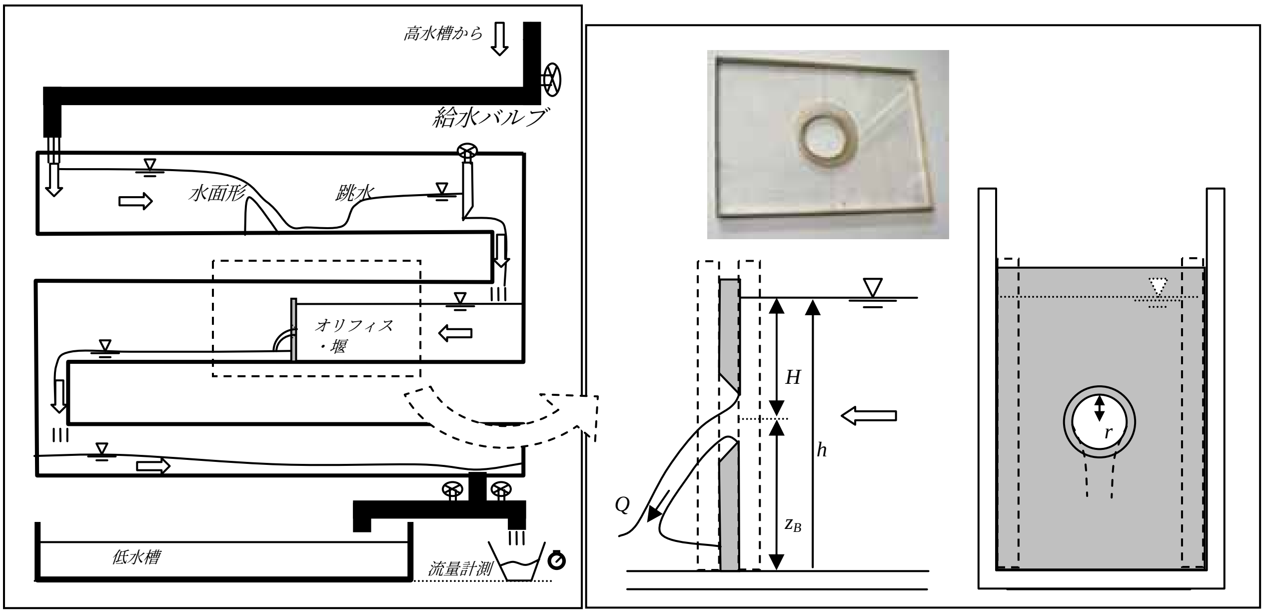


図-1.5　実験装置の概要

１．４　計測方法と整理の方法

変化する量は，流量 Q と孔からの水位 H である．計測は，この変化する量を求めるために行う．

（１）諸元の把握と計測

計測を始める前に，変化しない量（諸元）を把握しておく必要がある．

質問：それは何か？　　答え：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿，＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

（２）変量（H,Q）の計測

H は，孔の高さから水面までであるから，底から孔の高さ z_B (cm)を諸元として測っておき，実験時には，底からの水位 h(cm)を計測して，後に $H=h-z_B$ として計算するとよい．

ある流量（水位，バルブ開度）における計測は，以下を行う．

○流量 Q は 3 回づつ計測する．流量（単位時間当たりに流れる体積）を直接測ることはできないので，水路下端でバケツで捉える体積 V をその時間 t で割って流量 Q とする．体積は，電子天秤で重量を計り，比重を１として体積に変換する．（つまり，$1\mathrm{g}=1\mathrm{cm}^3$）　これを 3 回繰り返して３つの Q (Q_1～Q_3)を得，これらを平均して，そのバルブ開度に対応する Q とする．

○水位 H は孔の高さから水面までであるが，孔の高さは読みにくいので，底からの水位 h(cm)を計測する．予め底から孔の高さ z_B (cm)を諸元として測っておき，後に $H=h-z_B$ として計算する．

給水バルブを操作して流量を順次変化させ，上記の計測を 10 回繰り返す．（H,Q の組を 10 個得る．）

バケツは全く同じ重量のものを３つ用意する．バケツ重量は，天秤が覚えてくれる．体積と時間をシートに直接記入する必要はなく，計算用紙と電卓を用意し，そのつど割り算をして流量を元データとして記入すればよい．　（計算専用の役，記録係，等，役割を分けられる．）　電子天秤の精度は 5g なので，時間は長めに取ったほうが流量の精度は上がる．***→どのようなデータシートにすればよいか考えよ．***

