

大同大学紀要

第60卷

2024

大同大学紀要

第60卷

2024

建学の精神

**産業と社会の要請に応える
人材の養成**

大学の理念

実学主義

**大同大学は
実学の教育と研究を通じて
産業と社会に貢献します**

目 次

コロナ禍におけるクロスボーダー戦略提携とM&Aの変遷

中村裕哲 1

調和優函数の存在の諸相

中井三留 成田淳一郎 瀬川重男 11

コロナ禍におけるクロスボーダー戦略提携とM&Aの変遷

Changes in Cross-Border Strategic Alliances and Mergers and Acquisitions (M&As) during the COVID-19 Pandemic

中村裕哲*

Hironori NAKAMURA

Summary

The global spread of the COVID-19 virus has had a profound impact on all sectors of the economy since 2020. In particular, the global pandemic has brought unprecedented challenges to companies' overseas expansion. Due to changes in the external environment, such as lockdowns in various countries, travel restrictions, and trade stagnation, companies looking to enter overseas markets have been forced to significantly change their traditional entry strategies.

Against the backdrop of the pandemic-induced turmoil in the global economy, some companies chose to avoid setting up traditional physical bases and adopt flexible market entry strategies leveraging digital technology.

At that time, the flow of people and business came to a complete halt. In particular, among the companies that demonstrated resilience during the pandemic, new strategies such as remote market entry and supply chain reorganization stood out. This shows that companies can find growth opportunities even in difficult situations by deviating from traditional business models and adaptively responding to changes in the environment. Companies that diversified their supply chains and formed strategic partnerships with local partners aimed to expand their markets.

キーワード : 市場参入戦略、戦略提携、合弁、M&A、COVID-19、

Keywords : Market Entry Strategy, Strategic Alliances, Joint Ventures, M&A, COVID-19

1. はじめに

1.1 背景

現代は、かつてない危機との隣り合わせの時代である。イアン・ブレマーは、「現在、我々は3つの世界危機に直面している」¹⁾とする。そして、その危機は、(1)パンデミック、(2)気候変動、(3)破壊的な新技術であるとしている。

歴史上、大きな危機が世界に与えた影響は深刻であ

り、その後の国際経済や政治秩序にも永く影響を及ぼしてきた。例えば、二つの世界大戦、そして冷戦後のソ連・東欧の大崩壊は、これまでの歴史の中で重大な転換点を作り出した。Jones (2005)²⁾によれば、二つの対戦と冷戦は分断の時代であり、その後の中国の改革開放政策の開始が、第2次グローバル経済の歴史的開始点であるとする。

昨今では、今回分析対象とする COVID-19 (新型コロナウイルス感染症) パンデミックや、ロシアによるウク

*大同大学情報学部総合情報学科

ライナ侵攻、中東情勢やミャンマーの政変などの状況は、国際社会や国際ビジネスに大きな不安定要因をもたらしている。このようなリスクは、グローバル企業の外国市場参入戦略にも影響を及ぼしている。国際的な不安定性が増す中、多くの企業はリスク管理の観点からの戦略検討も必要になっている。

このような危機の時代において、特に戦略提携、合弁事業、M&A（合併・買収）といった外国市場参入戦略に変化が見られる。かつては積極的に行われていた戦略提携やM&Aは、図1が示すように減少し、企業が国境を越えて協力する際のリスクが一段と高まっていたように見える。

特に合弁事業の解消に関しては、日本企業がしばしば困難に直面することが指摘されている。

合弁事業が終了する際には、文化的な違いや経営方針の不一致が表面化し、事業解消がスムーズに進まないことが多い³⁾。

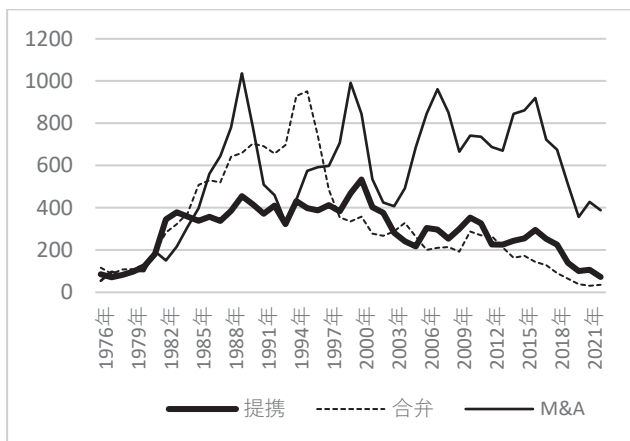


図1 外国市場参入戦略の変遷 1976-2022

出所：日経テレコンを基に著者作成。

このような状況から、企業の外国市場参入戦略は、今後外部環境に併せて更なる変化が望まれるのではないだろうか。企業は、危機の中で、リスク管理に注力する必要がある、同時に、新たな成長機会を見出すことが求められる。

本稿では、COVID-19（新型コロナウイルス感染症）パンデミックという21世紀前半に出現した新しい危機の中で、企業がどのように外国市場参入戦略を見直したのか、また、どのような新しい機会を得ることができたのかを分析する。

1.2 COVID-19（新型コロナウイルス感染症）

COVID-19（新型コロナウイルス感染症）の世界的な流行は、2020年以降、あらゆる産業に多大な影響を及ぼした。とりわけ国際的な事業展開を目指す企業に対

しては、これまでにないほどの厳しい状況となった。外国市場に参入しようとする企業は、各国のロックダウンや移動制限、貿易の停滞など、さまざまな外部環境の変化に直面し、従来の参入戦略を大幅に見直さざるを得なかった。加えて、久我（2021）⁴⁾によれば、パンデミックによって消費者の購買行動や価値観、さらには市場ニーズ自体も変化したため、企業は新しいビジネスモデルや市場戦略の構築を必要とした。

また、戸堂（2022）⁵⁾は、具体的には、感染拡大防止策として導入された国境を越えた移動制限や物流の停滞が、サプライチェーンに深刻な影響を与えたとする。それにより、企業の製品やサービスが従来の納入時間通りに市場へ供給されることが難しくなったものがある。これに伴い、グローバル企業は各国のサプライヤーへの依存度を見直し、サプライチェーンの分散化や再編を進めることが必要となった。

また、パンデミックの影響で、デジタル化への対応が外国市場参入戦略においても重要性を増した。

例えばeコマースの台頭やリモートワークの普及は、新たな商機を生み出した。そしてまた、物理的な店舗や従来型の市場参入手法に依拠する企業にも変革を迫ることとなった。

一方で、コロナ禍は各国の政治や経済政策にも大きな影響を与え、外国市場における参入リスクを一層複雑化させた。各国政府は感染拡大を抑制するため、さまざまな規制を強化し、外資系企業が現地市場に進出するためのハードルが高まった。

具体的には、厳格な入国制限や検疫措置があった。また、現地における健康・安全基準の強化は、それぞれの企業に大きな制約を課すこととなった。

また、各国でのワクチン接種の進展状況や医療体制の違いにより、市場ごとの対応が異なった。そのため、国ごとに個別の対応策を立案する必要があった。このような不確実性が高まる中で、外国市場への参入を模索する企業は、リスクマネジメントや柔軟な対応力の必要性がさらに増したと言える。

しかしながら、こうしたビジネス環境の中でも、新たな機会を捉え、成功を収めた企業もある。例えば、それは、デジタル技術の活用であり、また、各国あるいは現地のパートナー企業と連携を進めた企業である。それらは、その市場のニーズに応じた商品やサービスを提供することで、競争優位を確立した。

これらの企業は、迅速な意思決定や柔軟な戦略を用いることで、コロナ禍における市場の不確実性を乗り越え、成長を遂げている。

本稿では、コロナ禍における外国市場参入戦略の変化とその要因について、複数の事例をもとに分析する。

1.3 リサーチクエスション

従来の外国市場参入戦略は、コロナ禍という状況で、通用しづらくなった。企業は、その状況の中で、新しいアプローチを求められた。外国市場参入のカギとして、デジタル化やサプライチェーンの再編など、新しい戦略が、必要となっていた。本研究では、コロナ禍を契機にどのような外国市場参入戦略がとられ、企業がどのようにして新しい市場環境に適応しようとしたのかを明らかにしたい。

1.4 目的

本稿の目的は、COVID-19 (新型コロナウイルス感染症) パンデミック時に企業がどのようにして外国市場参入戦略を適応させたかを分析することである。特に、パンデミックという不確実な状況において、事業拡大の手段として重要であったクロスボーダー戦略提携、M&A (合併・買収) の変化を探ることを目的とする。複数の企業の事例を分析することで、サプライチェーンの混乱やデジタルコマースの台頭に対処するために企業が採った戦略を明らかにしたい。そして、今後の国際ビジネスに向けた示唆を得ることを目指す。

1.5 構成

本稿は以下のように構成される。

まず、1. はじめにでは、研究の背景として COVID-19 (新型コロナウイルス感染症) パンデミックが国際ビジネスに与えた影響を概説する。2 文献レビューにより、外国市場参入戦略や戦略提携、M&A に関する文献レビューで、パンデミック前後の動向に焦点を当てる。3. 研究方法、研究の問いと仮説を提示し、分析の基盤を固める。4. 研究結果では、クロスボーダー戦略提携、M&A に関する報道を対象としたテキストマイニングによる事例分析の結果を詳細に示す。5. 考察では、パンデミック時に成功した企業の戦略についての分析結果を議論する。6. 理論的・実務的貢献では結論として、企業戦略の進化に関する考察と、今後の研究課題について提言する。そして、7. 結論を置くこととする。

2. 文献レビュー

2.1 コロナ禍の経営の研究

Bolino, Whitney and Henry(2024)⁶⁾は、新型コロナウイルス感染症のパンデミックは、現代人の生活を大混乱に陥れたとし、コロナ禍が経営に与えた影響をテーマにした 69 本の論文を整理した。

池尾 (2021)⁷⁾は、新型コロナウイルスの流行は、日本のマーケティングに大きな変化をもたらし、マーケティング戦略の適応が重要な課題となっているとした。特にオンライン商談や D2C (Direct to Consumer:メー

カーが自社で企画・製造した商品を、EC サイトなどの自社チャネルを通じて直接消費者に販売するビジネスモデル。)、オムニチャネルの普及が、将来の流通チャネル戦略に与える影響を考察している。

2.2 コロナ禍の提携の動向

呉・藤川(2022)⁸⁾は、2020 年から 2022 年のコロナ危機で航空業界が大打撃を受けた中、ANA と JAL の経営戦略をダイナミック・ケイパビリティの視点から比較分析した。ANA は特殊な経営資源で柔軟に対応し、JAL は外部資源を活用して危機に対応したことが明らかにされた。

播磨(2022)⁹⁾は、コロナ禍で特に影響を受けやすい「トランスナショナル起業家」に焦点を当て、彼らのビジネスモデルへの影響と対応策を考察している。複数国の資源を活用する特性が危機時に戦略的オプションを提供する一方で、国際的な移動制限による深刻な課題にも直面していることが明らかにされた。

畑中 (2023)¹⁰⁾は、海外企業との戦略提携などにより市場の拡大を図ったゴールドウィンの事例についてまとめている。

Crick, J. M., & D. Crick, (2020)¹¹⁾ は、パンデミック危機における協調的な B2B マーケティング戦略について述べている。また、Lee and Trimi (2021)¹²⁾ は、デジタル時代と COVID-19 (新型コロナウイルス感染症) パンデミック危機におけるコンバージェンスイノベーションについて述べている。

2.3 コロナ禍の M&A の動向

M. Kumar and R. Pal (2021)¹³⁾ は、パンデミックによる経済不安や不確実性の増大が、M&A (合併・買収) のディール額や件数の減少につながったと指摘している。また、M&A オンラインによると、2020 年にはコロナ禍を境に海外 M&A が減少に転じ、年間 152 件にとどまり、前年の 199 件から約 25%減少した。2021 年には一時的な回復が見られたものの、2022 年には再び減少し、156 件にとどまった。ウクライナ戦争による地政学リスクや円安の進行が、この減少に影響を与えたとされる。

しかし、2023 年には日本においても新型コロナウイルスの流行状況も落ち着きをみせ、第 5 類感染症へ移行した。これに伴い、停滞を余儀なくされていた企業活動は徐々に活発化しつつある。

このような状況であったが、企業はパンデミック下での不確実な環境にどのように適応し、外国市場への参入戦略を再構築したのであるだろうか。

2.4 研究ギャップの特定

長期的な視点から見たパンデミック後の提携や M&A の持続的な影響についての研究はまだ十分に行

われていない。これが研究ギャップである。また、各国におけるサプライチェーンの再編成やデジタル戦略の実施が、企業の競争力にどのように貢献したかについての具体的な検証も、まだ十分ではない。

2.5 仮説

本研究では、COVID-19（新型コロナウイルス感染症）パンデミックが企業の市場参入戦略に与えた影響に関して、以下の仮説を設定する。

仮説：COVID-19 パンデミックによるサプライチェーンの混乱が、企業に多国間での戦略提携を促すなど、リスク分散を図る傾向が強化された。

3. 研究方法

3.1 研究デザイン

本研究では、記事データベースを対象にテキストマイニングを実施する。質的アプローチに量的側面を持つ計量テキスト分析を組み合わせた混合型のアプローチを実施する。

3.2 データ収集方法

COVID-19（新型コロナウイルス感染症）パンデミックが企業の外国市場参入戦略にどのような影響を与えたかを明らかにするため、2020年から2022年にかけてのクロスボーダー戦略提携・合併、M&Aに関する記事を対象に分析する。対象となる記事を対象にテキストマイニングを行う。

3.3 サンプル

分析の素材には、データベース「日経テレコン 21」を使用する。対象とする新聞は、日本経済新聞、日経産業新聞、日経 MJ（流通新聞）である。これらの新聞は、幅広い産業分野の情報を網羅しており、企業の外国市場参入戦略に関する実証的なデータを取得するのに適している。また、補足的に、日経バリューサーチを用いた。

まず、アジア、欧州、中東、アフリカ、北米、中米、南米、オセアニアの各地域を対象に、各国で報告されたクロスボーダー戦略提携及び M&A に関する記事を抽出した。この際、2020年から2022年の間に実施された取引に関する記事をキーワード検索で収集し、デジタル化、サプライチェーンの再編、リモートワークの普及、消費者行動の変化といった、パンデミックに関連する要因に焦点を当てた。次に、収集した記事をもとにテキストマイニングを行い、企業がどのような戦略を採用して外国市場に参入したのか、特にパンデミックによる外部環境の変化にどのように適応したのかを分析した。

3.4 分析手法

テキストマイニングの手法としては、キーワードの出現頻度分析や共起ネットワーク分析を実施し、どの地域や産業において、どのような傾向にあるかを検討した。さらに、パンデミック初期の2020年とその後の2021年、2022年における外国市場参入戦略の変化を時系列に比較した。

これにより、定性的な分析に加えて、量的なデータをもとにして、企業がコロナ禍にどのような市場参入戦略を取っていたのかを理解することが可能となった。本研究の結果は、パンデミック後の国際ビジネスにおける戦略策定に対する示唆をも提供しようとするものである。

4. 研究結果

4.1 提携の動向

提携に関する分析では、GM、ホンダ、トヨタといった自動車産業を代表する企業や、ソフトバンク、マイクロソフト、伊藤忠商事、シーメンス、富士フイルム、JAL、三井物産、東芝、パナソニックなど、幅広い業種の企業が検出された。これらの提携先は、中国、米国、韓国、ベトナム、フィリピン、シンガポール、英国、タイ、インドネシア、オーストラリアなど、地理的にも多岐にわたっている。特に、中国や米国といった主要市場に加え、東南アジア諸国やオセアニアも提携先として出現する。これらの地域でのビジネス機会が存在したことがわかる。

提携の目的は多様であり、図 2 の共起ネットワーク図が示すように、開発、サービス、販売、生産、製造といった分野が中心となっている。各企業は、それぞれの分野で強みを発揮し、他企業と協力することで技術革新や市場拡大を図っている。

4.1.1 自動車関連

自動車関連では、特に電動化や自動運転技術が注目されており、これに対応するための提携と見られる。たとえば、トヨタ自動車は、中国のスタートアップ企業モメンタと提携し、高精度地図作製技術の開発を進めている。トヨタはまた、自動運転技術に関する米オーロラ・イノベーションとの戦略提携や、車載電池リサイクル技術の開発に向けて米スタートアップのレッドウッド・マテリアルズと協力している。このように、トヨタは、さまざまなスタートアップ企業との提携を通じて、新たな技術の開発を積極的に進めている。

ホンダもまた、米ゼネラル・モーターズ（GM）との提携を強化し、四輪事業における基幹部品の共通化や電気自動車（EV）の共同開発を推進している。さらに、中国の自動運転スタートアップ「オート X」と提携し、

中国の公道で自動運転技術の共同研究を進めている。ホンダの戦略は、主要市場である米国と成長市場である中国の双方での技術開発を加速させることで、競争優位を確保することにある。

4.1.2 医薬関連

医薬関連の提携も活発であり、エーザイと米製薬大手ギリアド・サイエンシズとの間で関節リウマチ治療薬の販売提携が締結された。さらに、明治ホールディングス傘下の Meiji Seika ファルマは、米カドモンと共同で合併症治療薬の開発を進める合同会社へ出資している。また、大塚製薬の子会社の英アステックスと米製薬大手メルクの間では、がん領域における戦略提携が締結された。アステラス製薬は米スタートアップのサイトム X セラピューティクスと提携し、がん免疫関連の共同開発を進めている。このように、医薬品業界では、新薬の開発や治療法の革新に向けた戦略提携が進んでおり、特にがん治療や遺伝子治療に関する取り組みが目立つ。

また、塩野義製薬は、中国の保険最大手である中国平安保険と資本業務提携を結び、第一三共は米ウルトラジェニクスファーマシューティカルとの間で遺伝子治療薬の共同開発に取り組んでいる。これらの提携は、医療分野における革新的な技術や製品の開発を加速させ、国際的な市場での競争力を高めることを目的としている。

4.1.3 AI その他分野

新奇な分野として「空飛ぶクルマ」が注目されている。日本航空 (JAL) は、住友商事や米ベル・テキストロンと提携し、空飛ぶクルマの開発に取り組んでいる。空飛ぶクルマや空飛ぶタクシーの開発は、韓国や米国で特に活発化しており、今後、都市間の移動手段として実用化が進むことが期待されている。

人工知能 (AI) 分野でも、さまざまな提携が実施された。

丸紅は、米国の AI 開発企業プレディと戦略的パートナーシップを締結した。それは、機械の故障予知や故障個所の迅速な特定を可能にする AI 技術の開発である。

また、損害保険ジャパンは、イスラエルの新興企業ジオエックスと提携し、AI を活用して航空写真を基に建物情報を解析する技術を導入している。これにより、中小企業向け火災保険の契約判断や保険料の算出を短時間で行うことが可能にすることを目的とする。

また、伊藤忠商事は、AI ツールを開発する米スタートアップのデータロボットと業務提携を結び、AI を活用した治験データの解析事業に参画した。

さらに、日立製作所と米マイクロソフトは、製造業や物流業界向けの IT サービスで提携している。日立が開

発した工場の効率化を図る「IoT (モノのインターネット)」システムを、マイクロソフトのクラウド基盤と組み合わせることで、より効率的な生産体制を構築しようとしている。このように、AI や IoT などの先端技術を活用した提携が、製造業や物流業界における競争力の強化に貢献している。

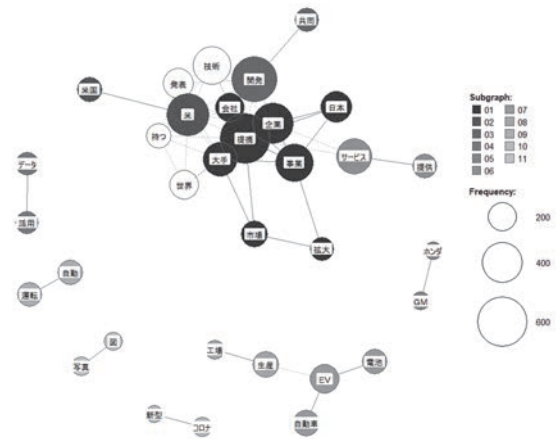


図2 共起ネットワーク図：提携
出所：KHorder を用いて、著者作成。

4.1.4 小括

以上のように、COVID-19 (新型コロナウイルス感染症) による市場変動や技術革新において、企業は他企業との提携を通じて新たな市場機会を創出し、成長を目指していった。これらの提携は、企業間のビジネスの枠組みを再構築し、新しい競争環境に適応するための重要な手段となっている。

4.2 合併の動向

コロナ禍における合併事業の動向は、図3が示すようにEV (電気自動車) や建設などにおいて、技術開発、生産、販売などで実施された。重要な企業戦略の一環として注目されている。特に、日本企業の海外進出や協業の形態が変化している中で、日立製作所とトルコの家電大手アルチェリクとの合併事業設立が代表事例である。

また、ホンダも中国の IT 大手と合併会社を設立する計画を発表した。

4.2.1 日立とアルチェリクの合併事業

日立グローバルライフソリューションズ (以下、日立 GLS) は、2020 年 12 月 16 日にトルコの家電メーカーアルチェリクと合併会社を設立することを発表した。この合併会社は、日立 GLS が保有する海外の白物家電事業を移管し、新たに設立されたものである。この合併会社について、日立 GLS が 40%、アルチェリクが 60% の持ち株比率とした。日立からの譲渡価格は約 3 億ドル (約

315 億円) であった。移管される事業には製造会社 2 社と販売会社 10 社が含まれ、従業員数は約 3,800 人、売上高は 1,000 億円を超える規模であった。

この合弁事業の目的は、両社の強みを活かし、競争力のあるサプライチェーンを構築することにある。日立から離れるものの、日立ブランド製品のグローバル販売を拡大し、新市場への参入や取扱製品の拡大を目指している。新会社はアジア・太平洋地域を中心に営業を開始し、冷蔵庫や洗濯機などの日立ブランド製品の製造・販売およびアフターサービスを提供することとなった。

4.2.2 ホンダと東軟集団の合弁事業

ホンダは、中国の IT 大手である東軟集団との合弁会社設立を発表した。この合弁事業は、ホンダが自社の技術力と東軟集団の IT 技術を融合させ、新たなビジネスモデルやサービスを開発することを目的としている。

この動きは日本企業がデジタル化や IT 分野での競争力強化を目指していることを示している。

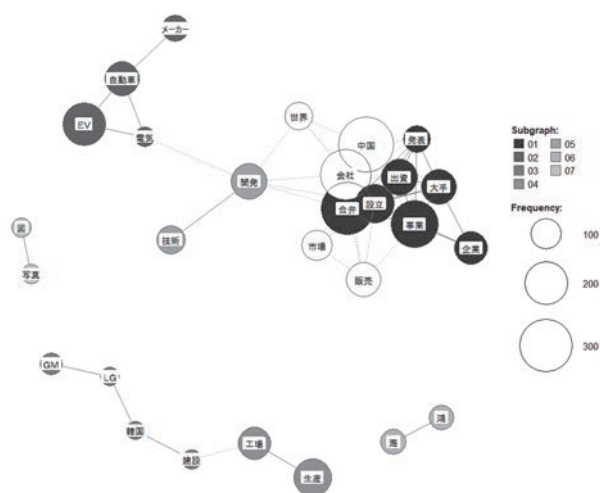


図 3 共起ネットワーク図：合弁
出所：KHcorder を用いて、著者作成。

4.2.3 小括

コロナ禍により、多くの企業が経営環境の変化に直面した。合弁事業は、国際的な移動制限や市場の不確実性が高まる中で、リスク分散や資源の最適化の手段として重要視されている。特に海外市場への参入においては、現地企業との合弁が成功のかぎとなるケースがある。

コロナ禍は合弁事業に新たな形態や戦略をもたらした。日立とアルチェリク、ホンダと東軟集団との合弁事業は、パートナーの強みを活かす企業がグローバル市場で競争力を維持・強化するための重要なステップで

ある。各企業はそれぞれの強みを活かしながら新たなビジネスチャンスを探求していくであろう。

4.3 M&A の動向

M&A (合併・買収) もまた、近年のビジネス環境において重要な戦略として位置付けられている。特に、東芝、マイクロソフト、ソニー、日立、ソフトバンク、パナソニック、インテルなどの IT 企業が M&A を活用する上位に挙げられる。図 4 では、事業拡大や成長などが共起している。また、その対象となる国や地域には、米国、中国、韓国、インド、インドネシア、オーストラリア、フランス、カナダ、英国、ドイツ、ロシア、フィリピンが含まれている。

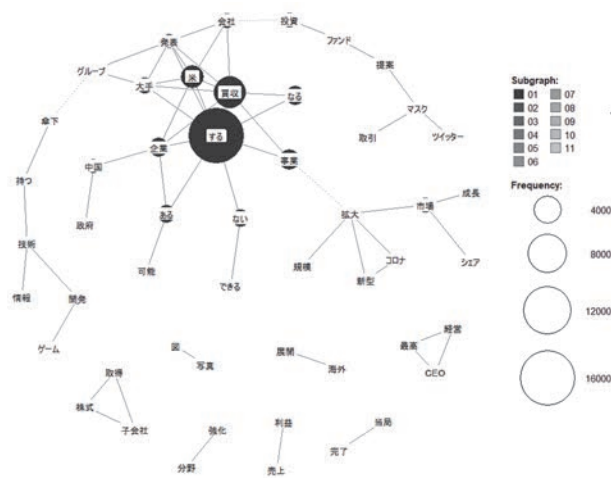


図 4 共起ネットワーク図：M&A
出所：KHcorder を用いて、著者作成。

4.3.1 M&A の目的

M&A の目的は主に拡大や成長、販売、生産、製造などであるが、「再編」という単語が「事業再編」という形で使用されている。

4.3.2 日立の M&A

例えば、日立製作所はスイスの重電大手 ABB から送配電事業を 7400 億円で購入し、「日立 ABB パワーグリッド」を設立した。また、IoT 事業の強化を目的として英センサー企業のパーペチュウムを買収し、さらに米国 IT 企業グローバルロジックも買収している。これらの事業買収を進める一方で、日立化成などの非中核子会社や医療事業を売却することで事業構造を改革している。

この日立の ABB からの送配電事業の買収は 2020 年 7 月に発表された。この買収により日立は ABB の送配電事業を取り込み、その売上高は年間 1 兆円規模である。ABB は世界約 90 カ国で 1 万 5000 社以上の顧客に電力変圧器や送電システムを提供している。この買収

によって日立はグローバルな競争力を強化することを目指している。

4.3.3 小括

このような M&A や事業再編は食品業界や鉄道車両業界などでも行われた。多様な分野で企業の競争力向上が図られている。特に食品業界ではカルフルなどが再編を進めており、市場環境の変化に対応するための動きが見られる。

このように、企業は M&A や事業再編を通じてグローバル市場での競争力を強化し、新たな成長機会を追求している。今後もこの傾向は続くと考えられ、多くの企業が新たなビジネスモデルや市場開拓に M&A の活用は続くと思われる。

4.4 コロナ禍外国市場参入戦略の経年変化

COVID-19（新型コロナウイルス感染症）パンデミック期間中の主な変化は、表 1 の特徴語の変化で確認する。

表 1 特徴語の経年変化

提携					
2020年		2021年		2022年	
開発	344	提携	377	提携	259
発表	318	米	325	サービス	233
米	296	大手	297	世界	229
技術	277	企業	294	市場	222
中国	238	目指す	292	発表	220
持つ	235	会社	285	企業	212
日本	233	サービス	274	販売	212
コロナ	231	事業	267	事業	201
共同	221	持つ	263	投資	200
ほか	214	出資	250	拡大	196
合併					
2020年		2021年		2022年	
会社	383	供給	378	今後	347
合併	380	メーカー	356	設立	340
設立	369	大手	351	合併	337
事業	341	完成	314	出資	314
海外	340	拡大	304	開発	313
出資	333	計画	294	事業	306
中国	329	米	286	最大	296
現地	321	発表	284	販売	279
グループ	316	自動車	281	世界	273
持つ	305	中国	273	目指す	271
M&A					
2020年		2021年		2022年	
事業	277	買収	352	買収	319
企業	253	大手	330	米	285
会社	251	発表	324	経営	241
拡大	244	米	315	同社	221
米国	220	企業	302	責任	205
持つ	219	市場	283	最高	202
世界	213	投資	242	示す	200
投資	213	株式	239	取得	195
規模	207	経営	232	グループ	193
傘下	206	持つ	227	完了	188

出所：KH Coder を用いて著者作成。

提携では、2020 年は、開発に関する提携が特徴語として挙げたが、2021 年からは、それは消えた。また、国名では、中国も 2020 年に挙がっていた（塩野義製薬、中国平安保険と資本業務提携など）。その後、2021 年から上位からは消えた。2021 年・2022 年には、サービスという言葉が挙げた（2021. SOMPOホールディングスは、米ゼネラル・モーターズ（GM）などの出資を受ける車体データ収集の英スタートアップ、Wejo（ウィージョ）と資本業務提携する。SOMPOは同社

が日本市場で今後集める走行データなどを解析し、コネクテッドカー（つながる車）に関連したサービスを開発する。）。

合併では、2020 年、トヨタ自動車は中国の電気自動車（EV）大手の比亞迪（BYD）と、EVの研究開発を進める合併会社を設立したが、2021 年・2022 年に中国という国名は、減少した。

また、M&A では、米国（2022. 武田薬品工業は、米スタートアップを 40 億ドル（約 5500 億円）で買収する）があり、投資という言葉が挙がっていた。

いわゆるコロナ禍にあたる 3 年間でも、各企業の活動には差異がある。また、サプライチェーン（供給網）の脆弱性が指摘されたが、その見直しも行われつつある（2022. サッポロ・ホールディングスは、北米でのビールの製造拠点を構える）。

5. 考察

本研究の結果は、COVID-19（新型コロナウイルス感染症）パンデミックが企業の市場参入戦略や戦略提携、M&A に与えた大きな影響を示している。パンデミックによる世界的な経済混乱の中、企業は物理的な拠点をを用いた従来型の戦略に加え、デジタル技術を活用した柔軟な市場参入を進めた。

人流が止まり、ビジネスの流れも停滞した。その中で、リモート市場・オンライン市場参入やサプライチェーンの再編成といった新しい戦略が、パンデミック時においても積極的に外国市場参入を目指した企業において顕著に見られた。このことは、企業が従来のビジネスモデルに固執せず、環境の変化に応じて柔軟に対応することの重要性を示している。つまり、逆境下でも成長機会を見出すことが可能であることを示唆している。サプライチェーンの多様化や、ローカルパートナーとの戦略提携が成功した企業では、リスクを分散させながらも市場シェアを拡大することを目指した。

これらの結果は、企業がパンデミック後の世界においても、デジタル技術とグローバルな連携を活用し続けることで、持続的な競争力を維持するであろう。

6. 理論的および実務的な貢献

6.1 理論的貢献

本研究は、理論面では、コロナ禍（COVID-19（新型コロナウイルス感染症）パンデミック）におけるクロスボーダー戦略提携と M&A の戦略的变化について、理論的視座を提供する。パンデミックという不確実性の高い外部環境が企業の外国市場参入戦略に与えた影響を

分析した。ここでは、従来の戦略理論に新たな洞察を加えた。

第一に、従来の市場参入戦略における「物理的拠点」への依存が、パンデミック下で大幅に削減された。そして、オンラインに重きを置くデジタル市場への参入の概念を提示した。また、IoT や Ai といったデジタル技術の活用による製品やサービスを用いるアプローチである。

第二に、本研究はサプライチェーン理論の拡張を試みた。パンデミックにより、グローバル企業は既存のサプライチェーンを再編し、分散型のリスク分散戦略を採用した。この結果、サプライチェーンの分散化と再編成が、今後のクロスボーダー戦略提携、M&A におけるリスク管理の重要な要素であることを示している。

6.2 実務的貢献

実務面では、本研究は企業がパンデミックや将来的な危機に対処するためにどのような戦略的対応を取るべきかについて、実践的な示唆を提供している。特に、サプライチェーンの多様化やデジタル技術の活用を含む市場参入が、企業のリスク管理および成長戦略の中核に位置付けられるべきであることを示している。

さらに、パンデミック後の新しい国際ビジネス環境において、企業はより柔軟で迅速な意思決定を行うために、ローカルパートナーとの提携を強化することが求められている。グローバルなサプライチェーンをアップデートすることにより、企業は市場の不確実性を乗り越え、持続的な競争力の維持を目指す。

7. 結論

本研究では、COVID-19 (新型コロナウイルス感染症) パンデミックが企業の外国市場参入戦略に与えた影響を分析し、特にクロスボーダー戦略提携および M&A の動向に焦点を当てた。パンデミックによる世界的な経済混乱は、多くの企業が従来の市場参入モデルを見直す契機となった。特にデジタルを用いた製品やサービスによる市場参入やサプライチェーンの再編成が、企業の競争力を高めるための重要な要素となっていた。

しかし、本研究には限界もあり、特にパンデミック後の長期的な企業戦略の成果については、今後のさらなる研究が必要である。また、地域や業種ごとの具体的な戦略の違いに関する詳細な分析が不足しているため、これも将来的な研究の課題となるだろう。

7.1 研究のまとめ

コロナ禍では、企業は従来の市場拡大戦略を見直し、戦略提携や M&A を通じて新たなビジネスモデルを模索した。特に、IT 企業や製薬業界における活動が目立ち、AI

やデジタルエンジニアリング分野での提携が進行した。例えば、日立製作所は米国 IT 企業グローバルロジックを買収し、IOT 事業を強化する一方で、日立化成などの非中核事業を売却し、事業再編を進めている。

外国市場参入のための戦略提携(提携、合併)及び M&A、は、いずれもこの期間の実行件数はコロナ禍以前より少なかった。

しかし、日立のようにコロナ禍後を見据えて、事業再編を実施した企業がある。つまり、事例は少なくとも外国市場参入戦略の重要性が増していた。

7.2 限界

本研究にはいくつかの限界が存在する。第一に、本研究は主に記事データに基づいており、実際の企業経営者や関係者へのインタビューなどのデータは用いていない。

このため、企業が採った戦略や意思決定の背景にある動機や、詳細なプロセスについては十分に明らかにできていない可能性がある。第二に、パンデミック中に実施された M&A や戦略提携の長期的な成果については、まだ十分に検証されていない。第三に、本研究では特定の地域や業種に焦点を当てていないため、地域的・業種別の戦略の違いに関する深掘りが不足している可能性がある。

7.3 将来の方向性

今後の研究では、次の点を深く掘り下げたい。

まず、定性的なアプローチを用いた企業の具体的な戦略的意思決定プロセスの検討が求められる。

特に、企業がどのようにしてパンデミック時のリスクを評価し、どのような基準で提携や M&A を実施するかについて、現場の視点から明らかにしたい。

さらに、地域別や業種別の M&A や戦略提携の動向に関する詳細な比較研究が必要である。特定の地域や産業における違いを分析することで、より具体的かつ有効なビジネス戦略の提言が可能になるだろう。また、デジタル化やリモートワークの進展が企業のグローバル展開に与える影響をより詳細に分析し、ポストパンデミック時代の新しいビジネスモデルに関する洞察を今後の課題としたい。

8. おわりに

本研究では、コロナ禍におけるクロスボーダー戦略提携と M&A の変遷をスケッチし、その特徴を明らかにした。

本研究 7.2 で述べたように、研究の限界が存在する。しかし、世界で 540 万人以上、日本だけでも 8 万人以上の死者が確認された COVID-19 (新型コロナウイルス感染症) パンデミックという危機の時代を共有した一人として、この時代に焦点をあてた研究を残す必要が

あると考えた。

コロナ禍によって企業の外国市場参入戦略は一時的に減少あるいは停滞したものの、特定の産業においては、新たな技術や市場ニーズに対応する形での提携やM&Aが進展していることが確認された。今後の研究では、これらの戦略が実際に企業の成長や競争力向上にどのように貢献したのかを、さらに詳細に分析する必要がある。

9. 謝辞

本研究は、「国際ビジネス研究学会」国際ビジネス研究学会第30回年次大会（2023年10月22日）において、徳田昭雄先生（立命館大学経営学部教授）はじめとする皆様からご助言をいただきました。また、本研究には、大同大学2024年度研究奨励金の支援を受けました。ここに、心よりお礼を申し上げます。

10. 参考文献

- 1) Bremmer, I. (2022) *The power of crisis: how three threats—and our response—will change the world*. Simon and Schuster.
- 2) Jones, G. (2005) *Renewing Unilever: transformation and tradition*. Oxford University Press. (江夏健一・山中祥弘・山口一臣監訳, ハリウッド大学院大学ビューティビジネス研究所訳 (2013)『多国籍企業の変革と伝統: ユニリーバの再生 (1965~2005年)』文眞堂。)
- 3) 日本経済新聞 2024年9月15日。
- 4) 久我尚子(2021) 「ウィズコロナの消費行動の変容とポストコロナに向けた考察」『資本市場』(432), 14-22頁。
- 5) 戸堂康之 (2022) 「COVID-19がグローバル・サプライチェーンを通じて経済に及ぼした影響—感染拡大期における研究のサーベイ—」『国際経済』73, 99-124頁。
- 6) Bolino, M. C., Henry, S. E., and J. M. Whitney (2024) “Management implications of the COVID-19 pandemic: A scoping review.” *Journal of Management*, 50(1), pp.412-447.
- 7) 池尾恭一 (2021) 「新型コロナ危機による流通チャネル変革と戦略課題」『マーケティングジャーナル』41(1), 6-15頁。
- 8) 吳文琪・藤川なつこ (2022) 「コロナ危機を乗り越えるための航空会社の経営戦略—ダイナミック・ケイパビリティの視点を中心に—」『日本経営診断学会論集』22, 102-108頁。

- 9) 播磨亜希 (2022) 「コロナ禍のなかでのトランスナショナル創業—欧州の事例を中心に—」『日本政策金融公庫論集』日本政策金融公庫総合研究所 編, (55), 41-64頁。
- 10) 畑中艶子 (2023) 「スポーツウェア企業の成長プロセスと経営戦略に関する考察—ゴールドウインの事例—」『関西ベンチャー学会誌』15, 1-11頁。
- 11) Crick, J. M., and D. Crick (2020) “Coopetition and COVID-19: Collaborative business-to-business marketing strategies in a pandemic crisis.” *Industrial Marketing Management*, 88, pp.206-213.
- 12) Lee, S. M., and S. Trimi (2021) “Convergence innovation in the digital age and in the COVID-19 pandemic crisis.” *Journal of Business Research*, 123, pp.14-22.
- 13) Kumar, M., and R. Pal (2021) “The Coronavirus Crisis' Effect on Mergers and Acquisitions Activity.” *International Journal of Innovative Research in Technology*, pp. 248-49.

調和優函数の存在の諸相

Various aspects with the existence of harmonic majorants

中井三留*, 成田淳一郎**, 瀬川重男***

Mitsuru Nakai, Junichiro Narita, Shigeo Segawa

Summary

The systematic study of the classification theory of open Riemann surfaces concerning Hardy spaces, was initiated by Parreau in 1951. In 1969, Heins completed the final form of the chain of strict inclusion relations of null classes of open Riemann surfaces related to Hardy spaces of all exponents $0 < p \leq \infty$. Heins made a quite effective use of the infiniteness of genera. However, Heins himself proposed the study to reproduce the above Heins diagram only for open Riemann surface of finite genus, and so in essence, for plane regions. We call this investigation theme as the Heins problem. In 1973, Hejhal showed that a major part of the Heins problem for Hardy spaces of exponents $1 \leq p \leq \infty$ can be resolved. In 1978, Hasumi published the paper very important from two view points: firstly it presented concrete examples of removable plane compact sets for Hardy-Orlicz spaces; secondly it has been recognized as to have resolved the Heins problem completely for Hardy spaces of all exponents $0 < p \leq \infty$. The purpose of our present paper is, nevertheless, to attract attentions of possible mathematicians who are still interested in the Heins problem to our doubt about the recognition that the Heins problem is presently completely settled.

キーワードとフレーズ : ハーディー空間, ハーディー-オールリッツ空間, 除去可能集合.

Keywords and Phrases : Hardy space, Hardy-Orlicz space, removable set.

0. 序論

Reimann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ の双曲的部分領域 W の任意に定めた参照点 $a \in W$ に関する W の調和測度を ω とする. $\bar{W} := W \cup \partial W$ 上の拡張実数値連続函数 w , 即ち連続写像 $w : \bar{W} \rightarrow \mathbb{R} := [-\infty, +\infty]$, を考える. これが非負値, $w(z) \geq 0$ ($z \in W$) であり, 更に W 上劣調和とする. これに対して W 上の調和函数 u があって, $w(z) \leq u(z)$ ($z \in W$) となるとき, u は W 上の調和優函数であると言う.

問題 0.1. w が W 上調和優函数を持つ条件を求めよ.

求める条件は w が W 上優調和優函数を持つことであると言う殆ど自明な言い換えを超えた一般的条件を与えることは意外と容易でない. 次の陳述について考えてみよう.

定理 0.2 w の W での境界値を f と記す. 即ち $f := w|_{\partial W}$ とするとき, $f \in L^1(\partial W, \omega)$ ならば, w は W 上調和優函数を持つ.

大学の数学専攻学部上位学年向けの函数論特論コース等で PWB(即ち Perron-Wiener-Brelot) 流の Dirichlet 問題が講ぜられるとき, 後々の為の教訓としての注意喚起の意味も込めての恰好の演習問題として, 上の陳述が下記するその証明と称するもの共々紹介されることが多い: 定理 0.2 の証明(牴牾)を次に述べるのであるが, それに先だつて $\hat{\mathbb{C}}$ の双曲的領域 W 上の \mathbb{R} 値の境界値 f の Dirichlet 問題 (W, f) の PWB 法による Dirichlet 解 H_f^W の構成手続きを想起しておきたい.

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 30D55; Secondary 30C85, 30D15, 30F20

* 名古屋工業大学名誉教授, 元本学客員教授

** 本学特任教員, 本学名誉教授

*** 本学名誉教授

各 $\zeta \in \partial W$ に対し W 上の

$$\liminf_{z \in W, z \rightarrow \zeta} s(z) \geq f(\zeta)$$

となる下に有界な優調和函数 s の全体を $\overline{\mathcal{S}}_f^W$ と記し, 更に $\underline{\mathcal{S}}_f^W := -\overline{\mathcal{S}}_{-f}^W$ とする. これらが空でないときは, $\underline{\mathcal{S}}_f^W \leq \overline{\mathcal{S}}_f^W$ が示され, $\underline{\mathcal{S}}_f^W$ と $\overline{\mathcal{S}}_f^W$ はそれぞれ劣調和と優調和函数の Perron 族であるので

$$\overline{H}_f^W(z) := \inf_{s \in \overline{\mathcal{S}}_f^W} s(z) \quad (z \in W)$$

と置き, 更に $\underline{H}_f^W := -\overline{H}_{-f}^W$ と置けば, これらは W 上の調和函数で $\underline{H}_f^W \leq \overline{H}_f^W$ となる. この様に境界値 f に対し, \overline{H}_f^W と \underline{H}_f^W が共に定義出来るとき, 更に W 上 $\overline{H}_f^W \equiv \underline{H}_f^W$ となるならば, この共通の調和函数 H_f^W を Dirichlet 問題 (W, f) の PWB の意味での Dirichlet 解と言い, そのときの境界値 f は W に関して可解であると言う. この基礎的定義 (手続き) を定めた上で, f が可解となる条件, 及びそのとき $\zeta \in \partial W$ が正則点, 即ち,

$$\lim_{z \in W, z \rightarrow \zeta} H_f^W(z) = f(\zeta)$$

となる点であるための条件を与えて, PWB 式の Dirichlet 問題は講了となる. その内でも $f \in C(\partial W)$ (即ち, f の ∂W 上の有界連続性) の可解性は基本事項の中でも特に重要なものの一つで, 任意に固定された参照点 $a \in W$ に対して, 写像

$$f \mapsto H_f^W(a) : C(\partial W) \rightarrow \mathbb{R}$$

は正值線形汎函数を与えるので, Riesz の表現定理により ∂W 上の確率測度 ω が定まり

$$H_f^W(a) = \int_{\partial W} f(\zeta) d\omega(\zeta) \quad (f \in C(\partial W))$$

となる. この ω をもって W の参照点 a に対する調和測度と定めるのであった. ここで登場するのが問題の次の Dirichlet 問題 (W, f) の基本定理の一つである: Dirichlet 問題 (W, f) の境界値函数 f が可解となるための必要十分条件は

$$f \in L^1(\partial W, \omega) \quad (\text{即ち, } \int_{\partial W} |f(\zeta)| d\omega(\zeta) < +\infty)$$

であり, そのとき

$$H_f^W(a) = \int_{\partial W} f(\zeta) d\omega(\zeta) \quad (f \in L^1(\partial W, \omega))$$

である. 以上で Dirichlet 問題 (W, f) の PWB 流解法に関する基本事項等の想起を終了とする.