（３）理論式との比較（実験後の整理）

１．２で説明した３つの確認について具体的に示す．

小型公式の式（１），大型オリフィス公式の式（２）のそれぞれについて行うこと．

式（１）について説明する．式（２）については，斜字体のコメントを参照せよ．

①流量縮流係数 *C* の実験結果は一定になるか（ばらつくか），平均値はいくらかを確認．

HOWto1→表-1.1 のような整理をする．各流量での C の計算は，表中③のように，式（１）右辺の C 以外の式 $A\sqrt{2gH}$ を計算し，これで流量 Q を割れば④の C を求められる．

式（２）については，同様に⑤（式が違う）から⑥で C を計算する．

HOWto2→C の値のばらつきを見るとともに，平均値はいくらか計算する（表-1.1④）．

（通常 0.62 程度）　*式（２）も同じ（⑥）．*

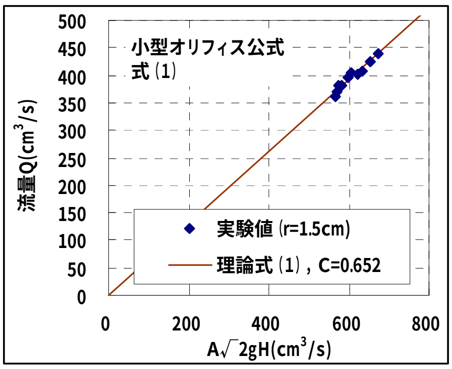
表-1.1　データ整理表（データシート，諸元表は含んでいない）

		小型オリフィス（式（1））		大型オリフィス公式（式（2））	
①越流水深 H (cm)	②流量 Q (cm^3/s)	③式(1)右辺C以外 $A\sqrt{2gH}$ (cm^3/s)	④小型流量係数 =②/③ C	⑤式(2)右辺C以外 $A\sqrt{2gH}\cdot(1-r/32H)$ (cm^3/s)	⑥大型流量係数 =②/⑤ C
3.31	360.9	565.1	0.639	557.1	0.648
3.37	369.9	570.2	0.649	562.3	0.658
3.43	382.4	575.3	0.665	567.4	0.674
3.52	381.8	582.8	0.655	575.1	0.664
3.73	394.9	600.0	0.658	592.4	0.667
3.80	404.9	605.6	0.669	598.1	0.677
4.03	402.0	623.7	0.645	616.4	0.652
4.15	408.4	632.9	0.645	625.7	0.653
4.44	425.2	654.6	0.650	647.8	0.656
4.67	438.4	671.4	0.653	664.7	0.660
		小型のC　平均値→	0.653	大型のC平均値→	0.661

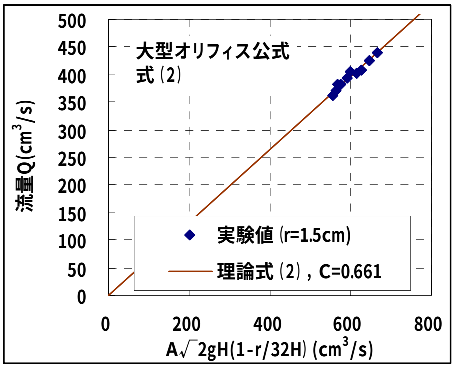
②横軸を右辺の *C* 以外の項の値 $A\sqrt{2gH}$ とし，縦軸に *Q* をとったグラフ上で，実験データ（点）と理論式（直線）を比較する．（図-2(a)）　この傾きが C である．C 一定ならば，直線上にのる．

HOWto1→H から，$A\sqrt{2gH}$ を計算する（表-2.1 中の④参照）．これを横軸，Q を縦軸にとってプロットする．(図-1.4(a)参照）　*式（２）も同様に⑥と②をプロット，図-1.6(b)参照*

HOWto2→理論式は原点を通る斜めの直線で，傾きは C となる（式１を見直せ）．④で計算した C の平均値をこのグラフの傾きとして描くこと．*式（２）も⑥の平均値から直線を引くこと．*