\hat{C} の双曲的領域 W に対し, W の任意に選定した参照点 $a \in W$ に対する調和測度を ω とし, 更に $\overline{W} = W \cup \partial W$ 上の \mathbb{R} 値広義連続函数 w で, $w(z) \geq 0$ ($z \in \overline{W}$) かつ $w|_W$ が W 上劣調和であるような函数 w が与えられているとして $f := w|_{\partial W}$ と置くと, $f \in L^1(\partial W, \omega)$ ならば w は W 上調和優函数を持つと主張する定理 0.2 の “証明” を下記する:

定理 0.2 の証明 0.2: $f \in L^1(\partial W, \omega)$ なので, Dirichlet 問題 (W, f) の境界値函数 f は可解である. だから, 特に W 上の調和函数 \overline{H}_f^W が定義出来るが, その前提として $\overline{\mathcal{S}}_f^W \neq \emptyset$ なので, W 上の優調和函数 s で $s \in \overline{\mathcal{S}}_f^W$ となるものが存在する. このような s を任意に選べば, 各 $\zeta \in \partial W$ に対して

$$(0.3) \quad \liminf_{z \in W, z \rightarrow \zeta} s(z) \geq f(\zeta) \quad (\zeta \in \partial W)$$

である. w は \overline{W} 上連続で, $f = w|_{\partial W}$ なので

$$(0.4) \quad f(\zeta) = w(\zeta) = \lim_{z \in W, z \rightarrow \zeta} w(z) = \limsup_{z \in W, z \rightarrow \zeta} w(z) \quad (\zeta \in \partial W)$$

だから, (0.3) と (0.4) 併せて, 各 $\zeta \in \partial W$ に対し

$$\limsup_{z \in W, z \rightarrow \zeta} w(z) \leq \liminf_{z \in W, z \rightarrow \zeta} s(z) \quad (\zeta \in \partial W)$$

となる. W 上 w (または s) は劣調和 (または優調和) なので, 最大値原理により W 上

$$w(z) \leq s(z) \quad (z \in W)$$

である. $s \in \overline{\mathcal{S}}_f^W$ の任意性により, 又 f の可解性により, 各 $z \in W$ で

$$w(z) \leq \inf_{s \in \overline{\mathcal{S}}_f^W} s(z) = \overline{H}_f^W(z) = H_f^W(z) \quad (z \in W)$$

である. 故に w は W 上 H_f^W を (実は最小の) 調和優函数に持つことが従う. □

上の証明牴牾によれば, 定理牴牾 0.2 は, 実は更に詳しく, $f = w|_{\partial W} \in L^1(\partial W, \omega)$ ならば H_f^W が w の W 上の最小調和優函数である, という主張をしていることになる. $f \in L^1(\partial W, \omega)$ は H_f^W の存在条件に他ならず, H_f^W の PWB 式の構成法から見ると $w|_W$ の劣調和性故 H_f^W は $w|_W$ の最小調和優函数であると結論することは, いかにも自然な流れで, これにより, 定理牴牾 0.2 が純正な定理面をして出現することを許容する向きの絶えない理由かも知れない. 今更言うまでもなく定理牴牾 0.2 の主張は下記する反例 0.8 も示す通り一般には成立しないことは明白であり, 従って, その証明として述べた所の証明牴牾もどこかに瑕疵を含む訳で, その指摘が, 上述の累々繰り返される困った状況絶滅を期して示される注意喚起の演習問題としての課題であった. ところで, 更に w が \overline{W} 上有界 (あるいは, 同等の条件として, $f = w|_{\partial W}$ が有界) である場合には, 上の証明牴牾の論証はすべて正当で, その結果, 定理牴牾 0.2 の主張自身も完璧に成立する. つまり定理牴牾 0.2 も, その証明牴牾も, $w|_{\partial W} = f$ が有界の場合に限定すれば, 共に牴牾が撤去出来て本来の意味での純粹の定理であり, その文字通りの証明である. 但し, それらは完全に自明である.

一般に, Dirichlet 問題 (W, f) に於いて, f が ∂W 上有界の場合に成立するところが, f が ∂W 上非有界としても大体形式的には大差なく進行すると, 直感的には考えがちである点に, 実は大変慎重な注意を要するところであるが, 定理牴牾 0.2 やその証明牴牾が受け入れられてしまう今一つの根底には, $w|_{\overline{W}}$ が有界の場合の印象が, $w|_{\overline{W}}$ が非有界ともなる一般の場合での残像印象形成に於ける騙し絵的效果に支えられるところに起因するかも知れぬ.

途中からではあるが, 以下引用の簡単の為, 定理牴牾 0.2 の仮定と結論の 2 条件にそれぞれ次のようなラベルを貼ろう:

- (甲) $f = w|_{\partial W} \in L^1(\partial W, \omega);$
 (乙) $w|_W$ が W 上 調和優函数を持つ.

“定理牴牾 0.2 : (甲) \Rightarrow (乙)” が何故か受け入れられて終う理由を上にあれこれ探ってみて, 注意深くあるべき f の有界性と非有界性の相違を見逃すことに理由を求めた. しかし, もっと直接的な次の理由の方が更に実情に近いかもしれぬ. その為に (甲), (乙) の 2 条件が現れる状況に於ける条件 (甲) の立位置を把握しておきたい.

注意 0.5. 条件 (甲) は条件 (乙) 成立のための必要条件であるが, 即ち, (乙) \Rightarrow (甲) であるが, 十分条件ではない, 即ち (甲) $\not\Rightarrow$ (乙) である.

証明. 先ず (乙) \Rightarrow (甲) を示す. その為 $w|_W$ が W 上調和優函数 u を持つと仮定する: $0 \leq w(z) \leq u(z)$ ($z \in W$). 各 $\zeta \in \partial W$ に対し

$$f(\zeta) = w(\zeta) = \lim_{z \in W, z \rightarrow \zeta} w(z) = \liminf_{z \in W, z \rightarrow \zeta} w(z) \leq \liminf_{z \in W, z \rightarrow \zeta} u(z)$$

だから, $u \in \overline{\mathcal{S}}_f^W$ となり, よって $\overline{H}_f^W = \inf\{s : s \in \overline{\mathcal{S}}_f^W\}$ が W 上の調和函数として定まり

$$(0.6) \quad \overline{H}_f^W(a) \leq u(a)$$

となる. $f = w|_{\partial W}$ に対し $f_n \in C(\partial W)$ ($n \in \mathbb{N}$) を各 $\zeta \in \partial W$ につき

$$f_n(\zeta) := \min\{f(\zeta), n\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

で定めると, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し f_n は可解故 $H_{f_n}^W$ が定まり, $f_n \leq f$ により

$$\int_{\partial W} f_n(\zeta) d\omega(\zeta) = H_{f_n}^W(a) = \overline{H}_{f_n}^W(a) \leq \overline{H}_f^W(a)$$

が従う. これと (0.6) を合わせて

$$(0.7) \quad \int_{\partial W} f_n(\zeta) d\omega(\zeta) \leq u(a) \quad (n \in \mathbb{N})$$

が出る. 再び $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \nearrow f$ に注意して, Fatou-Lebesgue の収束定理を (0.7) に適用すると

$$\int_{\partial W} f(\zeta) d\omega(\zeta) = \int_{\partial W} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\zeta) \right) d\omega(\zeta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial W} f_n(\zeta) d\omega(\zeta) \leq u(a) < +\infty$$

が導出出来る. よって, $f \in L^1(\partial W, \omega)$, 即ち, (甲) が (乙) から導かれる: (乙) \Rightarrow (甲). 最後に, (甲) $\not\Rightarrow$ (乙) は下記する反例 0.8 の示すところである. \square

こうして上述の注意 0.5 により, (甲) と (乙) 2条件の相互的位置は明確になった: (甲) $\not\Leftarrow$ (乙). さて定理 0.2 (: (甲) \Rightarrow (乙)) が幅を利かすのは何故かを探っているのであるが, とにかく (乙) 成立を切実に希求しているとして, (甲) 無しでは駄目で, どうしても (甲) は要るのであるが, その上 (甲) だけでは駄目なことが, 下記の反例 0.8 で注意されている. と言っても, 例示されている (W, w) はあまりにも特異な状況にあり, 普通なら例外的扱いを受けるところで, 学び初めの段階にある初心者なら誰しも真面目に受け入れる注意であるが, 時を経て馴れてくると, 通常なら (甲) $\not\Leftarrow$ (乙) は無視してよい位特異なものと感じるようになる. (甲) はどうしても要るが, 他に何か付帯的条件があれば, そして大抵はそれもほとんど不要で, (乙) が出てくるといふ具合に, この件が感覚的におさまる気分が収束していく. これら様々な背景に裏打されて, いつしか (甲) \Leftrightarrow (乙) に変貌しこれが当然のこととなって終う. これが誠に不条理ながら, 定理 0.2 が適用される実情かもしれぬ.

反例 0.8 $\hat{\mathbb{C}}$ の双曲的領域 W として穴空き単位円板

$$(0.9) \quad W := \{0 < |z| < 1\}$$

をとる. W 内の任意固定点 $a \in W$ に対する W の調和測度を ω とする. \overline{W} 上 \mathbb{R} 値連続関数 w で, \overline{W} 上非負, 即ち $w(z) \geq 0$ ($z \in \overline{W}$), かつ $w|_W$ が W 上劣調和となる様な w としては

$$(0.10) \quad w(z) := \begin{cases} |1/z| & (0 < |z| \leq 1), \\ +\infty & (z = 0) \end{cases}$$

で定まるものをとる. $f := w|_{\partial W}$ と置くと,

$$(0.11) \quad f \in L^1(\partial W, \omega)$$

となるにもかかわらず, $w|_{\partial W}$ は W 上調和優函数を持たぬ. それ故この (W, w) は定理 0.2 が一般には成立しないことを示す例である.

証明. 上記 (0.9) で定める W の境界 ∂W は単位円周 $\{|z| = 1\}$ と孤立境界点 $\{0\}$ からなり, $\{0\}$ は単位円板内の有界調和函数に対する除去可能孤立特異点なので, W は単位円板 $\{|z| < 1\}$ と Green 函数を共有する. よって W の固定点 $a \in W$ に極を持つ Green 函数 $G(z, a)$ は

$$G(z, a) := \log \left| \frac{1 - \bar{a}z}{z - a} \right| \quad (z \in W)$$

で与えられる. W の双曲性は, W が正值非調和優函数の存在を許容することと定義するので, Green 函数 $G(z, a)$ を許容する W は確かに双曲的である. 更に

$$\begin{cases} d\omega(e^{i\theta}) = \left[\frac{\partial}{\partial r} G(re^{i\theta}, a) \right] \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1 - |a|^2}{|a - e^{i\theta}|^2} \frac{d\theta}{2\pi} \quad (e^{i\theta} \in \{|z| = 1\}), \\ \omega(\{0\}) = 0 \end{cases}$$

であるから, $f|_{\{|z| = 1\}} = 1$ かつ $f(0) = +\infty$ と $(+\infty) \cdot 0 = 0$ により

$$\int_{\partial W} f(\zeta) d\omega(\zeta) = \int_{|z|=1} f(\zeta) d\omega(\zeta) + \int_{\{0\}} f(\zeta) d\omega(\zeta) = \int_0^{2\pi} 1 \cdot \frac{1 - |a|^2}{|a - e^{i\theta}|^2} \frac{d\theta}{2\pi} + f(0)\omega(\{0\}) = 1 + 0 < +\infty,$$

即ち, (W, ω) に対し (0.11) が成り立つことが確かめられた. 今一つ肝心な部分であるところの “ $w|_W$ が W 上調和優函数を持たぬ” ことを背理法により示す. 仮に $w|_W$ が W 上調和優函数 u を持ったとする:

$$(0.12) \quad 0 \leq w(z) \leq u(z) \quad (0 < |z| < 1).$$

これにより, 特に, u は $\{0 < |z| < 1\}$ 上の正值調和函数であることが分かり, 次いで, $z = 0$ はその孤立特異点であるから, Bôcher-Picard の原理により

$$u(z) = O\left(\log\left|\frac{1}{z}\right|\right) \quad (z \rightarrow 0)$$

である. (0.10) と (0.12) から $1/|z| \leq O(\log(1/|z|))$ ($z \rightarrow 0$), 即ち,

$$1 \leq O(-|z| \log |z|) \quad (z \rightarrow 0)$$

である. 他方 $|z| \log |z| \rightarrow 0$ ($z \rightarrow 0$) なので, 結局上式より $1 \leq 0$ と言う矛盾が導かれ, 背理法が完結する. \square

上記反例 0.8 を含め, 陳述 (甲) \Rightarrow (乙) の一般的成立を否定するどんな反例 (W, w) でも, とにかく w は非有界 (即ち, この場合では, $w^{-1}(+\infty) := \{z \in \bar{W} : w(z) = +\infty\} = \{\zeta \in \partial W : w(\zeta) = f(\zeta) = +\infty\} \neq \emptyset$) でなければならぬ. しかし上記反例 0.8 は, 教育的にも, あまり好ましくないと思う. 理由は, そこでの $\zeta \in w^{-1}(+\infty)$ (具体的には $w^{-1}(+\infty)$ は唯 1 個の点 $\zeta = 0$ からなる) が ∂W 内の孤立点であるという所にある. あまりにも特異すぎる状況にある (W, w) で (甲) \Rightarrow (乙) を否定はしているが, 普通にはほとんど起こりえない例外として除外されるべきとも思える事態に頼る例であって, 何となく否定を認めることを強要されているように感ずる心理的な背景を持つからである.

上の反例 0.8 の (W, w) をそのまま ${}_1W = W, {}_1w = w$ と (0.9) と (0.10) で定める. すると $({}_1W, {}_1w)$ は (甲) \Rightarrow (乙) の反例であった. 同じ (0.9) の W を今度は ${}_2W$ と記し, ${}_2w$ としては

$$(0.13) \quad {}_2w(z) := \begin{cases} \log^+ |e^{-1}/z| + 1 & (0 < |z| \leq 1), \\ +\infty & (z = 0) \end{cases}$$

で定まるものとする. すると $({}_2W, {}_2w)$ は (甲) も (乙) も満たし (甲) \Rightarrow (乙) の反例ではない.

$$(0.14) \quad {}_j f := {}_j w|_{\partial_j W} \quad (j = 1, 2)$$

とおく. $\partial_j W = \{|\zeta| = 1\} \cup \{0\}$ ($j = 1, 2$) で ${}_j f|_{\{|\zeta| = 1\}} = 1, {}_j f(0) = +\infty$ ($j = 1, 2$) だから $({}_1W, {}_1w) \neq ({}_2W, {}_2w)$ だけれど $({}_1W, {}_1f) = ({}_2W, {}_2f)$ である. 条件 (甲) は $({}_jW, {}_jw)$ ($j = 1, 2$) ではなく $({}_jW, {}_j f)$ に関係するが, (乙) は $({}_jW, {}_jw)$ 全てにかかわる. つまり (甲) は Dirichlet 問題 $({}_jW, {}_j f)$ だけにかかわる条件で, $({}_jW, {}_jw)$ 全てにかかわるところの成否を判定しようとするところは, 一般には無理難題であるので, 反例等出す必要もなく (甲) \Rightarrow (乙) は否定されて当然の筈である. Dirichlet 問題 $({}_jW, {}_j f)$ に於いては, $\zeta \in \partial_j W$ が孤立点なら, ${}_j \omega(\{\zeta\}) = 0$ (但し, ${}_j \omega$ は ${}_jW$ の調和測度) であるので ${}_j f(\zeta)$ が $+\infty$ であろうと何であろうと $\{\zeta\}$ は初めから無視される対象である.

上述の所を, 少し違う視点からも考えてみよう. 問題 0.1 の (W, w) として, 一般の 2 個の $({}_j\tilde{W}, {}_j\tilde{w})$ ($j = 1, 2$) をとる. $\zeta \in \partial_j \tilde{W}$ における ${}_j \tilde{f} := {}_j \tilde{w}|_{\partial_j \tilde{W}}$ の値 ${}_j \tilde{f}(\zeta)$ は

$${}_j \tilde{f}(\zeta) = \lim_{z \in {}_j \tilde{W}, z \rightarrow \zeta} {}_j \tilde{w}(z)$$

で定まるのであるが, ${}_j \tilde{f}(\zeta)$ が有限値, 即ち, ${}_j \tilde{f}(\zeta) \in \mathbb{R}^+$ ならば ${}_j \tilde{w}$ にかかわらず一意に定まるが, ${}_j \tilde{f}(\zeta)$ が無限値, 即ち, ${}_j \tilde{f}(\zeta) = +\infty$ の場合に於ける $+\infty$ は “極限值” であって, 有限値の場合とは本質的に違うと考える必要がある. つまり ${}_j \tilde{f}(\zeta) = \alpha \in \mathbb{R}$ ($j = 1, 2$), $\alpha \neq 0$ ならば

$$\lim_{z \in \tilde{W}, z \rightarrow \zeta} {}_1 \tilde{w}(z)/{}_2 \tilde{w}(z) = 1$$

($\alpha = 0$ ならば $\lim_{z \in \tilde{W}, z \rightarrow \zeta} ({}_1 \tilde{w}(z) + 1)/({}_2 \tilde{w}(z) + 1) = 1$ で置き換える) であるが, ${}_j \tilde{f}(\zeta) = +\infty$ ($j = 1, 2$) の場合には,

$\lim_{z \in \tilde{W}, z \rightarrow \zeta} {}_1 \tilde{w}(z)/{}_2 \tilde{w}(z)$ は定まらぬか, 定まったとしても $\lim_{z \in \tilde{W}, z \rightarrow \zeta} {}_1 \tilde{w}(z)/{}_2 \tilde{w}(z) = 1$ とは限らない. 上述の具体例 $({}_jW, {}_jw)$

($j = 1, 2$) に帰って, ${}_1 f(0) = +\infty, {}_2 f(0) = +\infty$ であるとは言っても, ${}_1W = {}_2W = W$ として,

$$\lim_{z \in W, z \rightarrow 0} {}_1 w(z)/{}_2 w(z) = +\infty \neq 1$$

なので $\partial W = \partial_1 W = \partial_2 W$ 上, $_1 f = _2 f$, よって $(_1 W, _1 f) = (_2 W, _2 f)$ の理解に無理があり, 反例 0.8 の $(_1 W, _1 w)$ も, 又順例 (非反例) $(_2 W, _2 w)$ 共々, 無限大境界値を取る孤立境界点に準拠するものは特殊過ぎ人工的過ぎ, その上曖昧過ぎて素直に従い難い点に不満がある.

更に今一つの (甲) \Rightarrow (乙) の反例, 順例にかかわる問題 0.1 の (W, w) の具体例 $(_3 W, _3 w)$ を既出の $(_j W, _j w)$ ($j = 1, 2$) に加えて提示する. 先ず $\hat{\mathbb{C}}$ 内の双曲的領域 $_3 W$ として, \mathbb{C} の第 1 象限の左下隅に位置する開正方形

$$(0.15) \quad {}_3 W := \{0 < \operatorname{Re} z < 1, 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$$

を採る. $_3 W$ の固定参照点 $z_a = (1+i)/2$ に対する $_3 W$ の調和測度を $_3 w$ とする. ${}_3 \overline{W}$ 上 \mathbb{R} 値非負連続函数 $_3 w$ で, $_3 W$ 上 $_3 w|_{{}_3 W}$ が劣調和であるような函数 $_3 w$ を $(_1 W, _1 w)$ と同様に次のように定める:

$${}_3 w(z) := \begin{cases} |1/z| & (z \in {}_3 \overline{W} \setminus \{0\}), \\ +\infty & (z = 0) \end{cases}$$

すると $(_3 W, _3 w)$ は条件 (甲) も (乙) も満足するので, (甲) \Rightarrow (乙) の反例ではない (だから, たまたまの順例), (ここで念の為, $(_3 W, _3 w)$ が (甲) も (乙) も満たすことの証明を挿入しておく. (甲) を直接示すことは幾分面倒なので, 先ず (乙) を示し, それを使って (甲) を示す. $z = x + iy$ と表示したとき

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{1}{|z|} \leq \frac{x+y}{x^2 + y^2} \quad (z \in {}_3 \overline{W} \setminus \{0\})$$

により $_3 w|_{{}_3 W}$ は $_3 W$ 上調和優函数 $(x+y)/(x^2+y^2)$ を持ち, 即ち, $(_3 W, _3 w)$ は条件 (乙) を満たす. 注意 0.5 によれば一般に (乙) \Rightarrow (甲) だから, $(_3 W, _3 w)$ は条件 (甲) を満たす: $_3 f = _3 w|_{\partial_3 W} \in L^1(\partial_3 W, _3 w)$.

さて $(_1 W, _1 w)$ と $(_2 W, _2 w)$ と $(_3 W, _3 w)$ の 3 者を較べてみる. 先ず

$${}_1 w^{-1}(+\infty) = {}_2 w^{-1}(+\infty) = {}_3 w^{-1}(+\infty) = \{0\}$$

である. そして $\{0\}$ は $\partial_1 W = \partial_2 W$ の孤立点であるが, $\partial_3 W$ では凝集点である. (甲) \Rightarrow (乙) に対し $(_1 W, _1 w)$ は反例, $(_2 W, _2 w)$ は順例であるが, かくの如く状況を分ける決定的相違は “ ${}_1 w(0) = +\infty$ ” の方が “ ${}_2 w(0) = +\infty$ ” より “極限的にずっと大” であることに起因するに違いない. $(_1 W, _1 w)$ と $(_3 W, _3 w)$ に於いて, ${}_1 w = {}_3 w$ なので, ${}_1 w(0) = +\infty$ も ${}_3 w(0) = +\infty$ も “極限的に同等である” にもかかわらず, 前者が反例で後者が順例となることを分ける原因は, $\{0\}$ が $\partial_1 W$ の孤立点なのに, 同じ $\{0\}$ が $\partial_3 W$ の凝集点であることによると考えられる. そして ${}_3 w(0) = +\infty$ が極限的に異なるのに ${}_2 w(0) = +\infty$ と同様の働きをするのは, $\{0\}$ に集積してくる $\partial_3 W$ が条件 (甲): $_3 f := _3 w|_{\partial_3 W} \in L^1(\partial_3 W, _3 w)$ を満たしている故の効果であるのではないかと考えられる. だから問題 0.1 の (W, w) に対して

(丙) $w^{-1}(+\infty)$ のどの点も ∂W 内孤立点でない.

という条件を考えて, 条件 (丙) を満たす (W, w) に対しては (甲) \Rightarrow (乙) となるという具合に定理 0.2 を制限して使う限り反例は出ないだろうとの期待を持ちたくなるかもしれぬ. であるが故に, この場合にも反例があれば定理 0.2 を確信的に二度使わせない “良い” 例であると言える. それを下記する.

複素球面 $\hat{\mathbb{C}}$ からその原点 $z = 0$ へ集束する互いに素な閉円板列の各閉円板をすべて取り除いて得られる型の領域を 0 中心の **Zalcman** 領域と言う. 下記する反例 0.17 に於ける (W, w) の W として, 更に具体的に定められる Zalcman 領域を利用する. さて, ここで零列である 2 本の正数列 $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ と $(r_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ を与える (但し, \mathbb{Z}^+ は非負整数の全体 $\{0\} \cup \mathbb{N}$ とする). K_n を c_n を中心とし半径 r_n の閉円板とする: $K_n := \overline{B}(c_n, r_n) = \{|z - c_n| \leq r_n\}$ ($n \in \mathbb{Z}^+$). 先ず中心列 $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ は当然の制約である $0 < c_{n+1} < c_n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) 及び $c_n \searrow 0$ ($n \nearrow \infty$) 以外は全く任意にとってよいが, 一旦定めたら終始固定する. それに較べて半径列 $(r_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ については, これも当然の $r_n > 0$ かつ $r_n \rightarrow 0$ ($n \nearrow \infty$) の範囲内になければならぬが, その他の本質的制約 $K_n \cap K_m = \emptyset$ ($n, m \in \mathbb{Z}^+, n \neq m$) の為の必要十分条件としての $c_{n+1} + r_{n+1} < c_n - r_n$ 即ち,

$$(0.16) \quad r_n + r_{n+1} < c_n - c_{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$$

を満たさねばならぬ. その上, (W, w) を求める反例にする為更に $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に制約を追加するが, いずれもひとたび $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ がそれを満たせば, $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ をより急減少なものに置き換えても同様にそれを満たしたままであると言う性格のものであることを注意する.

反例 0.17 W を中心 c_n 半径 r_n の閉円板 K_n ($n \in \mathbb{Z}^+$) を $\hat{\mathbb{C}}$ から取り除いて得られる 0 中心の Zalcman 領域とし:

$$(0.18) \quad W := \hat{\mathbb{C}} \setminus \left(\{0\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} K_n \right),$$

W の参照点としての無限遠点 $\infty \in W$ に対する W の調和測度を ω とする. 次に \overline{W} 上の関数 w を

$$(0.19) \quad w(z) = \begin{cases} 1/|z| & (z \in \overline{W} \setminus \{0, \infty\}), \\ 0 & (z = \infty), \\ \infty & (z = 0) \end{cases}$$

と定める. すると (W, w) は問題 0.1 で要求される性質を満たす. このとき $f := w|_{\partial W}$ が $f \in L^1(\partial W, \omega)$ を満たす. 即ち,

$$(0.20) \quad \int_{\partial W} f(\zeta) d\omega(\zeta) < +\infty$$

となるように半径列 $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を選ぶことが出来る. にもかかわらず, 定理 0.2 の主張に反して, $w|_W$ は W 上調和優関数を持たぬ.

証明. 半径列 $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を上手く選べば, (0.20) が成立することを示す. $\mathbb{C} \setminus K_0$ 内の閉円板 K の計測点 ∞ の調和容量 $c(K)$ は, $\hat{\mathbb{C}} \setminus (K \cup K_0)$ の参照点 ∞ に対する調和測度 Ω を使って

$$c(K) := \Omega(\partial K)$$

で与えられる. $b \in \mathbb{C} \setminus K_0$ 中心, 半径 r の閉円板を $K(b, r) \subset \mathbb{C} \setminus K_0$ と記すとき,

$$(0.21) \quad \lim_{r \searrow 0} c(K(b, r)) = c(\{b\}) = 0$$

は調和容量の基本性質の一つである. 明らかに

$$0 < \omega(\partial K_n) \leq \Omega(\partial K_n) = c(K_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

である. 故に (0.21) と合わせて, $K_n = K(c_n, r_n)$ であることより, $\omega(\partial K_n) \searrow 0$ ($r_n \searrow 0$) だから, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $r_n > 0$ を十分小さくとれば

$$(0.22) \quad \frac{\omega(\partial K_n)}{c_n - r_n} < \frac{1}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

となるように出来る. $f = w|_{\partial W}$ に対し,

$$(0.23) \quad \sup_{\zeta \in \partial K_n} f(\zeta) \leq \frac{1}{c_n - r_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

である. (0.22) と (0.23) と合わせて

$$\int_{\partial K_n} f(\zeta) d\omega(\zeta) \leq \int_{\partial K_n} \frac{1}{c_n - r_n} d\omega(\zeta) = \frac{\omega(\partial K_n)}{c_n - r_n} < \frac{1}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

である. $\partial W = \{0\} \cup \partial K_0 \cup (\cup_{n \in \mathbb{N}} \partial K_n)$ だから

$$\begin{aligned} \int_{\partial W} f(\zeta) d\omega(\zeta) &= f(0)\omega(\{0\}) + \int_{\partial K_0} f(\zeta) d\omega(\zeta) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\partial K_n} f(\zeta) d\omega(\zeta) \\ &< (+\infty) \cdot 0 + \frac{\omega(\partial K_0)}{c_0 - r_0} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \leq 0 + \frac{1}{c_0 - r_0} + 1 < +\infty \end{aligned}$$

即ち, (0.22) となるように $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ をとれば, (0.20) が成立することが分かる.

残るところは, $w|_W$ は W 上調和優関数を持たぬことの証明である. これを背理法で示す, 即ち, 仮に $w|_W$ が W 上調和優関数 u を持ったとして何か矛盾を導きたい. -1 を中心に持ち, 半径が 1 である開円板を V とする: $V = \{|z + 1| < 1\}$. すると $\overline{V} \setminus \{0\} \subset W$ である. $V_r := \{|z + 1| < r\}$ ($0 < r \leq 1$) は V に含まれる V の同心開円板で $V_1 = V$ である. $w|_W$

が W 上調和優函数 u を持つから、勿論 $w|_W$ は V 上 u を優函数に持つ: $w(z) \leq u(z)$ ($z \in V$), 従って各 $0 < r < 1$ に対し $w(z) \leq u(z)$ ($z \in \bar{V}_r \subset V$) だから, $z = -1 + re^{i\theta} \in \partial V_r$ とおいて, 両辺を ∂V_r 上 $d\theta/2\pi$ で平均を取る:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|-1 + re^{i\theta}|} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(-1 + re^{i\theta}) d\theta$$

上式の右辺は Gauss の平均値の定理を使えば $u(-1)$ に等しい故

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|-1 + re^{i\theta}|} \leq u(-1) \quad (0 < r < 1)$$

が得られる. 左辺の積分の被積分函数は正值, かつ $[0, \pi/2] \subset [0, 2\pi]$ 故

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{|-1 + re^{i\theta}|} \leq u(-1) \quad (0 < r < 1)$$

である. Fatou の補題により

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{|-1 + e^{i\theta}|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\liminf_{r \nearrow 1} \frac{1}{|-1 + re^{i\theta}|} \right) d\theta \leq \liminf_{r \nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{|-1 + re^{i\theta}|} \leq u(-1)$$

である. $0 \leq \theta \leq \pi/2$ であると, $0 \leq \cos \theta \leq 1$ かつ $0 \leq \sin \theta \leq \theta$ だから

$$\frac{\sqrt{2}}{|-1 + e^{i\theta}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - 2\cos \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos \theta}} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}} = \frac{\sqrt{1 + \cos \theta}}{\sin \theta} \geq \frac{1}{\sin \theta} \geq \frac{1}{\theta}$$

となるから

$$+\infty = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\theta} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{|-1 + e^{i\theta}|} \leq u(-1)$$

となる. 即ち, $u(-1) \geq +\infty$ が結論されることになるが, これは u が V 上調和であるのにもかかわらず V の中心 -1 で $u(-1) = +\infty$ と言う矛盾が導かれた. \square

真陳述: (乙) \Rightarrow (甲) が何故だか化けた偽陳述: (甲) \Rightarrow (乙) (即ち, 定理牴牾 0.2) に対する反例 ($_1W, _1w$) は $_1w$ の $+\infty$ 点 $\zeta = 0$ が ∂_1W の孤立点であると言う超特異性故反例として機能するのであって, 確かに紛うことなき立派な反例ながら, 通常例外的として排除されるべき状況に頼っているから, 反例としての説得力に欠けると述べた. (甲) \Rightarrow (乙) の順例 ($_2W, _2w$) については, $_1W = _2W$ であり, $_1w$ と $_2w$ の $+\infty$ 点 $\zeta = 0$ を $\partial_1W = \partial_2W$ の孤立点として共有しているのに反, 順に分かれる所は, $_1w(0) = +\infty$ と $_2w(0) = +\infty$ の“極限值”としての差異による観察だけに留めた. 次に ($_1W, _1w$) と ($_3W, _3w$) の反, 順の違いは, $_1w(0) = +\infty$ と $_3w(0) = +\infty$ は“極限值”としては全く同じであるのに, 重大な差異として ∂_1W 内 $_1w$ の $+\infty$ 点 0 が孤立点なのに ∂_3W 内 $_3w$ の $+\infty$ 点 0 が非孤立点であり, 即ち (丙) を満たし, 更にこれだけにとどまらず $_3f := _3w|_{\partial W} \in L^1(\partial_3W, _3w)$ があるので, ($_3W, _3f$) が $\zeta = 0$ であつかも ($_2W, _2f$) の如くに $\zeta = 0$ で振る舞うところにある. この観察から, 問題 0.1 への解答として

$$(甲) \& (丙) \Rightarrow (乙)$$

の成立に淡い期待をかけるかも知れぬ. それ故, 反例 0.17 は (甲) \Rightarrow (乙) のみならず, それを超え, 上述の (甲) $\&$ (丙) \Rightarrow (乙) も含む意味で, (甲) \Rightarrow (乙) を徹底的に否定するので, 大変説得力に富む良い反例と思う.

問題 0.1 の解決は既述通り決して容易でないが, 注意 0.5 により, (乙) を導き出すためには兎に角 (甲) は是非要るが, それに加え更に最小限何があれば良いかを考える. つまり

$$(甲) \& (丁) \iff (乙)$$

となる何等かの条件 (丁) を求めたい. (W, w) が (乙) を満たす判定条件を求めていると解釈するなら (甲): $f = w|_{\partial W} \in L^1(\partial W, w)$ の如く (丁) は使い易く具体的で簡潔なものでないといけぬ. いずれにしろ (乙) \Rightarrow (丁) でなければならぬから, 例えば上述の (丙) は (乙) と何のかかわりも無く, 無論必要でも十分でもない. だから以後 (丙) 条件は 探索中の条件 (丁) の候補としては完全に忘れて無視してよい. なので以下, この問題に於いては, 登場条件は (甲) と (乙) 及び内容未定の (丁) の三者である.

(丁) 探索の目的で、ここで再び PWB 法の再吟味から出直したい。Dirichlet 問題 (W, f) とは双曲的領域 $W \in \hat{C}$ と W の境界函数 f (即ち, ∂W 上の \mathbb{R} 値函数 f) を与えて, W 上の調和函数 u でその W での境界値が f となる様なものを求める問題である. 既にその一端を述べた PWB 法は, Perron の着想 (PWB の P) と Wiener の着想 (PWB の W) それぞれの本質的部分を整理統合融合して Brelot (PWB の B) が現在の PWB 法と呼んでいる Dirichlet 問題 (W, f) の標準的解法理論に纏めあげたものであると伝えられている.

Perron の着想は PWB 法のコア部分を占めるところで, 既述した通りであるが, 下記するところとの比較状有用なので再記する. ∂W 上 \mathbb{R} 値函数である境界函数 f につき, 各 $\zeta \in \partial W$ に対し

$$\liminf_{z \in W, z \rightarrow \zeta} s(z) \geq f(\zeta) \quad (\text{又は, } \limsup_{z \in W, z \rightarrow \zeta} s(z) \leq f(\zeta))$$

となるような W 上の下に有界な (又は, 上に有界な) 優調和函数 (又は, 劣調和函数) s の族 $\bar{\mathcal{S}}_f^W$ (又は, $\underline{\mathcal{S}}_f^W$) は空でないとして仮定するとき $\bar{\mathcal{S}}_f^W$ (又は $\underline{\mathcal{S}}_f^W$) は W 上の優 (又は, 劣) 調和函数の Perron 族なので, W 上

$$\inf \bar{\mathcal{S}}_f^W \geq \sup \underline{\mathcal{S}}_f^W$$

となり, それぞれは W 上の調和函数となる. $\inf \bar{\mathcal{S}}_f^W$ (又は, $\sup \underline{\mathcal{S}}_f^W$) は Dirichlet 問題 (W, f) の上方解 (又は, 下方解) と呼び, これらが一致したら, その共通函数を H_f^W と記し, Dirichlet 問題 (W, f) の **Perron** 解と言い, そのときの境界函数 f は **Perron** 可解であると言う. W の調和測度を ω と記すとき, “ f が Perron 可解となる為の必要十分条件は $f \in L^1(\partial W, \omega)$ である” は最も基本的な事実である. だから, 特に “ $f \in C(\partial W)$ は Perron 可解であり, ∂W の調和容量零の集合 E があって

$$\lim_{z \in W, z \rightarrow \zeta} H_f^W(z) = f(\zeta) \quad (\zeta \in (\partial W) \setminus E)$$

となる (このことを, H_f^W の ∂W における境界値は q.e. に f であると言う)” は有用である. 更に “ W が互いに素な有限個の Jordan 曲線で囲まれた領域で, $f \in C(\partial W)$ ならば

$$\lim_{z \in W, z \rightarrow \zeta} H_f^W(z) = f(\zeta)$$

である” は是非そうあるべき結論で, 大変に満足である.

Wiener の着想の注目点は, Dirichlet 問題 (W, f) に於ける境界函数 f の選択にある. \bar{W} 上 \mathbb{R} 値連続な非負値函数 w で $w|_W$ が劣調和 (従って, $0 \leq w|_W < +\infty$) となる w があって, $f = w|_{\partial W}$ となるような f ばかりを考える. 以下に述べる Dirichlet 解の構成の方法により, f に対して定める函数が, $w|_{\partial W} = \tilde{w}|_{\partial W} = f$ と 2 通りの w と \tilde{w} を取ったとき定まる 2 個の Dirichlet 解が一致しないこともあり得るので, (W, f) の境界函数は単に ∂W 上の函数 f ではなくて, f を $f = w|_{\partial W}$ で定める w 自体を “境界値” と見做して, Dirichlet 問題を (W, w) と理解する. だから問題 (0.1) に於ける (W, w) そのものを Dirichlet 問題と考え, “境界値” $w|_{\partial W}$ を内部も埋めた w と考える. 例えば $W := \{0 < |z| < 1\}$ に於いて, $f|_{\{|z|=1\}} = 1$, $f(0) = +\infty$ と言う ∂W 上の境界値 f は $w(z) = \log^+(e^{-1}/|z|) + 1$ から来る $w|_{\partial W} = f$ による Dirichlet 問題 (W, f) は, 実質的には (W, w) と考える訳であるし, $\tilde{w}(z) = 1/|z|$ から来る $\tilde{w}|_{\partial W} = f$ と考えた場合の同じ Dirichlet 問題 (W, f) は (W, \tilde{w}) とも考えられる. そして前者と考えた場合の所謂 Wiener 解は $\log(1/|z|) + 1$ となり, 後者の場合のそれは $+\infty$ (このときは解がないと理解する) であることがすぐにわかる (Perron 解なら $H_f^W \equiv 1$ である). 要するに問題 (0.1) に於ける (W, w) を Dirichlet 問題として扱うところが Wiener 流の肝である.

次に, W の w 支配の近似 $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を次のように定める. 第 1 に, 各 W_n ($n \in \mathbb{N}$) は $w|_{\bar{W}_n}$ が有限値 (即ち, $0 \leq w|_{\bar{W}_n} < +\infty$) であるような W の部分領域とする, 即ち, $W_n \subset W$; 第 2 に, $W_n \subset W_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$); そして最後に第 3 として $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n = W$ とする. だから $W_n \nearrow W$ ($n \nearrow \infty$) である. そこで $H_w^{W_n}$ は $H_{w|_{\partial W_n}}^{W_n}$ の略記と理解するとき, $w|_{\partial W_n} \in C(\partial W_n)$ ($n \in \mathbb{N}$) なので, $H_w^{W_n}$ の W_n 上での境界値は q.e. に $w|_{\partial W_n}$ である, 即ち

$$\lim_{z \in W_n, z \rightarrow \zeta} H_w^{W_n}(z) = w(\zeta) \quad (\text{q.e. } \zeta \in \partial W_n)$$

であるので, W_n 上 $H_w^{W_n}$ は w の最小調和優函数となることにより, W_n 上

$$(0.24) \quad H_w^{W_n} \leq H_w^{W_{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

となるので, Harnack の原理により, $(H_w^{W_n})_{n \in \mathbb{N}}$ は W 上の調和函数又は $+\infty$ に収束するので

$$(0.25) \quad h_w^W(z) := \lim_{n \nearrow \infty} H_w^{W_n}(z) \quad (z \in W)$$

と置くならば, W 上 $0 \leq h_w^W \leq +\infty$ が定まり, h_w^W は W 上非負値調和函数となるか $h_w^W \equiv +\infty$ となる. 前者の場合, (W, w) に於いて w は **Wiener 可解** であると言い h_w^W を (W, w) の **Wiener 解** と呼ぶ. このとき W 上

$$p_w^W := h_w^W - w$$

はポテンシャル, 即ち, W 上の非負優調和函数で, その最大調和劣函数は 0 である. 要約するならば, Wiener 流の Dirichlet 問題 (W, w) (即ち, 問題 0.1 の (W, w) と同じもの) に於いて, w が Wiener 可解でない (即ち, $h_w^W \equiv +\infty$) か, 又は w が Wiener 可解 (即ち, $h_w^W < +\infty$) であり, 後者の場合 W 上の w の表示式

$$(0.26) \quad w = h_w^W - p_w^W$$

は劣調和函数 w の W 上の **Riesz 分解** となる, 即ち h_w^W は w の W 上での最大調和優函数部分であり, $p_w^W = h_w^W - w$ は w の W 上のポテンシャル部分である.

以上の課程に於ける大事な注意点として, h_w^W に関連するところはすべて W の w 支配の近似 $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ のとり方に依存しない. W の正則近似はどんな w に対しても W の w 支配の近似なので, 上記課程中近似を正則近似に限定すれば, 定義としては最もすっきりするであろうが, 諸性質を導出しようとするときはたやすくない. 次に, w が \overline{W} 上有界ならば, h_w^W は $w|_{\partial W}$ のみで定まる. 即ち, w も \tilde{w} も \overline{W} 上有界であるならば

$$h_w^W = h_{\tilde{w}}^W \iff w|_{\partial W} = \tilde{w}|_{\partial W}$$

である. だから Dirichlet 問題 (W, f) に於いて, $f \in C(\partial W)^+$ であると, 問題 0.1 の如き (W, w) で $w|_{\partial W} = f$ となるものは常に容易に求められるので, $h_f^W := h_w^W$ を Dirichlet 問題 (W, f) を Wiener 流に求めるとしたとき, 境界値 f に課する制約は決して大きくないことも了解出来るであろう.