(a) $A\sqrt{2gH}$ と流量 Q の関係（式（１））



(b) $A\sqrt{2gH}(1-r/32H)$ と流量 Q の関係（式（２）

図-1.4　右辺 C 以外の項と流量の関係

③平均値を C と与えれば式（１）は H と Q 以外のすべてが決まり，理論式は完成する．**横軸に H，縦軸に Q をとったグラフ上に実験データ（点）と理論式（カーブ）を描き，比較する．**

HOWto1→図-1.5 のように，実験データはプロット（点）で，理論式はカーブで描く．

HOWto2→理論式のカーブの描き方：表-1.2 の様に，実験データとは別に，少しづつ H を増やして理論式の Q を計算しておき，この H-Q の値をグラフ上にプロットし，それをカーブでつないで描く．　*式（1），式（2）それぞれ描くこと．*

表-1.2　理論式の H-Q グラフ用計算表

越流水深 H (cm)	理論式 (小型オリフィス) 流量Q 式(1) (cm³/s)	理論式 (大型オリフィス) 流量Q 式(2) (cm³/s)
1.50	248.5	243.7
1.75	268.4	264.5
2.00	286.9	283.7
2.25	304.3	301.7
2.50	320.8	318.7
2.75	336.4	334.8
3.00	351.4	350.2
3.25	365.7	365.0
3.50	379.5	379.1
3.75	392.9	392.8
4.00	405.7	406.0
4.25	418.2	418.8
4.50	430.4	431.2
4.75	442.1	443.3
5.00	453.6	455.0

※Cは表-1.1の各平均値を使用
※この表は，図-1.5で理論式のグラフを描くのに必要.
（直線ではないから）

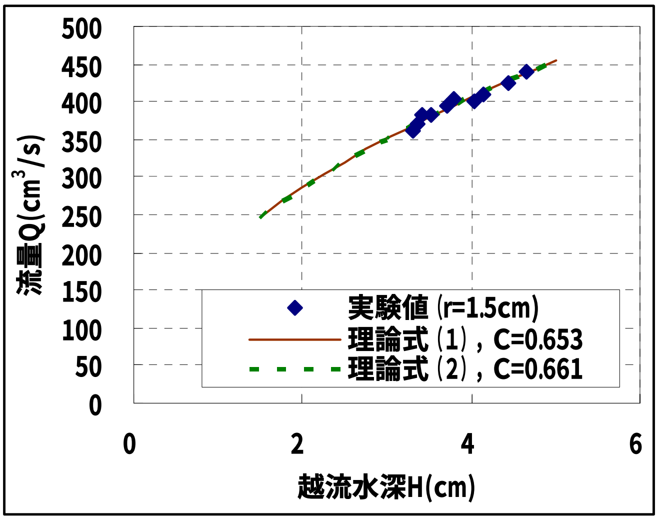


図-1.5　H-Q 関係（半径 r=1.5cm）

2. 理論導出

２．１　小型オリフィス

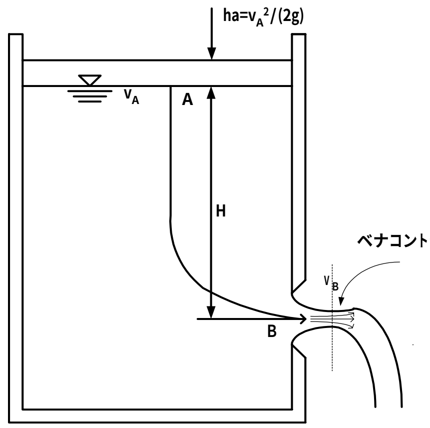


図-2.1　小型オリフィスの概念図

オリフィス上流側の水面に A 点をとり，オリフィス出口の最も縮流した部分「ベナコントラクタ」に B 点をとり，この 2 点間でベルヌーイの定理を適用する．図-2.1 のように，水面における流速，圧力の強さ，および基準面からの高さを，A 点でそれぞれ v_A，p_A，z_A および，B 点 v_B，p_B，z_B とすると，

$$\frac{v_A}{2g}+\frac{p_A}{w}+z_A=\frac{v_B}{2g}+\frac{p_B}{w}+z_B$$

である．ここで，圧力は，A 点，B 点ともに大気圧に等しく，p_A=p_B=0 となる．さらに（z_A-z_B）は両点の高低差 H であるから，$\frac{v_B{}^2}{2g}=\frac{v_A{}^2}{2g}+H$ であり，$v_B=\sqrt{2g(H+v_A{}^2/2g)}$ となる．