さて, 反例 0.8 の (W, w) を $({}_1W, {}_1w)$ と記したのにはじまり, 3 組の $({}_jW, {}_jw)$ ($j = 1, 2, 3$) について各種の属性を眺めてきたが, 更に反例 0.17 の (W, w) を $({}_4W, {}_4w)$ として加えた 4 組 $({}_jW, {}_jw)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) を Perron と Wiener の各流儀の視点から観察し比較した結果を下記する (従前通り ${}_j f = {}_j w|_{{}_jW}$ であるとする):

$$(0.27) \quad \begin{cases} H_{1f}^{1W} = 1, & h_{1w}^{1W} = +\infty; \\ H_{2f}^{2W} = 1, & h_{2w}^{2W} = 1 + \log(1/|z|); \\ H_{3f}^{3W} = h_{3w}^{3W} < +\infty \text{ (具体形表示困難)}; \\ H_{4f}^{4W} \text{ (存在するも具体形表示困難)}, & h_{4w}^{4W} = +\infty \end{cases}$$

Dirichlet 問題に関する上述の Wiener の着想は (丁) 探索作業に重要な示唆を与える. 問題 0.1 に対して定理 0.2 程簡明で分かり易い解答を '正しく' 与えることの困難は何度も述べて来た. それで, 問題 0.1 の (W, w) で, 一般の W で直接扱うことは諦めある程度具体化された W を取り, 更に場合によっては w も具体化した (W, w) の場合で, (乙) が結論される条件 (即ち, (甲) と探索中の (丁)) を出すことを試みる方向に切り替えてみる. その為に, 一例として, 反例 0.17 の Zalcman 領域をとってみる:

$$(0.28) \quad W = \hat{\mathbb{C}} \setminus \left(\{0\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} K_n \right), \quad K_n := \{|z - c_n| \leq r_n\} \quad (n \in \mathbb{Z}^+).$$

W の参照点としては無限遠点 ∞ を取り, 更に, 正数列 $(\rho_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ を

$$(0.29) \quad c_{n+1} + r_{n+1} < \rho_n < c_n - r_n \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$$

となるように任意にとり, W の ∞ で計る調和測度を ω とする. w は (W, w) が問題 0.1 の設定を満たすもので, 更に w は $\overline{W} \setminus \{0\}$ 上では有限値 $0 \leq w < +\infty$ とする. そこで

$$(0.30) \quad W_n := W \setminus \{|z| \leq \rho_n\} \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$$

と置けば, $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は W の w 支配の近似となる. $C(\rho_n) = \{|z| = \rho_n\}$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) と記せば

$$\partial W_n = C(\rho_n) \cup \bigcup_{k=0}^n \partial K_k \quad (n \in \mathbb{N})$$

である. W の ω に加えて, W_n の ∞ で測る調和測度を ω_n ($n \in \mathbb{Z}^+$) とするならば

$$(0.31) \quad H_w^{W_n}(\infty) = \int_{C(\rho_n)} w(\zeta) d\omega_n(\zeta) + \sum_{k=0}^n \int_{\partial K_k} w(\zeta) d\omega_n(\zeta) \quad (n \in \mathbb{N})$$

となる. 各 ∂K_k 上 $(\omega_n)_{n \geq k}$ は濃取束の意味で $\omega_n \nearrow \omega$ ($n \nearrow \infty$) であるから, 上の等式 (0.31) で $n \nearrow \infty$ として

$$(0.32) \quad h_w^W(\infty) = \lim_{n \nearrow \infty} \int_{C(\rho_n)} w(\zeta) d\omega_n(\zeta) + \|w\|_{L^1(\partial W, \omega)}$$

が得られる. これから

$$(乙) \iff h_w^W(\infty) < +\infty \iff (甲) \ \& \ " \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{C(\rho_n)} w(\zeta) d\omega_n(\zeta) < +\infty "$$

となる. よって探索中の条件 (丁) としては現在の状況下では

$$(丁) \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{C(\rho_n)} w(\zeta) d\omega_n(\zeta) < +\infty$$

とすればよいことが分かる. だから問題 0.1 に対する答としては現況下では次のように述べられる.

判定条件 0.33 問題 0.1 の (W, w) として次の如きものを取る. W は反例 0.17 の Zalcman 領域とする. 即ち

$$W = \hat{\mathbb{C}} \setminus \left(\{0\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} K_n \right), \quad K_n = \{|z - c_n| \leq r_n\} \quad (n \in \mathbb{Z}^+),$$

そして w は条件

$$0 \leq w \mid \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \partial K_n < +\infty$$

を満足すると仮定する. そのとき w が W 上調和優関数を持つ (即ち, (乙) が成り立つ) 為の必要十分条件は, $w \in L^1(\partial W, \omega)$ (即ち (甲)) かつ上記 (丁) が成り立つことである. 即ち,

$$(甲) \ \& \ (丁) \iff (乙).$$

具体的に上の判定条件を反例 0.17 に適用してみる. そこでは W は上の Zalcman 領域で, w は $w(z) = 1/|z|$ ($z \in W$) であった. (甲) は $w \in L^1(\partial W, \omega)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial K_n} \frac{1}{|\zeta|} d\omega(\zeta) < +\infty$$

が成り立つように半径列 $(r_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ は必要なだけ急減少に選ばれていた. 上記 (丁) は

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{C(\rho_n)} \frac{1}{|\zeta|} d\omega_n(\zeta) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\omega_n(C(\rho_n))}{\rho_n} < +\infty$$

で与えられる. そこで反例 0.17 の結論 (即ち, (乙) の不成立) は, 上記判定条件 0.33 により (丁) の不成立, 即ち

$$(0.34) \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\omega_n(C(\rho_n))}{\rho_n} = +\infty$$

を示せばよいことになる. 頑張れば (0.34) を計算で示せるが容易ではない. 反例 0.17 での間接的な証明を見たら, 半径列 $(r_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ を十分に急減少に取る以外, 中心列 $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ の取り方も, その上での $(\rho_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ の選び方等当然の制約以外全く

任意であっても (0.34) になるという事は, 条件 (丁) は誠に起こり難い現象であるかに思われる. この状況は本文で述べるいくつかの前向きな期待を根から粉碎するものに心理的に繋がる事を述べておく.

本論文の目的は上述の見本の示すところと同様, \hat{C} 内の環状集合と呼ぶ ∞ を含まず 0 を集積点として含む完全非連結な閉集合の \hat{C} に関する補集合である領域 W 上で函数 $1/z$ 由来の ‘Wiener 型境界値’ w に対する問題 0.1 の (W, w) に関して条件 (甲), (乙), (丁) の各個, 又は組, 又は三者の絡み等についての相互関係の様々を詳しく調べることである. そこで得られた諸結果を特別に指摘したいある主張の支持の狙いに適用することが本論文の ‘真の目的’ である. ここで言う真の目的について, 又その目的に至る研究の動機についての説明を下記する.

2010 年に魅力的な専門書 Hasumi[6] が出版された. 本来の単位円板上の, 更に有限連結な平面領域状の, あるいは更に一般の平面領域状の Hardy 空間に関する専門書は数多く出版されているが, 一般 Riemann 面上の Hardy 空間に特化し主眼に置くものとしては ([8], [5] 以外) 類例の殆どないものであり, その上単に定義域の形式的な一般化ではなく, 本来の単位円板上の Hardy 空間論の稔りある一般化の実現の場として, Parreau や Widom の着想の融合整備の末, M. Hayashi と共に Hasumi によって導入された, そして彼等により名付けられた “Parreau-Widom 面” 上の彼等の数々の重要な Hardy 空間の研究及び関連理論が主題の専門書として重要な書物と判断し, 名古屋大学での伝統的な故能代清教授主宰の函数論セミナー由来のいくつかのものの一つとして名古屋市及び近郊在住のメンバーが半世紀を大きく超えて維持し続けている土曜函数論セミナーに於いて, 本来の研究発表や検討会の合間を縫って購読することにしてから既に 10 年近くになる. 同書 [6] の最終章 XI が本書の主題を幾分離れたどちらかと言えば独立的に Hardy 空間による Riemann 面の分類理論に関する本書著者による研究論文 [4] の詳しい講述に当てられているし, 我々セミナーメンバー一同例外なくそれなりに熟知のテーマなので, 本書 [6] の様式や説明形態等を含めた [6] の雰囲気慣れるための方便の意味を込めて, 手始めのトレーニングのつもりで [6] の購読は XI 章から始めることにした. この種元である Hasumi の論文 [4] は Hardy 空間による Riemann 面の分類に関して Heins [8] 提出の当時広く関心の的となり Heins 問題と呼ばれた所に完全な決着を与えたことで大変有名な重要な論文である. [6] の XI 章は [4] の紹介かつ解説なので [4] より幾分詳しい事は当然ながら, 主結果及びその論証は全く同一であることを確かめた. それ故引用として [6] の第 XI 章と [4] 両者の同一視又は混同が場合によっては以下意識的又は無意識に起こることの理解を求めたい. さて普通多少の差はあるにせよ関心があっても, 現行の自己の研究に直接関係がないテーマを扱っている論文が発表されたとき大ざっぱに目を通すことはあっても, 細かい論証まで丁寧にフォローしないのが常で, [4] についてもこの点例外ではなかった. それで [6] の最終章 XI から購読を始めるに当り, [4] も意識し, 良い機会でもあるので, この購読に於いてはこの部分では特にテキストを逐語的に正確に細部の論証に至るまで丁寧に追尾し完全な理解を獲得できぬことを基本姿勢として行うことを確認し合って始めた. [6] の XI 章を完全了解部分と要再検討部分を一応特定してとにかく読み終えて, 大雑把には, 全体的に言って, 精緻を極めた技巧に裏打ちされた見事な論証展開は感動的でさえあった. それはそれとして, [6] の XI 章, あるいは同じことであるが, [4] で主張された主要定理及びそれらの証明構成を概説する.

半直線 $[0, \infty)$ 上の実数値非定数非減少連続凸函数 $\Phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ で $\Phi(0) = 0$ となるようなものを許容凸函数と呼ぶ. 許容凸函数 Φ に対して常に

$$d(\Phi) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi(t)}{t} \in (0, +\infty]$$

が存在するが, $d(\Phi) = +\infty$ (又は, $0 < d(\Phi) < +\infty$) のとき Φ は強凸 (又は, 非強凸) と言う. 二つの許容凸函数 Φ と Ψ についても, すべての正数 $s > 0$ に対し

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Psi(t)}{\Phi(t-s)} = 0$$

となるとき, $\Psi \prec \Phi$ と記す. Φ と Ψ がこの関係にあるとき, 必然的に Φ は強凸となるが, Ψ は強凸のことも非強凸のこともある. とくに $d(\Psi) < \infty$ で $d(\Phi) = \infty$ ならば $\Psi \prec \Phi$ である. 実際, $d(\Psi) < +\infty$ のとき ‘ $\Psi \prec \Phi \iff d(\Phi) = \infty$ ’ である. よって $\Psi \prec \Phi$ の本丸的状况は Φ と Ψ 共に強凸の状况にある. さて, $W \subset \hat{C}$ を領域で, Φ を許容凸函数とする. W 上の正則函数 f で, W 上の劣調和函数 $\Phi(\log^+ |f|)$ が W 上調和優函数を持つような f の全体を $H^\Phi(W)$ と記し, W 上のノルム Φ の Hardy-Orlicz 空間と呼ぶ. 更に $H^\Phi(W) = \mathbb{C}$ となるような \hat{C} の領域 W 全体の族を \mathcal{O}_Φ と記す. そのとき [6, XI] = [4] の主要定理は

Hasumi の定理. $\Psi \prec \Phi$ ならば

$$(0.35) \quad \mathcal{O}_\Psi \subset \mathcal{O}_\Phi \quad (\text{strict inclusion}).$$

この定理から Heins 問題の完全解決が導かれるのである. [6, XI] = [4] に於ける (0.35) の証明の筋を説明する. 先ず $\Psi \prec \Phi$ 故正数 a と b を適当に選べば $[0, +\infty)$ 上 $\Psi(t) \leq a\Phi(t) + b$ ($0 \leq t \leq +\infty$) となるので, どんな領域 $W \subset \hat{\mathbb{C}}$ に対しても $H^\Phi(W) \subset H^\Psi(W)$ であることがわかる. だから, とにかく単純包含関係

$$(0.36) \quad \mathcal{O}_\Psi \subset \mathcal{O}_\Phi \quad (\Psi \prec \Phi)$$

が得られる. 次いで, ある指定された範疇に入る 0 中心の環状集合 E の族 \mathcal{E} を特定構成する. そこで先ず第一に, 任意の $E \in \mathcal{E}$ に対して

$$(0.37) \quad H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) = \mathbb{C} \quad (\text{即ち, } \hat{\mathbb{C}} \setminus E \in \mathcal{O}_\Phi)$$

となることを一方で示す. 他方第二に, どんな $E \in \mathcal{E}$ に対しても

$$(0.38) \quad \frac{1}{z} \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) \quad (\text{即ち, } \hat{\mathbb{C}} \setminus E \notin \mathcal{O}_\Psi)$$

となることを示す. だから, 任意の $E \in \mathcal{E}$ を固定すれば

$$\hat{\mathbb{C}} \setminus E \in \mathcal{O}_\Phi \setminus \mathcal{O}_\Psi$$

となり, (0.36) 共に (0.35) が出る. 検討する迄もなく (0.36) は自明に正しい. (0.37) は相当に手の混んだ難しい証明を要するが, 追尾するのは容易で明解な心地よい論証が与えられていた. 問題は (0.38) の証明にあった. (0.38) は $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$ 上の劣調和函数 $\Psi(\log^+(1/|z|))$ が $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$ 上調和優函数を持つことを示すのであるが, その証明として, $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$ の調和測度を m とするとき

$$\int_{\partial(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)} \Psi \left(\log^+ \frac{1}{|\zeta|} \right) dm(\zeta) < +\infty$$

であること, 即ち $\Psi(\log^+(1/|\zeta|)) \in L^1(\partial(\hat{\mathbb{C}} \setminus E), m)$ を示し, その故に $\Psi(\log^+(1/|z|))$ が $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$ 上調和優函数を持つと説明されており, 定理牴牾 0.2 の適用であると思われる. 無論定理牴牾 0.2 を使っているように見えるからと言っても, それを正当化すべき必要な追加条件等の付加条件についての説明が不足しているだけか, 又は明白に提示されているのに我々の目に入らなかったか, あるいは我々が何かを見落としているだけのことで, 結果的には正しい論証が与えられている可能性も否定出来ないので, 精一杯慎重に検討の結果,

ノルム Ψ が非強凸なら (0.38) は正しい

が

ノルム Ψ が強凸なら $E \in \mathcal{E}$ となる E の中に $\frac{1}{z} \notin H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ となるものが存在

することを見つけた (即ち, (0.38) は不成立となる例 $E \in \mathcal{E}$ を見つけた). つまり Ψ が非強凸なら主定理 (0.35) の証明は不完全ながら誤りは含まず, 従って主定理 (0.35) は真であるが, Ψ が強凸ならば主定理 (0.35) の証明は, 反例があるという意味で一般には成立せぬ (0.38) に基づいていると思われ, 主定理 (0.35) の真偽は確認出来ない. 以上のような状況に鑑みて, だから, 結果として

$$(0.39) \quad \begin{array}{l} \text{Heins 問題は論文 [5] により完全に解かれたと} \\ \text{いう長年定着している認識には検討の余地がある} \end{array}$$

と結論し, 以下の考察を行った.

この結論には数年前の上記セミナーに於ける [6] の XI 章の購読終了間もなくに到達把握していたところである. その時点でこの結論の直ちの公刊も考えたが, 以下に述べる理由が実行を躊躇させ, 暫くは公刊を捨て置いた. 当然ながら Hasumi の定理 (0.35): $\mathcal{O}_\Phi \setminus \mathcal{O}_\Psi \neq \emptyset$ は族 $\mathcal{O}_\Phi \setminus \mathcal{O}_\Psi$ に入る $\hat{\mathbb{C}}$ の領域 W を何でもよい 1 つ提示して見せたら証明が終わる. Riemann 面の分類理論の中核をなす多くの結果は大体この型のもので占有される. 証明として $W \in \mathcal{O}_\Phi \setminus \mathcal{O}_\Psi$ として提示された W が実は $W \notin \mathcal{O}_\Phi \setminus \mathcal{O}_\Psi$ であると判明した場合はその証明は間違いで, (0.39) を口にするのは正当で何らかの益に資するところはあろうとも思えるし, それを言って本質的に考えても何になるとも思えぬ等々の葛藤が躊躇の正体であった. とにかくここまで来た以上当然次の段階に進みたい, 即ち, $\hat{\mathbb{C}}$ の領域 W で $W \in \mathcal{O}_\Phi \setminus \mathcal{O}_\Psi$ となるものを提示するか, 或いは, 実は $\mathcal{O}_\Phi \setminus \mathcal{O}_\Psi = \emptyset$ であることを示すのである. 前者の方向へ向かうとしたら, 差しあたり [4] により $W \in \mathcal{O}_\Phi \setminus \mathcal{O}_\Psi$ として提

示されていて, 実は $W \notin \mathcal{O}_\Phi \setminus \mathcal{O}_\Psi$ であった W を手直して $W \in \mathcal{O}_\Phi \setminus \mathcal{O}_\Psi$ と出来ないか調べるより当面手はない. そうでなく完全に零からの出発よりないのなら論文 [4] の考証の狙いをはるかに超えるものである. ましてや $\mathcal{O}_\Phi \setminus \mathcal{O}_\Psi = \emptyset$ を言うよりない状況に到るなら上記目的からみて単なる無理難題であろう. だから水準をかなり下げることになるが [4] の路線を忠実に維持踏襲するとして, 求める W を \mathcal{E} を使って見つける立場に立とう. そこで

$$(0.40) \quad \begin{cases} \mathcal{E}' := \{E \in \mathcal{E} : \frac{1}{z} \in H^\Psi(\hat{C} \setminus E)\}, \\ \mathcal{E}'' := \{E \in \mathcal{E} : \frac{1}{z} \notin H^\Psi(\hat{C} \setminus E)\} \end{cases}$$

と置くと, 2 集合の直和を \oplus で示せば

$$(0.41) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}' \oplus \mathcal{E}''$$

である. 論文 [4] の標榜する主定理は, 形式的には Hasumi の定理 (0.35): $\mathcal{O}_\Psi < \mathcal{O}_\Phi$ であるが, 実質的には, 上の記号で言えば

$$(0.42) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}' \quad (\text{実質的定理})$$

であると言える. その背景としては

$$(0.43) \quad \text{“(0.42)} \Rightarrow \text{(0.35)} \Rightarrow \text{Heins 問題の完全解決”}$$

である. さて既述の如く, 我々のセミナーの成果は, 上の記号で述べると, 次の 2 結果であった. 先ず第 1 に肯定的結果としては

$$(0.44) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}' \quad (\text{但し, } \Psi \text{ が非強凸の場合})$$

であり, 次いで第 2 は否定的結果で

$$(0.45) \quad \mathcal{E}'' \neq \emptyset \quad (\text{但し, } \Psi \text{ が強凸の場合})$$

である. 言うまでもないことであるが (0.41) により上の 2 結果は

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}' \iff \Psi : \text{非強凸}$$

に纏めることが出来る. さて故に, Ψ が非強凸の場合は, (0.44) により (0.42) は確かに成立し, (0.43) より Heins 問題の内

$$(H1) \quad \mathcal{O}_{AB^*} < \bigcap_{0 < p < \infty} \mathcal{O}_p$$

の部分が平面領域に対して成り立つことが結論される (\mathcal{O}_{AB^*} , \mathcal{O}_p の定義については 1.1 節参照). しかし Ψ が強凸の場合は, 前挙の (0.41) により (0.45) は

$$(0.46) \quad \mathcal{E} > \mathcal{E}' \quad (\text{但し, } \Psi \text{ が強凸の場合})$$

と同値なので, (0.42) が不成立となり, (0.43) に基づいて “Heins 問題の完全解決” という訳にゆかず (0.39) の陳述に到った訳である. そこで Heins 問題の現況は, Hejhal[10], 更に Kobayshi[11, 12], 等により, Heins 問題の内, 上記 (H1) に加え,

$$(H2) \quad \bigcup_{0 < p < \infty} \mathcal{O}_p < \mathcal{O}_{AB}$$

の部分が平面領域に対して成り立つこと, 更に

$$(H3) \quad \bigcup_{0 < q < p} \mathcal{O}_q < \mathcal{O}_p < \bigcap_{p < q < \infty} \mathcal{O}_q \quad (1 \leq p < \infty)$$

の部分も平面領域に対して大体成り立つことが示されたまでであると思われる (6.5 節参照). [4] の主張は (H1), (H2), (H3) は勿論のこと

$$(H4) \quad \bigcup_{0 < q < p} \mathcal{O}_q < \mathcal{O}_p < \bigcap_{p < q < \infty} \mathcal{O}_q \quad (0 < p < 1)$$

も平面領域に対して成立する, よって, Heins 問題は完全解決されたということであるが, 依然として (H4) の成否は未解決ではないか, 少なくとも [4] が解決したとは言えないのではないかとするのが (0.39) の指摘である. さて (0.42) の代わりに条件

$$(0.47) \quad \mathcal{E}' \neq \emptyset \quad (\text{願望的条件})$$

を考えよう. \mathcal{E} は元々空ではないから, (0.42) \Rightarrow (0.47), 即ち, (0.47) は (0.42) より弱い条件である. すると (0.43) の代替物として

$$(0.48) \quad \text{“(0.47) } \Rightarrow \text{ (0.35) } \Rightarrow \text{ Heins 問題の完全解決 : (H1) - (H4) の成立”}$$

の成立も直ぐ解る. それ故 (0.47) の成否は切実に知りたい, というより, 成立を切望する. Ψ が非強凸なら (0.44) より (0.47) は成立するので, 勿論強凸の場合が問題である. もしこれが否定されたら

$$\begin{cases} \Psi \text{ が非強凸の場合 : } \mathcal{E} = \mathcal{E}' \quad (\mathcal{E}'' \neq \emptyset) \quad [(0.44) \text{ により正しい}], \\ \Psi \text{ が強凸の場合 : } \mathcal{E} = \mathcal{E}'' \quad (\mathcal{E}' = \emptyset) \quad [\text{真偽不明, (0.45) に矛盾せぬ}] \end{cases}$$

となり, 状況の対称性により, これはこれで据わりはよい. しかしこうなれば $E \in \mathcal{E}$ による $W = \hat{\mathbb{C}} \setminus E$ で $W \in \mathcal{O}_\Phi \setminus \mathcal{O}_\Psi$ となるものを見つけること, 即ち [4] の路線の踏襲は完全に維持不能で, 問題は極度に困難となる. (0.47) の成否に対しては現在のところ数年何の進展もない. 確たる根拠もない単なる感触に過ぎないが (0.47) は成立しにくく思える (判定条件 0.33 の反例 0.17 への適用部分にあるコメント参照). 少なくとも (0.47) についての結論が何か出る迄はと時間を置いていたが, 一向何の進展も得られぬまま, 何年も時だけが過ぎていく様を見て, 何もないよりは少なくとも (0.39) の指摘がある方が, 今後何等かの展開に繋がる可能性が高まると期待して, 今回これを発表する決心に到った.