上の式において，v_A を接近流速，$v_A{}^2/2g+H$ を有効水頭という．上流側の断面積がオリフィスの断面積に比べてきわめて大きい場合，流れが極めて遅くなるので v_A　0 と考えられる．この場合は $v_B=\sqrt{2gH}$ である. 実際には出口でのエネルギー損失の為に流速は理論的な流速より小さい値になる．

つまり水槽と出口の間でのエネルギー損失水頭を $fe\left(v_B{}^2/2g\right)$ とするとベルヌーイの定理から

$$\frac{v_A{}^2}{2g}+H=\frac{v_B{}^2}{2g}+fe\frac{v_B{}^2}{2g}\qquad \text{よって，}\qquad v_B=\frac{1}{\sqrt{1+fe}}\sqrt{2g(H+\frac{v_A{}^2}{2g})}$$

より

$$v_B=C_v\sqrt{2g(H+h_A)}$$

である．ただし $h_A=v_A{}^2/2g$　，$C_V=1/\sqrt{1+fe}$ と置いている．ここで接近流速 v_A を無視すれば

$$v_B=C_V\sqrt{2gH}$$

である．ここに C_V は実際の流速の理論流速に対する比で流速係数という．オリフィスの断面積を A, ベナコントラクタの断面積を a_0 とすると各断面積の比つまり断面補正係数（あるいは縮流係数）C_A は

$$C_A=a_0/A$$

となる．オリフィスから流出する実際の流量はベナコントラクタでの流速ｖ$_B$に断面積 a_0 を乗じて $Q=v_B\cdot a_0$ と求まる．つまり，

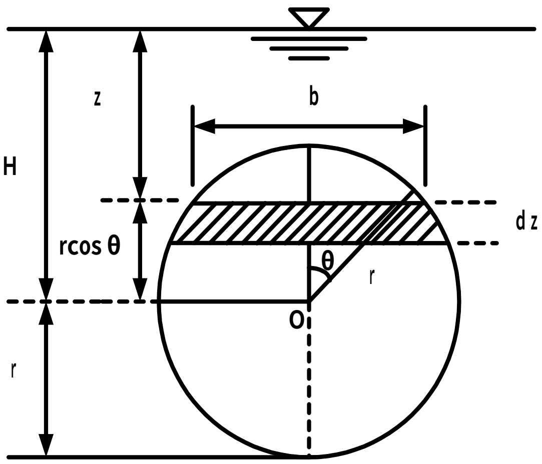
$$Q=C_VC_A\cdot A\sqrt{2g(H+h_A)}=C\cdot A\sqrt{2g(H+h_A)}$$

である．ここに $C=C_V\cdot C_A$ であり接近流速を無視できる場は次式となる．

$$Q=C\cdot A\sqrt{2gH}\qquad（１）$$

C は実際の流量と理論流量との比で流量係数といい，値は 0.6～0.65 程度である．

２．２大型オリフィス（円形の場合）



円形大型オリフィスの場合は右図において $\underline{b}=2r\sin\theta$, $z=H-r\cos\theta$
$dz=r\sin\theta\cdot d\theta$であるから全流量は次式となる．

$$Q=C\sqrt{2g}\int_{H-r}^{H+r} b\sqrt{z}dz$$

$$=C2r^2\sqrt{2gH}\int_0^\pi \sin^2\theta\left(1-\frac{r}{H}\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}d\theta$$

式は直接積分が困難であるから，二項定理により級数に展開して各項毎に積分する．

$$\int_0^\pi \sin^2\theta\left(1-\frac{r}{H}\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}d\theta$$

$$=\int_0^\pi \sin^2\theta\left\{1-\frac{1}{2}\frac{r}{H}\cos\theta-\frac{1}{8}\left(\frac{r}{H}\cos\theta\right)^2-\frac{1}{16}\left(\frac{r}{H}\cos\theta\right)^3-\frac{5}{128}\left(\frac{r}{H}\cos\theta\right)^4-\cdots\right\}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\pi-\frac{\pi}{64}\left(\frac{r}{H}\right)^2-\frac{5\pi}{2048}\left(\frac{r}{H}\right)^4-\cdots\cdots$$

故に $Q=C\pi r^2\sqrt{2gH}\left\{1-\frac{1}{32}\left(\frac{r}{H}\right)^2-\frac{5}{1024}\left(\frac{r}{H}\right)^4-\cdots\right\}$

$(r/H)^4$ 以下の項は一般に省略できるから

$$Q=C\pi r^2\sqrt{2gH}\left\{1-\frac{1}{32}\left(\frac{r}{H}\right)^2\right\}=CA\sqrt{2gH}\left\{1-\frac{1}{32}\left(\frac{r}{H}\right)^2\right\}$$

と円形大型オリフィスの流量公式が誘導された．

右辺の括弧が１の場合が，小型オリフィスの公式である．

いま，仮に r/H の比が大きい場合として $r/H=1$，つまりオリフィス孔上端に水位がある場合を計算すると，括弧内は 31/32=0.969 となり，小型オリフィス公式の誤差は 3.1%である．

＜参考＞　長方形のオリフィスの場合

○小型オリフィスとしての扱い

孔の断面積は，図-2.4 の定義から，$A=Bd$ であるので，次式となる．

$$Q = CA\sqrt{2gH} = CBd\sqrt{2gH}$$

○大型オリフィスとしての扱い

大型オリフィスの幅を B，水面からの深さを z とすると断面積ΔA から流出する流量ΔQ は流量係数を C とすると，小型オリフィスの式型を用いて

$$\Delta Q = C\Delta A\sqrt{2gz} = CB\sqrt{2g}\sqrt{z}dz$$

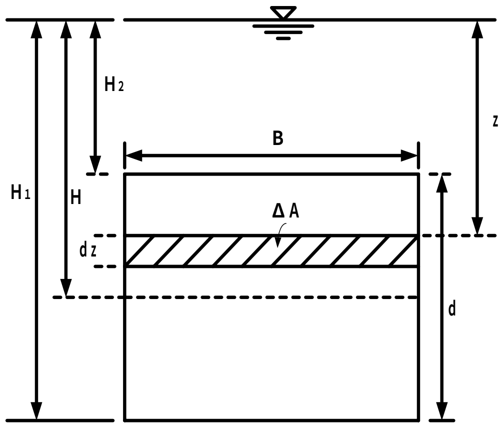
である．ここに，$\Delta A = B \cdot dz$ である．この式を水深 H_1 から H_2 まで積分すると

$$Q = \int_{H_1}^{H_2} dQ = CB\sqrt{2g}\int_{H_1}^{H_2}\sqrt{z}dz = \frac{2}{3}CB\sqrt{2g}\left(H_1^{\frac{3}{2}} - H_2^{\frac{3}{2}}\right)$$

である．なお，オリフィス中心までの深さをＨ，オリフィスの高さを d とすると，

$$d = H_1 - H_2,\quad H = (H_1 + H_2)/2$$

であるから，$H_1 = H + \dfrac{d}{2}$　，$H_2 = H - \dfrac{d}{2}$ である．



この H_1 と H_2 を上式に代入して整理すると，

$$Q = \frac{2}{3}CB\sqrt{2g}H^{\frac{3}{2}}\left[\left(1+\frac{d}{2H}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1-\frac{d}{2H}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

となり〔　〕を展開すると，

$$Q = \frac{2}{3}CB\sqrt{2g}H^{\frac{3}{2}}$$

$$\left\{\frac{3}{2}\frac{d}{H} - \frac{1}{64}\left(\frac{d}{H}\right)^3 - \frac{3}{4096}\left(\frac{d}{H}\right)^5 - \cdots\cdots\right\}$$

$$= Cbd\sqrt{2gH}\left\{1 - \frac{1}{96}\left(\frac{d}{H}\right)^2 - \frac{1}{2048}\left(\frac{d}{H}\right)^4 - \cdots\cdots\right\}$$

$(d/H)^4$ 以下の高次項は通常１に比べて極めて微小で省略してよい．

$$Q = Cbd\sqrt{2gH}\left\{1 - \frac{1}{96}\left(\frac{d}{H}\right)^2\right\}$$

さらに $\dfrac{1}{96}\left(\dfrac{d}{H}\right)^2$ を省略したのが小型オリフィスの公式である．たとえば，$\dfrac{d}{H}=1$ のような極端な場合についてもこの項は 4.2%にすぎないので，ほとんどの場合は小型オリフィスとみなして良いといえる．