以下本論文の本文部分の各節及びその小節の内容の概要説明に代えて, それらの標題表を添付する:

1. Hardy-Orlicz 空間	26
1.1. 諸定義	26
1.2. 環状集合	27
2. 随伴調和測度	29
2.1. 単調性と漠取束	29
2.2. 調和測度の評価	32
3. 優調和優函数	36
3.1. 特殊判定定理	36
3.2. 一般判定定理	37
3.3. 条件 $(\Psi.1)$ の検討	40
3.4. 条件 $(\Psi.2)$ の検討	44
4. 環状集合の分類	47
4.1. 特殊環状集合の諸族	47
4.2. 特殊環状集合の存在	49
4.3. 非自明特殊環状集合族	56
5. Hardy-Orlicz 空間の単純構造	57
5.1. 零族例	58
5.2. 順例	65
5.3. 反例	67
6. Heins 問題に関する Hasumi 論文考	68
6.1. Hardy 空間に依る Riemann 面の分類	68
6.2. Heins の問題	68
6.3. Hasumi 論文の要点	69
6.4. 論証検討	72

6.5. 結論	74
付録 1. 調和測度の密度評価	75
付.1.1. 円周平均法	75
付.1.2. 円環型密度評価	78
付.1.3. 環型領域型密度評価	79
付録 2. 零族補領域をもつ環状集合の存在	82
付.2.1. 定理付.2 の証明	84

1. Hardy-Orlicz 空間

以下で環状集合と呼ぶ複素球面 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の閉部分集合 E の補集合として与えられる領域 $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$ 上の凸関数 Φ をノルムとする Hardy-Orlicz 空間 $H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ の構造を対 (E, H^Φ) が如何に制御するかの解明が目標であるが、先ず一般的な概念、記号等の想起から始める。

1.1. 諸定義.

右半直線 $[0, \infty)$ で非定数かつ非減少な凸関数 Φ で $\Phi(0) = 0$ となるものを、以下で $[0, \infty)$ 上の許容凸関数或いは誤解の恐れがないならば単に $[0, \infty)$ 上の凸関数と言う。

複素球面 $\hat{\mathbb{C}}$ の任意の領域 R を取るとき、 R 上の正則関数 f で $\Phi(\log^+ |f|)$ が R 上優調和優関数を持つようなもの全体を $H^\Phi(R)$ と記す。この族 $H^\Phi(R)$ を R 上のノルム Φ を持つ **Hardy-Orlicz 空間** と呼ぶ。 $\Phi(\log^+ |f|)$ は R 上の非負劣調和関数なので、これが R 上で優調和優関数を持つことと調和優関数を持つことと、及び最小調和優関数を持つこととの夫々と同値であることに留意する。

集合 $E \subset \hat{\mathbb{C}}$ が完全非連結な完閉集合で、 E を含む任意の領域 V に対して $H^\Phi(V \setminus E) = H^\Phi(V)$ となるような E 全体の族を \mathcal{N}_Φ と記し、 \mathcal{N}_Φ に入る各集合 E を \mathcal{N}_Φ 級の零集合と呼ぶ。 $\hat{\mathbb{C}}$ の領域 R で $H^\Phi(R)$ が定数関数以外を含まない、従って $H^\Phi(R) = \mathbb{C}$ となる R 全体の領域族を \mathcal{O}_Φ と記す。だから、例えば、 $E \in \mathcal{N}_\Phi$ なら $\hat{\mathbb{C}} \setminus E \in \mathcal{O}_\Phi$ となる。一般に指示された特定の単独関数 F が非存在又は特定の関数族 \mathcal{F} が定数関数のみになってしまうような領域の族を \mathcal{O}_F 又は $\mathcal{O}_\mathcal{F}$ と記して、これらを領域の零族と呼ぶので、上に導入した \mathcal{O}_Φ は領域の零族であるが、記号 \mathcal{O}_Φ としては、上の \mathcal{O}_F や $\mathcal{O}_\mathcal{F}$ の如くの説明通りが正式であるならば \mathcal{O}_Φ の Φ は Φ でなく H^Φ を用いるべきであり、従って本来は \mathcal{O}_{H^Φ} と記すべきところを \mathcal{O}_Φ と略記している訳である。以下では \mathcal{O}_Φ 以外の零族として、Green 関数 G を持たぬ領域である放物的領域 R の全体からなる零族 \mathcal{O}_G 、有界正則関数族 $AB(R) = \mathbb{C}$ となる領域全体の零族 \mathcal{O}_{AB} が現れる。

実数 $0 < p < \infty$ に対して、 $\Phi(t) := e^{pt} - 1$ ($0 \leq t < \infty$) は許容凸関数であるが、これをノルムとする Hardy-Orlicz 空間 $H^\Phi(R)$ を $H^p(R)$ と記して、領域 R 上の指数 p の Hardy 空間と呼ぶ。このときの \mathcal{N}_Φ と \mathcal{O}_Φ を \mathcal{N}_p と \mathcal{O}_p と記す。上述の注意同様 \mathcal{N}_{H^p} と \mathcal{O}_{H^p} の略記である。指数 $0 < p < \infty$ は $p = \infty$ 迄範囲を拡げ、 $H^\infty(R) := AB(R)$ を指数 ∞ の Hardy 空間として Hardy 空間 $H^p(R)$ ($0 < p < \infty$) の仲間に加え、また $\mathcal{N}_\infty = \mathcal{N}_{AB}$ や $\mathcal{O}_\infty = \mathcal{O}_{AB}$ の記法も用いる。

今一つ、 $\Phi(t) = t$ に対する $H^\Phi(R)$ 、 \mathcal{N}_Φ 、 \mathcal{O}_Φ を夫々 $AB^*(R)$ 、 \mathcal{N}_{AB^*} 、 \mathcal{O}_{AB^*} と書き、 $AB^*(R)$ は R 上の Nevanlinna 族、その他有理型正則関数族、特性関数有界正則関数族、Lindelöf 正則関数族等様々に呼ばれる。

Hardy 空間を中心とする下記の包含表は、不等式 $t \geq 0$ に対する、 $t^p \leq t^q + 1$ ($0 < p < q < \infty$) 及び $\log^+ t \leq t^p/p$ ($0 < p$)、を用いて容易に導かれる： $0 < p < q < \infty$ のとき

$$\begin{aligned}
AB^*(R) &\supset H^p(R) \supset H^q(R) \supset AB(R), \\
\mathcal{N}_{AB^*} &\subset \mathcal{N}_p \subset \mathcal{N}_q \subset \mathcal{N}_{AB}, \\
\mathcal{O}_{AB^*} &\subset \mathcal{O}_p \subset \mathcal{O}_q \subset \mathcal{O}_{AB}.
\end{aligned}$$

この表の包含関係が真の包含であるかの疑問の解明を陰に陽に論点の中心に踏まえながら以後の議論は進む。

Hardy-Orlicz 空間 $H^\Phi(R)$ を定める要素の一つ Φ は、この空間のノルムと呼ばれ、 $[0, \infty)$ 上の許容凸関数 Φ がその任を負うこと前述の通りであるが、とにかく空間 $H^\Phi(R)$ の構造の決定に本質的な役割を演ずる Φ の或る一性質に基づく許容

凸函数族 $\{\Phi\}$ の 2 範疇への直和分解について述べる. 許容凸函数 Φ の, $\Phi(0) = 0$ と定義域 $[0, \infty)$ 上の連続性 (仮定でなく帰結), 凸性, 非定数性, それに非減少性により, 2 点 $(0, 0)$ と $(t, \Phi(t))$ ($t > 0$) を結ぶ線分の勾配である $\Phi(t)/t$ を値とする函数

$$t \mapsto \Phi(t)/t \quad (0 < t < \infty)$$

は非負値で非減少かつ十分大きい t で正值である連続函数なので $(\Phi(t)/t)_{t=0} := \lim_{t \downarrow 0} \Phi(t)/t$ と定義して $[0, \infty)$ 迄同種の函数として拡張できるが, とにかく必ず極限

$$d(\Phi) := \lim_{t \uparrow \infty} \frac{\Phi(t)}{t} \in (0, +\infty]$$

が定まる. $0 < d(\Phi) \leq +\infty$ であるが, 大切な点は, とにかく $d(\Phi) > 0$ であることと, $d(\Phi) < +\infty$ と $d(\Phi) = +\infty$ の双方共実際に実現される点である (例: $d(t) = 1 < +\infty, d(t^2) = +\infty$). Φ に対する判別量 $d(\Phi)$ の無限ないし有限に基づいて許容凸函数族 $\{\Phi\}$ を 2 範疇へ分類する:

$$\{\Phi\} = \{\Phi : d(\Phi) = +\infty\} \cup \{\Phi : d(\Phi) < +\infty\}.$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi(t)}{t} = +\infty$$

は **de la Vallée-Poussin** の条件 とも呼ばれ, これを満たすところの分類前者族の Φ を強凸と言い, 残りの後者族の Φ を非強凸であると言う.

$$\Phi_0(t) := t \quad (0 \leq t < \infty)$$

で定める $[0, \infty)$ 上の許容凸函数 Φ_0 は $d(\Phi_0) = 1 < \infty$ だから非強凸であり, しかも非強凸な許容凸函数の最簡例であろう. 其れ処か実際には, 非強凸な Φ は本質的には Φ_0 で尽きることを下に見る. 任意の $[0, \infty)$ 上の許容凸函数 Φ が $d(\Phi) < +\infty$ を満たすことを言い換えて,

Φ が非強凸となる為の必要十分条件は, 2 定数 $1 \leq K < +\infty$ と $0 < t_0 < +\infty$ が存在して

$$K^{-1}\Phi_0(t) \leq \Phi(t) \leq K\Phi_0(t) \quad (t_0 \leq t < +\infty)$$

となることである.

これが直ちに分かる. 上の不等式から $H^\Phi(R) = H^{\Phi_0}(R)$ が従う. $H^{\Phi_0}(R) = AB^*(R)$ で R 上の正則函数の Nevanlinna 族 $AB^*(R)$ を定義したのだから, 結局, Φ が非強凸ならば常に $H^\Phi(R) = AB^*(R)$, と言うことになる. 一般に Hardy-Orlicz 空間 $H^\Phi(R)$ は代数的構造に乏しいが, $AB^*(R)$ は $AB(R)$ 同様 \mathbb{C} 係数の線形空間どころか \mathbb{C} 代数でもある.

今一つよく許容凸函数 Φ 達に付与される一性質に注目する. Hardy-Orlicz 空間 $H^\Phi(R)$ は一般にはその線形性が欠落する. 一つにはその欠を幾分でも補う一助として, Φ に対する条件

$$\frac{\Phi(t + \log 2)}{\Phi(t)} = O(1) \quad (t \rightarrow +\infty)$$

を考える. このとき Φ は Δ_2 条件を満たすと言う. これは所謂 doubling condition と呼ばれるものの一種である. 強凸な Φ が任意に与えられたとき, やはり強凸でしかも Δ_2 条件を満たす許容凸函数 Ξ で本質的には Φ を超えない, 即ち

$$\frac{\Xi(t)}{\Phi(t)} = o(1) \quad (t \rightarrow +\infty)$$

となるような Ξ を構成することは難しくない. Δ_2 条件を活かすべき状況でそれを満たさぬ強凸な Φ が出現したような場合などこの補助許容凸函数 Ξ を利用する手法は時には有力である.

1.2. 環状集合.

Hardy-Orlicz 空間 $H^\Phi(R)$ の構造の解析, 例えば, $H^\Phi(R)$ が定数函数族 \mathbb{C} のみからなるか \mathbb{C} 以外の函数を含むか, あるいは或る指定特定の函数, 例えば z を, $H^\Phi(R)$ が含むか否か等々, が $H^\Phi(R)$ の研究の目指すところの一つであるが, 方法的になるが, $H^\Phi(R)$ の構造の制御が容易な形の領域を考えることは有効である. 領域 R とその補集合である閉集合 $\hat{\mathbb{C}} \setminus R$

の考察は同じことであるので, 上記方針に沿って, [4] で導入された環状集合と呼ぶ一類の $\hat{\mathbb{C}}$ の閉集合族を以下で定義する.

閉集合 $F \subset \hat{\mathbb{C}}$ の任意の点 $z_0 \in F$ の成分は一点集合 $\{z_0\}$ 又は非退化連続体のいずれかである. そこで F のどの点の成分もその点のみの一点集合となると F は完全非連結であると言う. 閉集合 $F \subset \hat{\mathbb{C}}$ が極集合であるとは F が対数容量零であることと同義語と解してよい. だから F が非極集合であるとは F が対数容量正をもつことを意味する. F が非極集合であるとき, F は非極 (nonpolar) であると言う. だから F の対数容量正と言うに同じことである.

いよいよ環状集合 F の定義を与える. その為に先ず E の外枠構造を与える. 外枠構造は大外枠数列 $(b_n)_{n=0}^\infty$ と外枠定数 $0 < \rho < \delta < 1$ と外枠数列 $(a_n)_{n=0}^\infty$ からなる. 大外枠数列は $b_0 = 1$ 以外全く任意の正数列 $(b_n)_{n=0}^\infty$ である. 外枠数列は正数列 $0 < a_n \leq b_n$ ($n = 0, 1, \dots$) であって

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \rho \quad (n = 0, 1, \dots)$$

を満たすものとする. $(E_n)_{n=0}^\infty$ を $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$ 内の完全非連結で非極な完閉集合 E_n の列で

$$E_n \subset \{\delta a_n \leq |z| \leq a_n\} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

となるものとする. そのとき $\hat{\mathbb{C}}$ の閉集合

$$E := \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \right) \cup \{0\}$$

を $\hat{\mathbb{C}}$ 内の環状集合 (circular set) と呼ぶ. 各 E_n ($n = 0, 1, \dots$) を E の成分, 点 $z = 0$ を E の中心と言う. だから正式正確には E を中心 0 の環状集合と言うのであるが, 以下では環状集合は中心 0 のもの限定するから, E を単に環状集合とだけ言う. 環状集合 E と言えば閉集合 $E \subset \mathbb{C}$ のみが表面に出るけれど, 外枠構造も背景にはあり, $\{(b_n)_{n=0}^\infty, 0 < \rho < \delta < 1, (a_n)_{n=0}^\infty, (E_n)_{n=0}^\infty\}$ 4 者の総合概念として環状集合を捕らえる. だから同じ E であってもその外枠構造が違えば異なる環状集合と理解する. その上でしかし, 外枠構造等の裏方込みの了解のもとで, 現実的にはやはり簡単に $E = (\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n) \cup \{0\}$ を環状集合と呼ぶ. 以下本講を通じて, 環状集合 E 全体の族を記号 Γ で表す. 環状集合の英語表示 circular set の頭文字 c の対応ギリシャ大文字 Γ を宛てた. 後程その様々の部分族を考える等記号自体も込めて重要な役割を担うので, ここで特に記号の意味を強調しておく:

Γ : 全環状集合族.

環状集合 $E = (\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n) \cup \{0\}$ の各成分 $E_n \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ は完全非連結故 E 自身も $\hat{\mathbb{C}}$ 内完全非連結であるから, その補集合である $W := \hat{\mathbb{C}} \setminus E$ は無限遠点 ∞ を内点に持つ $\hat{\mathbb{C}}$ 内の領域で, $\partial W = \partial(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) = E$ である. 故に Hardy-Orlicz 空間 $H^\Phi(W) = H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ の構造解析はこれが如何にノルム Φ と $E \in \Gamma$ の対 (Φ, E) に関わるか, そして先ず Φ を固定したら, どんな具合に $E \in \Gamma$ に依存するかを見ることになる. そこで $E \in \Gamma$ の定める領域

$$W := \hat{\mathbb{C}} \setminus E$$

に対して

$$W_n := \{|z| > a_n\} \setminus E = \{|z| > a_n\} \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} E_k \quad (n = 1, 2, \dots)$$

は W の部分領域で, $(W_n)_{n=1}^\infty$ は W の原点 0 方向への“近似”を与える. 原点 $z = 0$ 中心, 半径 $0 < \sigma < +\infty$ の円周を

$$C(\sigma) := \{|z| = \sigma\}$$

と記すならば

$$\partial W = E, \quad \partial W_n = C(a_n) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} E_k \right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

となる.

最後に今一つ各 $E \in \Gamma$ に付随する重要な概念について述べる為の本質的な道具を与える. $E \in \Gamma$ の決める領域 W とその近似列 $(W_n)_{n=0}^\infty$ に対して ∞ に対する W の調和測度を m と記し又 ∞ に対する各 W_n の調和測度を m_n と記す

($n = 1, 2, \dots$). そして m を E の随伴調和測度, そして $(m_n)_{n=1}^\infty$ を E の随伴近似調和測度列と呼ぶ. m は $\partial W = E$ 上の Borel 測度で, 各 $\varphi \in C(\partial W)$ に対し, $m(\{0\}) = 0$ 故,

$$H_\varphi^W(\infty) = \int_{\partial W} \varphi(z) dm(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} \varphi(z) dm(z)$$

により特徴付けられる. 各 m_n は $\partial W_n = (\cup_{k=0}^{n-1} E_k) \cup C(a_n)$ 上の Borel 測度で各 $\varphi \in C(\partial W_n)$ に対し

$$H_\varphi^{W_n}(\infty) = \int_{\partial W_n} \varphi(z) dm_n(z) = \int_{C(a_n)} \varphi(z) dm_n(z) + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{E_k} \varphi(z) dm_n(z)$$

によって特徴付けられる.

2. 随伴調和測度

環状集合 E の決める領域 $W := \hat{\mathbb{C}} \setminus E$ のポテンシャル論的諸性質は E の随伴調和測度 m 及び随伴近似調和測度列 $(m_n)_{n=1}^\infty$ に大きく依存するので, m や m_n の相互関係等に関する知見は大切である. その為これらについて定性的 (順序や収束) 及び定量的 (上下界評価) の両面からの考察を行う.

2.1. 単調性と漠収束.

m や m_n ($n = 1, 2, \dots$) 相互間の大小関係や測度列 $(m_n)_{n=1}^\infty$ の収束状況の研究方法は色々考えられるが, ここでは Dirichlet 問題の PWB 法 (即ち, Perron-Wiener-Brelot 法) による解法の利用が有効便利で分かり易く思えるので, 関連記号の確認を第 1 の目途に置きながら, 採用解法の想起から始める.

\mathbb{C} の双曲的部分領域 R とその境界函数 f に対する Dirichlet 問題を考える. $\overline{\mathcal{S}}_f^R$ (又は, $\underline{\mathcal{S}}_f^R$) は R 下方 (又は, 上方) 有界な優 (又は, 劣) 調和函数 s で各 $\zeta \in \partial R$ に対し

$$\liminf_{R \ni z \rightarrow \zeta} s(z) \geq f(\zeta) \quad (\text{又は, } \limsup_{R \ni z \rightarrow \zeta} s(z) \leq f(\zeta))$$

を満足するもの全体の族とする. この両族が空でないとき, これらは Perron 族であるので

$$\overline{H}_f^R := \inf_{s \in \overline{\mathcal{S}}_f^R} s \quad (\text{又は, } \underline{H}_f^R := \sup_{s \in \underline{\mathcal{S}}_f^R} s)$$

は R 上の調和函数で, $\bar{s} \in \overline{\mathcal{S}}_f^R$ (又は, $\underline{s} \in \underline{\mathcal{S}}_f^R$) を任意にとるとき R 上 $\bar{s} \geq \underline{s}$ だから, R 上

$$\overline{H}_f^R \geq \underline{H}_f^R$$

となる. たまたまこの両者が一致することがあればその共通の函数を H_f^R と記し (即ち

$$H_f^R := \overline{H}_f^R = \underline{H}_f^R$$

と記し), これを Dirichlet 問題 (R, f) の PWB の意味での解と呼び, R の境界函数 f は可解であると言う. ここ迄が PWB 法の前段階であるが同時に PWB 法の心臓部分で, 残るところは, $\zeta \in \partial R$ に於いて

$$\lim_{R \ni z \rightarrow \zeta} H_f^R(z) = f(\zeta)$$

となるか否かの検討で, 次のそして最後の段階の課題である. それはとにかく, この前段階に於ける Perron 族にかかわる諸定義に関連して, 極度に技術的なことであるが, 次の注意 ([3] p.21 参照) は有用である:

$a \in R$ を任意固定点とした上で, Dirichlet 問題 (R, f) に於いて, f が可解であるとき, R 上の正值優調和函数 s で, $s(a) < +\infty$ であり, 更に, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対して

$$H_f^R + \varepsilon s \in \overline{\mathcal{S}}_f^R \quad \text{かつ} \quad H_f^R - \varepsilon s \in \underline{\mathcal{S}}_f^R$$

となるものが存在する.

上記注意は m や m_n の測度間の大小比較や収束判定に使われるが、準備の最後に、念の為、測度の順序と収束の2概念の定義の確認に当てる。

$X \subset \hat{\mathbb{C}}$ を完閉集合とすると、 $C(X)$ を X 上の実数値連続関数の Banach 空間とし $C(X)^+ := \{\varphi \in C(X) : \varphi(z) \geq 0 \ (z \in X)\}$ と記す。 μ, ν を X 上の Borel 測度とし不等式

$$\int_X \varphi(z) d\mu(z) \leq \int_X \varphi(z) d\nu(z) \quad (\varphi \in C(X)^+)$$

が成り立つとき、 ν は μ より大であると言い、 $\mu \leq \nu$ と記し、これで順序関係を定める。次に $(\mu_n)_{n=1}^\infty$ を X 上の Borel 測度列とすると、今一つ X 上の Borel 測度 μ があって極限式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi(z) d\mu_n(z) = \int_X \varphi(z) d\mu(z) \quad (\varphi \in C(X))$$

となるとき、 $(\mu_n)_{n=1}^\infty$ は μ に漠収束すると言い、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu$ と記す。上の極限式で φ の限定条件として $\varphi \in C(X)$ とあるところは $\varphi \in C(X)^+$ で十分である。理由は $C(X)$ の Jordan 分解 $C(X) = C(X)^+ \ominus C(X)^+$ を見れば自明であろう。

準備はここ迄で終えてここから本筋の本題へと進む。環状集合 $E = (\cup_{n=0}^\infty E_n) \cup \{0\}$ の随伴調和測度 m と随伴近似調和測度列 $(m_n)_{n=1}^\infty$ を考える。 E の任意成分 E_j ($j = 0, 1, \dots$) を任意に選択固定するとき、 m 及び m_{j+n} ($n = 1, 2, \dots$) は E_j 上の Borel 測度である。これらは以下の如き関係性にある：

命題 2.1.1 成分 E_j 上 $(m_{j+n})_{n=1}^\infty$ は単調増大、即ち

$$(2.1.2) \quad m_{j+n} \leq m_{j+n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

であって、 m を上界に持ち、即ち

$$(2.1.3) \quad m_{j+n} \leq m \quad (n = 1, 2, \dots)$$

となり、 m に漠収束する、即ち

$$(2.1.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m_{j+n} = m.$$

証明. 任意の $\varphi \in C(E_j)^+$ を取る。 φ を E_j から ∂W_{j+n} 上の連続関数へ $\varphi|_{(\partial W_{j+n} \setminus E_j)} = 0$ によって拡張して $\varphi \in C(\partial W_{j+n})^+$ と考える ($n = 1, 2, \dots$)。同じく $\varphi \in C(E_j)^+$ を E_j から ∂W 上の連続関数へ上と同種の条件 $\varphi|_{(\partial W \setminus E_j)} = 0$ によって拡張して $\varphi \in C(\partial W)^+$ とも考える。こうして同じ記号 φ を、 $\varphi \in C(E_j)^+$ を嚆矢として、 $\varphi \in C(\partial W_{j+n})^+$ ($n = 1, 2, \dots$)、及び $\varphi \in C(\partial W)^+$ と三様に使うが、文脈からこの三様のうちどの意味で使っているかの混乱の恐れはないと思う。この遣り方は以下の (2.1.2) – (2.1.4) の証明に於いて執られる。

先ず (2.1.2) から始める。その為一対の Dirichlet 問題 (W_{j+n}, φ) , (W_{j+n+1}, φ) を考える ($n = 1, 2, \dots$)。 $\varphi \in C(\partial W_{j+n+1})^+$ は有界連続故 Dirichlet 問題 (W_{j+n+1}, φ) に於ける W_{j+n+1} の可解境界関数であるから、上の準備の中の注意により、 W_{j+n+1} 上の正值優調和関数 s で $s(\infty) < +\infty$ かつすべての正数 $\varepsilon > 0$ に対し $H_\varphi^{W_{j+n+1}} + \varepsilon s \in \overline{S}_\varphi^{W_{j+n+1}}$ となるものが存在する。 $\varphi \in C(\partial W_{j+n+1})^+$ だから、 W_{j+n+1} 上、従って $C(a_{j+n})$ 上 $H_\varphi^{W_{j+n+1}} \geq 0$ であるから、 $\varphi \in C(\partial W_{j+n})^+$ として

$$\liminf_{W_{j+n} \ni z \rightarrow \zeta} (H_\varphi^{W_{j+n+1}}(z) + \varepsilon s(z)) \geq \varphi(\zeta)$$

は $\zeta \in C(a_{j+n})$ で成り立つ。だから $H_\varphi^{W_{j+n+1}} + \varepsilon s \in \overline{S}_\varphi^{W_{j+n}}$ であり、よって

$$H_\varphi^{W_{j+n}}(z) \leq H_\varphi^{W_{j+n+1}}(z) + \varepsilon s(z) \quad (z \in W_{j+n})$$

が結論される。ここで上式で $z = \infty$ とし、 $s(\infty) < +\infty$ と $\varepsilon > 0$ の任意性により $\varepsilon \searrow 0$ とすることで

$$(2.1.5) \quad H_\varphi^{W_{j+n}}(\infty) \leq H_\varphi^{W_{j+n+1}}(\infty) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

となる. そこで調和測度の定義より

$$(2.1.6) \quad \int_{E_j} \varphi(z) dm_{j+n} = \int_{\partial W_{j+n}} \varphi(t) dm_{j+n} = H_\varphi^{W_{j+n}}(\infty) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

となる. (2.1.5) 及び (2.1.6)_n と (2.1.6)_{n+1} から (2.1.2) が出る.

次に (2.1.3) を示したい. 上段と全く同様並行的に進行する. 先ず一対の Dirichlet 問題 (W, φ) , (W_{j+n}, φ) を考える ($n = 1, 2, \dots$). $\varphi \in C(\partial W)^+$ は有界連続故 Dirichlet 問題 (W, φ) に於ける領域 W の可解境界函数であるから, 前述した準備の中の注意により, W 上の正值優調和函数 s で $s(\infty) < +\infty$ かつすべての正数 $\varepsilon > 0$ に対し $H_\varphi^W + \varepsilon s \in \overline{\mathcal{S}}_\varphi^W$ となるものが存在する. $\varphi \in C(\partial W)^+$ だから, W 上, 従って特に $C(a_{j+n})$ 上 $H_\varphi^W \geq 0$ であるから, $\varphi \in C(\partial W_{j+n})^+$ と考えて

$$\liminf_{W_{j+n} \ni z \rightarrow \zeta} (H_\varphi^W(z) + \varepsilon s(z)) \geq \varphi(\zeta)$$

は先ず $\zeta \in C(a_{j+n})$ で成り立つ. $H_\varphi^W + \varepsilon s \in \overline{\mathcal{S}}_\varphi^W$ 故, 上記不等式はまた $\zeta \in \partial W_{j+n} \setminus C(a_{j+n})$ ($\subset \partial W$) でも成り立つ. だから族 $\overline{\mathcal{S}}_\varphi^{W_{j+n}}$ の定義により $H_\varphi^W + \varepsilon s \in \overline{\mathcal{S}}_\varphi^{W_{j+n}}$ であり, よって

$$H_\varphi^{W_{j+n}}(z) \leq H_\varphi^W(z) + \varepsilon s(z) \quad (z \in W_{j+n})$$

が結論される. ここで, 上式で $z = \infty$ とし, $s(\infty) < +\infty$ に基づき ε の任意性により $\varepsilon \searrow 0$ とすることで

$$(2.1.7) \quad H_\varphi^{W_{j+n}}(\infty) \leq H_\varphi^W(\infty) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

となる. そこで調和測度の定義により, (2.1.6) 同様

$$(2.1.8) \quad \int_{E_j} \varphi(z) dm(z) = \int_{\partial W} \varphi(z) dm(z) = H_\varphi^W(\infty)$$

が得られる. (2.1.7) 及び (2.1.6) と (2.1.8) から (2.1.3) が導出される.

最後に (2.1.4) を示して証明を終了とする. 直前段落同様 Dirichlet 問題の対 (W, φ) , (W_{j+n}, φ) を考え, ここ迄に繰り返し使った注意を再度利用するが, 今回は今迄とは異なる逆向きの適用である. さて $\varphi \in C(\partial W)^+$ は ∂W 上有界連続だから, φ は Dirichlet 問題 (W, φ) の領域 W の可解境界函数故 W 上の正值優調和函数 s で, $s(\infty) < +\infty$ かつすべての正数 $\varepsilon > 0$ に対し $H_\varphi^W - \varepsilon s \in \underline{\mathcal{S}}_\varphi^W$ となるものが存在する. E_j は非極だから $\hat{C} \setminus E_j$ は双曲的領域なので, $z = 0$ に極を持つ Green 函数 g を持つ. 任意の $\varepsilon' > 0$ に対し

$$H_\varphi^W - \varepsilon s - \varepsilon' g \leq H_\varphi^W - \varepsilon s \in \underline{\mathcal{S}}_\varphi^W$$

なので, $H_\varphi^W - \varepsilon s - \varepsilon' g \in \underline{\mathcal{S}}_\varphi^W$ となる. 任意の $\zeta \in \partial W_{j+n} \setminus C(a_{j+n}) \subset \partial W$ に対し

$$\limsup_{W_{j+n} \ni z \rightarrow \zeta} (H_\varphi^W(z) - \varepsilon s(z) - \varepsilon' g(z)) \leq \limsup_{W \ni z \rightarrow \zeta} (H_\varphi^W(z) - \varepsilon s(z)) \leq \varphi(\zeta)$$

である. W 上 $0 \leq H_\varphi^W \leq \|\varphi\|_{E_j} := \sup \varphi|_{E_j} < +\infty$ であり, $\inf g|_{C(a_{j+n})} \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$) なので任意の正数 $\varepsilon' > 0$ に対しある $n_0 \in \mathbb{N}$ があって $\inf g|_{C(a_{j+n})} \geq (\|\varphi\|_{E_j})/\varepsilon'$ ($n \geq n_0$) となる. 故に $C(a_{j+n})$ 上

$$H_\varphi^W - \varepsilon s - \varepsilon' g \leq \|\varphi\|_{E_j} - \varepsilon' \inf g|_{C(a_{j+n})} \leq 0 = \varphi|_{C(a_{j+n})} \quad (n \geq n_0)$$

となり, $H_\varphi^W - \varepsilon s - \varepsilon' g \in \underline{\mathcal{S}}_\varphi^{W_{j+n}}$ が分かり, 従って W_{j+n} 上, そして特に $z = \infty$ に於いて

$$H_\varphi^W(\infty) - \varepsilon s(\infty) - \varepsilon' g(\infty) \leq H_\varphi^{W_{j+n}}(\infty) \leq H_\varphi^W(\infty) \quad (n \geq n_0)$$

となる. 最後の不等式は (2.1.7) による. ε は n を含めて一切任意であるから, 上不等式で $\varepsilon \searrow 0$ としてよく, その上で $n \searrow \infty$ としてよく, すると

$$H_\varphi^W(\infty) - \varepsilon' g(\infty) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} H_\varphi^{W_{j+n}}(\infty) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} H_\varphi^{W_{j+n}}(\infty) \leq H_\varphi^W(\infty)$$

となり, ここで ε' は任意で $\varepsilon' \searrow 0$ とすることは完全に合法故

$$H_\varphi^W(\infty) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} H_\varphi^{W_{j+n}}(\infty) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} H_\varphi^{W_{j+n}}(\infty) \leq H_\varphi^W(\infty)$$

となる. よって (2.1.6) と (2.1.8) で上式を書き換えると

$$\int_{E_j} \varphi(z) dm(z) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{E_j} \varphi(z) dm_{j+n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{E_j} \varphi(z) dm_{n+j}(z) \leq \int_{E_j} \varphi(z) dm(z)$$

が得られる. これより $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_j} \varphi(z) dm_{j+n}(z)$ の存在が保証され

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_j} \varphi(z) dm_{j+n}(z) = \int_{E_j} \varphi(z) dm(z) \quad (\varphi \in C(E_j)^+, \text{ 従って } \varphi \in C(E_j))$$

となる. これは (2.1.4) を意味する. □

2.2. 調和測度の評価.

環状集合 $E = (\cup_{n=0}^\infty E_n) \cup \{0\}$ は裏で外枠構造と呼ぶもので支えられていた: それは一般には殆ど無意味の大外枠数列 $(b_n)_{n=0}^\infty$ と言う正数列と外枠定数 $0 < \rho < \delta < 1$ と外枠数列と呼ぶ単調減少零列 $(a_n)_{n=0}^\infty$ で, E の随伴測度は, E そのものと言うより, むしろ, 外枠構造に, より大きく, と思える程の影響を受ける. ここでは, E の随伴近似調和測度列 $(m_n)_{n=1}^\infty$ に対して, 円周 $C(a_n) = \{|z| = a_n\}$ の調和測度 $m_n(C(a_n))$ の作る数列の量的挙動に関して, 上方及び下方からの次の如き評価を与える:

上方からの評価としては

$$(2.2.1) \quad \limsup_{n \nearrow \infty} m_n(C(a_n)) \log a_n^{-1} < +\infty;$$

下方からの評価としては, 番号 $n \geq 1$ を任意に選び, $(a_j)_{j=0}^{n-1}$ と $(E_j)_{j=0}^{n-1}$ を固定した上で, a_n が区間 $(0, \rho a_{n-1})$ 内を自由に動けるとしたとき

$$(2.2.2) \quad \liminf_{a_n \searrow 0} m_n(C(a_n)) \log a_n^{-1} > 0.$$

上方評価に於いては, 上極限值が有限なことが重要で, その値そのものの価値は低く, 従ってこの部分は本質的には完成と考えてよい. 下方評価に於いては, 下極限の正値性のみで事足りる範囲にのみ応用すべきで当面はこれでよいが, 実際には, この極限值ではなく, 数列 $(m_n(C(a_n)) \log a_n^{-1})_{n=1}^\infty$ の下極限を中心とする挙動を知らねば, 深い研究には進めないで, ここに得られている下方評価では本当のところは大いに不満足である. 上記 2 評価の証明は夫々別個に下記する.

上方評価: 上記上方評価不等式 (2.2.1) を, これより幾分精密な形で述べた次の形で証明する.

命題 2.2.3. 環状集合 E により定まる正定数 $B = B(E)$ と番号 $N = N(E)$ があって, 次の不等式が成立する:

$$(2.2.4) \quad m_n(C(a_n)) \leq \frac{B}{\log a_n^{-1}} \quad (n \geq N).$$

証明: 最初開区間 $(0, \delta a_0)$ を変化する実数 b を径数とする 1 径数函数族 $\{w_b\}_{0 < b < \delta a_0}$ を次のように作る. 各 $b \in (0, \delta a_0)$ に対し函数 w_b は領域 $\{b < |z|\} \setminus E_0$ 上の境界条件が $w_b|C(b) = 1, w_b|E_0 = 0$ である Dirichlet 問題の PWB 解であるとする. 問題の領域の境界 $C(b) \cup E_0$ 上の上記境界値は有界連続なので, これは可解で, w_b は $\{b < |z|\} \setminus E_0$ 上の $0 < w_b < 1$ である調和函数である. ところで $C(b)$ はこの領域の正則境界成分なので, w_b は $C(b)$ で連続境界値 1 を持つから, $w_b|_{\{0 < |z| \leq b\}} \equiv 1$ として, w_b の定義域を $\hat{C} \setminus (E_0 \cup \{0\})$ に拡張すると w_b は $\hat{C} \setminus (E_0 \cup \{0\})$ 上 $0 < w_b \leq 1$ である連続優調和函数である. 径数同士間に $0 < b < b' < \delta a_0$ の大小があるとすると

$$0 < w_b|C(b') < 1 = w_{b'}|C(b')$$

であるから, 最大値原理により $\hat{C} \setminus (E_0 \cup \{0\})$ 上

$$0 < w_b \leq w_{b'} \leq 1 \quad (0 < b < b' < \delta a_0)$$

となる. つまり有向列 $(w_b)_{b \searrow 0}$ は単調非増加なので, Harnack 原理により, $(w_b)_{b \searrow 0}$ は $\hat{\mathbb{C}} \setminus (E_0 \cup \{0\})$ 上の調和函数 w_0 に局所一様収束し, $0 \leq w_0 \leq 1$ である. 原点 $z = 0$ は, その穴空き近傍での有界調和函数 w_0 の孤立特異点だから, Riemann の定理により, これは除去可能で, w_0 は $\hat{\mathbb{C}} \setminus E_0$ 上の調和函数で, w_0 は領域 $\hat{\mathbb{C}} \setminus E_0$ 上の境界条件 $w_0|_{E_0} = 0$ の Dirichlet 問題の PWB 解となることが検証できる. だから $w_0(z) = 0$ ($z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus E_0$) となり, 特に $w_0(\infty) = 0$ である. つまり $\{a_0 < |z|\}$ 上の正值調和函数の有向列 $(w_b)_{b \searrow 0}$ に対して, $w_b(\infty) \searrow 0$ ($b \searrow 0$) となることがわかった. 以上の議論の結論として,

$$(2.2.5) \quad b(E) \in (0, \delta a_0) \setminus \cup_{n=1}^{\infty} [\delta a_n, a_n], \quad w_{b(E)}(\infty) < \frac{1}{3}$$

となる実数 $b(E)$ の存在が示された. 以下この $b(E)$ を固定する. $b(E) < \delta a_0 < a_0$ だから $a_n < b(E)$ ならば $n \in \mathbb{N}$ である. このような最小の n を $N(E) \in \mathbb{N}$ とする:

$$(2.2.6) \quad N(E) := \min\{n \in \mathbb{N} : a_n < b(E)\}.$$

以下番号 n は $n \geq N(E)$ ばかりを考える. そのときは $a_n < b(E)$ となっている. 更に領域 $\{b(E) < |z|\} \setminus E_0$ の計測点 ∞ に対する調和測度を $\mu = \mu_E$ と記すならば, $\mu_E(C(b(E))) = w_{b(E)}(\infty) < 1/3$ なので

$$(2.2.7) \quad \mu_E(C(b(E))) < \frac{1}{3}$$

である. 以下記号の簡便化の為誤解の恐れのない限り, $b = b(E)$, $\mu = \mu_E$ の略記も使う. $N = N(E)$ も同様である. 今一つ

$$(2.2.8) \quad 3 < \beta(E) < \infty$$

となる正定数 $\beta(E)$ も考える: $a_0 \leq 1 < \beta(E)/3 < \infty$. $\beta = \beta(E)$ の略記も使う.

上述通り番号 $n > N(E)$ を任意に取り固定する. 暫時固定するが最終的には $n \nearrow \infty$ とする積もりである. 領域 $\{a_n < |z|\} \setminus E_0$ 上境界条件 $v|_{C(a_n)} = 1$, $v|_{E_0} = 0$ の Dirichlet 解 v を考え $v(\infty)$ を上から評価したい. $C(b)$ 上 v , E_0 上 0 の境界条件で定める領域 $\{b < |z|\} \setminus E_0$ ($C \setminus \{a_n < |z|\} \setminus E_0$) 上の Dirichlet 解が v であると解することができるので

$$(2.2.9) \quad v(\infty) = \int_{C(b)} v(z) d\mu(z)$$

は調和測度 μ の定義の帰結である. そこで (2.2.8) の $\beta = \beta(E)$ に対し, $v|_{C(\beta)}$ を上から $v(\infty)$ で評価したい. ∞ 中心の $\hat{\mathbb{C}}$ の円板で考えるより, 0 中心の \mathbb{C} の円板で考える方が見易いので

$$\hat{v}(\zeta) := v(1/\zeta)$$

を導入する. $\hat{v}(\zeta)$ を $\Delta(3\beta^{-1}) := \{|\zeta| \leq 3\beta^{-1}\}$ で考えることと $v(z)$ を $\{\beta/3 \leq |z|\}$ で考えることは等角的に同等なので, $v|_{C(\beta)}$ の $v(\infty)$ による評価は $\hat{v}|_{C(\beta^{-1})}$ を $\hat{v}(0)$ で評価することと同等であることに基づき, v の代わりに \hat{v} で作業する. \hat{v} は $\Delta(3\beta^{-1})$ 上正值調和 (即ち $\hat{v} \in H^p(\Delta(3\beta^{-1}))$) に注意し, $\beta e^{i\theta} \in C(\beta)$ なら $\beta^{-1} e^{-i\theta} \in C(\beta^{-1})$ で $3\beta^{-1} e^{it} \in C(3\beta^{-1}) = \partial\Delta(3\beta^{-1})$ だから \hat{v} の Poisson 積分表示により

$$\begin{aligned} v(\beta e^{i\theta}) &= \hat{v}(\beta^{-1} e^{-i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(3\beta^{-1})^2 - (\beta^{-1})^2}{(3\beta^{-1})^2 - 2(3\beta^{-1})(\beta^{-1}) \cos(t + \theta) + (\beta^{-1})^2} \hat{v}(3\beta^{-1} e^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{9 - 1}{9 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cos(\theta + t) + 1} \hat{v}(3\beta^{-1} e^{it}) dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{9 - 1}{9 - 2 \cdot 3 \cdot 1 + 1} \hat{v}(3\beta^{-1} e^{it}) dt \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{v}(3\beta^{-1} e^{it}) dt = 2\hat{v}(0) = 2v(\infty) \end{aligned}$$

となる. 上記作業を端折って一言で言うならば, 要するに, Harnack の不等式によりでよいのだがとにかく

$$(2.2.10) \quad v|_{C(\beta)} \leq 2v(\infty)$$

が導かれた.

半閉半開領域 $V := \{a_n \leq |z| \leq \beta\} \setminus E_0$ 上の 2 個の調和函数 $v(z)$ と今一つの具体的に与えられる

$$v_0(z) := \frac{\log \frac{|z|}{\beta}}{\log \frac{a_n}{\beta}} + 2v(\infty)$$

の大小を較べる. V の境界 $\partial V = C(a_n) \cup E_0 \cup C(\beta)$ の上でこれら 2 函数の境界値を較べる. $C(a_n)$ 上では $v = 1 < 1 + 2v(\infty) = v_0$, つまり $v|C(a_n) < v_0|C(a_n)$ である. v の E_0 に於ける境界値は q.e. に $v = 0$ である. 他方 $z \in E_0$ なら $|z| < \beta$ で, 又 $a_n < a_0 < \beta/3 < \beta$ であるので, E_0 上 $\log(|z|/\beta)/\log(a_n/\beta) > 0$ が $|z|/\beta, a_n/\beta < 1$ より従い, 更に $2v(\infty) > 0$ より E_0 上 $v_0 > 0$ である. よって境界条件の意味で $v|E_0 = 0, v_0|E_0 > 0$ であるので, $v|E_0 < v_0|E_0$ である. $C(\beta)$ 上では (2.2.10) より $v \leq 2v(\infty)$ であり, $v_0(z) = 0 + 2v(\infty) = 2v(\infty)$ ($z \in C(\beta)$) なので $v|C(\beta) \leq v_0|C(\beta)$ である. 以上により

$$v|\partial V \leq v_0|\partial V$$

だから最大値原理により V 上 $v \leq v_0$ となる. $C(b) \subset V$ であるから, $z \in C(b)$, 即ち $|z| = b$ で見ると

$$v|C(b) \leq v_0|C(b) = \log(b/\beta)/\log(a_n/\beta) + 2v(\infty)$$

となる. $0 < b(E) < 1 < \beta(E) < \infty$ なので $\log \beta(E) > 0$ で, 更に $1 < \beta(E)/b(E) < \infty$ だから

$$(2.2.11) \quad B(E) := \log \frac{\beta(E)}{b(E)} \in (0, \infty)$$

と置くと, これは a_n ($n \geq N(E)$) に無関係な定数である. 前同様 $B = B(E)$ の略記も使う. 上記不等式より

$$v|C(b) \leq \frac{\log \frac{\beta}{b}}{\log \frac{\beta}{a_n}} + 2v(\infty) = \frac{B}{\log a_n^{-1} + \log \beta} + 2v(\infty) \leq \frac{B}{\log a_n^{-1}} + 2v(\infty)$$

となる. 肝心部分だけ抜き書き再記する:

$$(2.2.12) \quad v|C(b) \leq \frac{B}{\log a_n^{-1}} + 2v(\infty).$$

これで $v(\infty)$ の表示公式 (2.2.9) の被積分函数を評価すると

$$v(\infty) \leq \int_{C(b)} \left(\frac{B}{\log a_n^{-1}} + 2v(\infty) \right) d\mu(z) = \left(\frac{B}{\log a_n^{-1}} + 2v(\infty) \right) \mu(C(b))$$

となる. これより

$$(1 - 2\mu(C(b)))v(\infty) \leq \frac{\mu(C(b))B}{\log a_n^{-1}}$$

が出る. (2.2.7) により $\mu(C(b)) < 1/3 < 1/2$ だから, $1 - 2\mu(C(b)) > 0$ となって上記不等式の両辺を $1 - 2\mu(C(b))$ で除して

$$v(\infty) \leq \frac{\mu(C(b))}{1 - 2\mu(C(b))} \cdot \frac{B}{\log a_n^{-1}}$$

となる. 再び $\mu(C(b)) < 1/3$ を使って

$$\frac{\mu(C(b))}{1 - 2\mu(C(b))} \leq \frac{1/3}{1 - 2/3} = 1$$

なので, 所求の $v(\infty)$ の上からの評価式として, 次の最終的結果を得る:

$$(2.2.13) \quad v(\infty) \leq \frac{B}{\log a_n^{-1}} \quad (n \geq N(E)).$$

最後に領域 $W_n := \{a_n < |z|\} \setminus E = \{a_n < |z|\} \setminus \cup_{j=0}^{n-1} E_j$ ($n > N(E)$) の計測点 ∞ の調和測度を m_n と記してきたことを想起する. 領域 W_n 上の境界条件 $u_n|C(a_n) = 1, u_n|\cup_{j=0}^{n-1} E_j = 0$ の Dirichlet 解を u_n とすれば

$$(2.2.14) \quad m_n(C(a_n)) = u_n(\infty)$$

である. $u_n|\partial W_n \leq v|\partial W_n$ は直ちに見て取れる故最大値の原理により W_n 上 $u_n \leq v$ であるので, 特に $u_n(\infty) \leq v(\infty)$ となり, (2.2.13) と (2.2.14) と合わせて

$$m_n(C(a_n)) = u_n(\infty) \leq v(\infty) \leq \frac{B}{\log a_n^{-1}} \quad (n \geq N(E))$$

となる. こうして (2.2.4) が導き出された. \square

下方評価. 本小節 2 の冒頭部分で述べた下方評価不等式 (2.2.2) では下極限が正とだけ記していたところを, それよりは幾分詳しい下界を明示した下記形で証明する. 即ち, その陳述は, 環状集合 E が与えられているとき, 番号 $n \in \mathbb{N}$ を任意に固定した上で, $\{a_j\}_{j=0}^{n-1}$ と $\{E_j\}_{j=0}^{n-1}$ も同じく固定されているが, 残りの $\{a_j\}_{j=n}^{\infty}$, $\{E_j\}_{j=n}^{\infty}$ は自由に変動できるという状況で第 n 項 $m_n(C(a_n)) \cdot \log a_n^{-1}$ に於いて a_n が $(0, \rho a_{n-1})$ 内で $a_n \searrow 0$ の時この第 n 項がどのような挙動をするかに関するものである.

命題 2.2.15. 領域 $\{\sqrt{\rho\delta}a_{n-1} < |z|\} \setminus \cup_{j=0}^{n-1} E_j$ の境界成分 $C(\sqrt{\rho\delta}a_{n-1})$ の ∞ に対する調和測度 B_{n-1} は $a_n \in (0, \rho a_{n-1})$ に無関係な正定数である. これに関し次の不等式が成立する:

$$(2.2.16) \quad \liminf_{(0, \rho a_{n-1}) \ni a_n \searrow 0} m_n(C(a_n)) \cdot \log a_n^{-1} \geq B_{n-1} \log \sqrt{\frac{\delta}{\rho}}.$$

証明* : 領域 $W_n := \{a_n < |z|\} \setminus \cup_{j=0}^{n-1} E_j$ の ∞ に対する調和測度を m_n と記して居る. 境界条件 $u|_{C(a_n)} = 1$, $u|_{(\partial W_n \setminus C(a_n))} = 0$ に対する Dirichlet 問題の解を u とする. 領域 $\Omega := \{\sqrt{\rho\delta}a_{n-1} < |z|\} \setminus \cup_{j=0}^{n-1} E_j$ の ∞ に対する調和測度を ω とする. 先ず m_n の定義により

$$(2.2.17) \quad u(\infty) = \int_{C(a_n)} u(z) dm_n(z) = \int_{C(a_n)} dm_n(z) = m_n(C(a_n))$$

である. u は境界条件 $u|_{C(\sqrt{\rho\delta}a_{n-1})} = u$, $u|_{(\partial\Omega \setminus C(\sqrt{\rho\delta}a_{n-1}))} = 0$ である Dirichlet 問題 $(\Omega, \partial\Omega)$ の解だから ω の定義により

$$u(\infty) = \int_{C(\sqrt{\rho\delta}a_{n-1})} u(z) d\omega(z)$$

である. これと (2.2.17) から

$$(2.2.18) \quad m_n(C(a_n)) = \int_{C(\sqrt{\rho\delta}a_{n-1})} u(z) d\omega(z)$$

となる. 同心円環 $R := \{a_n < |z| < \delta a_{n-1}\}$ 上で 2 個の正值調和函数 $u(z)$ と

$$u_0(z) := (\log |z| - \log(\delta a_{n-1})) / (\log a_n - \log(\delta a_{n-1}))$$

の大小を比較する. $u|_{C(a_n)} = u_0|_{C(a_n)} = 1$ かつ $u|_{C(\delta a_{n-1})} \geq 0 = u_0|_{C(\delta a_{n-1})}$, つまり $u|_{\partial R} \geq u_0|_{\partial R}$ であるから最大値の原理により R 上 $u \geq u_0$ である. だから特に

$$u|_{C(\sqrt{\rho\delta}a_{n-1})} \geq u_0|_{C(\sqrt{\rho\delta}a_{n-1})} = (\log \sqrt{\delta/\rho}) / (\log a_n^{-1}) (1 + (\log(\delta a_{n-1})) / (\log a_n^{-1}))$$

である. (2.2.18) の被積分函数 $u|_{C(\sqrt{\rho\delta}a_{n-1})}$ をその下界である上式の最右辺で置き換えると

$$m_n(C(a_n)) \geq \frac{1}{\log a_n^{-1}} \cdot \frac{\log \sqrt{\delta/\rho}}{1 + (\log(\delta a_{n-1})) / (\log a_n^{-1})} \int_{C(\sqrt{\rho\delta}a_{n-1})} d\omega(z)$$

であり, 上記右辺の積分は $\omega(C(\sqrt{\rho\delta}a_{n-1})) = B_{n-1}$ であるから

$$m_n(C(a_n)) \cdot \log a_n^{-1} \geq \frac{B_{n-1} \log \sqrt{\delta/\rho}}{1 + (\log(\delta a_{n-1})) / (\log a_n^{-1})}$$

である. 両辺で $a_n \searrow 0$ とする下極限を取ると, $(\log(\delta a_{n-1})) / (\log a_n^{-1}) \searrow 0$ ($a_n \searrow 0$) であるから, 所求の (2.2.16) が得られる. \square

* [6], 補題 3.1 の証明 (p.349) に倣う.

3. 優調和優函数

Ω を $\hat{\mathbb{C}}$ の双曲的部分領域で無限遠点 ∞ を含むものとし, その ∞ に対する Ω の調和測度を ω とする. u を Ω の閉包 $\bar{\Omega}$ 上の $0 \leq u \leq \infty$ である広義実数値連続函数で, $u|_{\Omega}$ が Ω 上劣調和とする. この状況に於ける次の

$$\begin{aligned} \text{問題陳述: } & u|_{\partial\Omega} \text{ が } \partial\Omega \text{ 上 } \omega \text{ 可積, 即ち } \int_{\partial\Omega} u(z) d\omega(z) < +\infty \text{ ならば,} \\ & u|_{\Omega} \text{ は } \Omega \text{ 上優調和優函数 } s \text{ を持つ, 即ち } u|_{\Omega} \leq s \end{aligned}$$

に触発されて現在の研究を行った. この主張の真偽に単純に一般論的な結論を求められたとしたら, それは答える迄もないところであるが, Ω や u が更に具体化された対象になると, 判断は決して容易でない. その為には問題陳述をできる限り状況を単純具体化した所で論ずることが得策である. 後程の適用も考慮して, 環状集合 E をとり, Ψ を許容凸函数として

$$\Omega := \hat{\mathbb{C}} \setminus E, \quad u(z) := \Psi(\log^+ |1/z|) \quad (z \in \hat{\mathbb{C}})$$

で定める Ω と u は問題陳述の設定そのものである. この場合のこの Ω , u は対する問題陳述の真偽を考える為の $\Psi(\log^+ |1/z|)$ が $\hat{\mathbb{C}}/E$ 上優調和優函数を持つ, 即ち, $1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}}/E)$ となる条件を 3.1 節で与えよう:

$$\text{特殊判定条件.} \quad 1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) \text{ となる為の必要条件}$$

上述の $1/z$ は $\hat{\mathbb{C}}_0 := \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ 上の非定数正則函数で, $z = 0$ に最簡の非自明孤立特異点である 1 位極を持つものだが, $1/z$ を任意の $\hat{\mathbb{C}}_0$ 上の非定数正則函数 $f(z)$ に置き換えたときの

$$\text{一般判定条件.} \quad f \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) \text{ となる為の必要条件}$$

は特殊判定条件とほとんど同種同形式の単なる拡張である. 3.2 節でこの条件とその証明を与える. $\langle \hat{\mathbb{C}} \setminus E, \Psi(\log^+ |1/z|) \rangle$ は問題陳述の範疇内にあるが, f が $z = 0$ に真性特異点を持つと $\langle \hat{\mathbb{C}} \setminus E, \Psi(\log^+ |f|) \rangle$ はそうでない, 即ち, $\Psi(\log^+ |1/z|)$ は $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$ 上連続であるのに $\Psi(\log^+ |f|)$ は一般にそうでない. にもかかわらず, 両判定条件もその証明も本質的に同じである. 3.3 節と 3.4 節で, 特殊判定条件の条件を 2 面から精査する.

3.1. 特殊判定定理.

$\hat{\mathbb{C}}$ の部分領域 R 上の正則函数全体の作る正則函数環を $A(R)$ と記す. Ψ を許容凸函数とすると, 任意の $f \in A(R)$ に対し合成函数

$$(3.1.1) \quad \Psi(\log^+ |f|)$$

は R 上の非負有限連続劣調和函数である.

理由を述べる. $A(R)$ の元として $f = 0$ ならば, 即ち, R 上 $f \equiv 0$ ならば上記合成函数 (3.1.1) は 0 なので, 結論は自明である. だから $A(R)$ の元として $f \neq 0$ を仮定する. f の R 内の位数を無視した相異なる零点の全体を $Z(f)$ と記す. $R \setminus Z(f)$ 上 $\log f$ は多価正則函数なので $\log |f|$ は一価調和函数であるから, 任意の $z_0 \in R \setminus Z(f)$ に対し $\rho(z_0) = \text{dis}(z_0, Z(f) \cup \partial R)$ のとき, $0 < r < \rho(z_0)$ ならば

$$\log |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta$$

であるから

$$\log^+ |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta$$

が得られる. 両辺の Ψ をとり, Jensen の不等式を適用すれば

$$(3.1.2) \quad \Psi(\log^+ |f(z_0)|) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\log^+ |f(z_0 + re^{i\theta})|) d\theta \quad (0 < r < \rho(z_0))$$

となる. $z_0 \in Z(f)$ なら上式は $0 < r < \text{dis}(z_0, \partial R)$ で自明に成立する. 即ち函数 (3.1.1) は R 上劣平均不等式 (3.1.2) を満たすので, これは確かに R 上劣調和函数である. \square

$\hat{\mathbb{C}}$ の自明でない最簡の部分領域は複素平面 \mathbb{C} でこれは 0 中心半径 $+\infty$ の開円板 $B(0, +\infty)$ である. 自己等角写像 $\varphi: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ を $\varphi(z) = 1/z$ で定めるならば

$$\hat{\mathbb{C}}_0 := \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} = \varphi(\mathbb{C})$$

であるから, $\hat{\mathbb{C}}_0$ も今一つの同種の最簡の $\hat{\mathbb{C}}$ の部分領域例であり

$$A(\hat{\mathbb{C}}_0) = A(\mathbb{C}) \circ \varphi$$

で, $A(\mathbb{C})$ は全整函数環で z は $A(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{C}$ 中の最簡函数であろう. その意味でも $1/z$ は $A(\hat{\mathbb{C}}_0) \setminus \mathbb{C}$ 内の最簡函数ということになる. 我々は非負広義連続で $\hat{\mathbb{C}}_0$ 上有限連続劣調和函数

$$(3.1.3) \quad \Psi(\log^+ |1/z|)$$

に注目する.

$E := (\cup_{n=0}^{\infty} E_n) \cup \{0\}$ を中心 0 の環状集合とし, 領域 $W := \hat{\mathbb{C}} \setminus E$ と考える. W は, E の各成分 E_n , 従って E の対数容量が正なので, $\hat{\mathbb{C}}$ の双曲的領域であり, $\overline{W} = \hat{\mathbb{C}}$ 上 $w(z) := \Psi(\log^+ |1/z|)$ は非負広義連続 ($\hat{\mathbb{C}}_0$ 上は有限連続) であって $w|_W$ は劣調和である. W の ∞ に対する調和測度を m , W の 0 方向への近似 $W_n := \{a_n < |z|\} \setminus E$ の ∞ に対する調和測度を m_n と記している. W_n の相対境界成分 $C(a_n) := \{|z| = a_n\}$ の測度 $m_n(C(a_n))$ が関心主対象である.

若し本節頭の問題陳述が真ならば, 万一

$$\int_E \Psi(\log^+ |z^{-1}|) dm(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} \Psi(\log^+ |z^{-1}|) dm(z) < +\infty$$

となっているとすると, (3.1.3) の $w(z) = \Psi(\log^+ |z^{-1}|)$ は W 上優調和優函数を持つ, 即ち $1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ となることになる. このような状況に引き込まれた以上, 我々にとって, $1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ となる判定条件を求めることが関心事最右翼に置かれることになるが, しかし実のところ難しいことは何もなく, 素直に考えたら自然に次の定理に導かれる:

定理 3.1.4. (特殊判定定理) $1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ となる為の必要十分条件は, 次の 2 条件が同時に成り立つことである:

$$(\Psi.1) \quad \int_E \Psi(\log |z^{-1}|) dm(z) < +\infty;$$

$$(\Psi.2) \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \Psi(\log a_n^{-1}) m_n(C(a_n)) < +\infty.$$

3.2. 一般判定定理.

特殊判定定理 (定理 3.1.4) では $1/z \in A(\hat{\mathbb{C}}_0)$ が $1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ となる為の必要十分条件を与えたが, $1/z \in A(\hat{\mathbb{C}}_0)$ を一般の $f \in A(\hat{\mathbb{C}}_0)$ に置き換えて, $f \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ となる為の必要十分条件を与えたものと, 形式も本質も全く同一である. これを, 特殊な $1/z$ を一般の f に置き換えたものだから下記の如く一般判定定理 (定理 3.2.1) と銘打つ. 勿論この一般判定定理は特殊判定定理の一般化なので, これの証明を与えたら, 特殊判定定理の証明も終了である. これが本節の内容である.

定理 3.2.1. (一般判定定理) f を $\hat{\mathbb{C}}_0 := \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ 上の正則函数とする. そのとき $f \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ となる為の必要十分条件は, 次の 2 条件が同時に成り立つことである:

$$(3.2.2) \quad \int_E \Psi(\log^+ |f(z)|) dm(z) < +\infty;$$

$$(3.2.3) \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{C(a_n)} \Psi(\log^+ |f(z)|) dm_n(z) < +\infty.$$

注意: (3.2.2) で $f(z)$ を $1/z$ で置き換えたなら諸に ($\Psi.1$) となり, また $a_n \leq 1$ ($n \in \mathbb{N}$) により

$$\int_{C(a_n)} \Psi(\log^+ |1/z|) dm_n(z) = \int_{C(a_n)} \Psi(\log a_n^{-1}) dm_n(z) = \Psi(\log a_n^{-1}) m_n(C(a_n))$$

だから (3.2.3) で $f(z)$ を $1/z$ で置き換えたらこれもまた諸に $(\Psi.2)$ となるから, 上記一般判定定理は前小節の特殊判定定理の拡張 (一般化) となっている. 故に定理 3.1.4 の証明は与えなくても, 上記定理 3.2.1 の証明を与えることで, 落ちは全然生じない.

定理 3.2.1 の証明. $W = \hat{\mathbb{C}} \setminus E$ と置くと, W は $\hat{\mathbb{C}}$ の部分領域と見ても又 $\hat{\mathbb{C}}_0 := \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ の部分領域と見做しても, 双曲的である. W に対して各番号 $n = 1, 2, \dots$ 毎に

$$W_n := \{a_n < |z|\} \setminus E = \{a_n < |z|\} \setminus \bigcup_{j=0}^{n-1} E_j$$

と置けば, $E \setminus \{0\} = \bigcup_{j=0}^{\infty} E_j$ を W の $\hat{\mathbb{C}}_0$ に関する相対境界, $\{0\}$ を W の $\hat{\mathbb{C}}_0$ に関する理想境界と解するとき $(W_n)_{n=1}^{\infty}$ は W の 0 方向に拡がる近似 (exhaustion) と考えられる. $\infty \in W_n \subset W$ ($n \in \mathbb{N}$) なので, ∞ は W のみならずすべての W_n ($n = 1, 2, \dots$) の内点である. 記号の簡略化の為

$$b(z) := \Psi(\log^+ |f(z)|) \quad (z \in \hat{\mathbb{C}}_0)$$

と記すならば, b は $\hat{\mathbb{C}}_0$ 上 $0 \leq b < +\infty$ である実数値連続関数で, 更に劣調和関数である. $\hat{\mathbb{C}}$ で見れば, 一般には 0 に於いて, 実数値性も連続性も, ましてや劣調和性も壊れる. W_n 上の境界条件 $b|_{\partial W_n}$ の Dirichlet 解 $H_b^{W_n}$ は $b|_{\partial W_n}$ が有界連続故可解であることにより存在するが, ∂W_n の境界成分の 1 つである $C(a_n)$ が正則なので $H_b^{W_n}$ は $C(a_n)$ で連続境界値 b を持つ. それ故各 $n = 1, 2, \dots$ に対し

$$H_b^{W_n}(z) = b(z) \quad (z \in W \setminus W_n)$$

と規定すれば, $H_b^{W_n}$ は W 上連続劣調和となり, 最大値原理により, W 上

$$(3.2.4) \quad 0 \leq b \leq H_b^{W_n} \leq H_b^{W_{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

となる. m_n は ∞ に対する W_n の調和測度を定めていたのだから

$$H_b^{W_n}(\infty) = \int_{\partial W_n} b(z) dm_n(z) = \int_{\bigcup_{j=0}^{n-1} E_j} b(z) dm_n(z) + \int_{C(a_n)} b(z) dm_n(z)$$

である. 即ち

$$(3.2.5) \quad H_b^{W_n}(\infty) = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{E_j} b(z) dm_n(z) + \int_{C(a_n)} b(z) dm_n(z) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

となる. ここ迄は無条件にすべての $f \in A(\hat{\mathbb{C}}_0)$ に対して成立する.

最初 $f \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) = H^\Psi(W)$ を仮定する, 即ち, $b = \Psi(\log^+ |f|)$ は W 上調和優関数 s を持つ: W 上 $b \leq s$ と仮定するのである. 特に各 $n = 1, 2, \dots$ に対し, W_n 上 $b \leq s$ であり, 従って, $s \in \overline{\mathcal{S}}_b^{W_n}$ だから

$$H_b^{W_n}(\infty) \leq s(\infty) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

となる. (3.2.5) の右辺の各項は非負だから, 上記不等式より

$$(3.2.6) \quad \begin{cases} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{E_j} b(z) dm_n(z) \leq s(\infty) \\ \int_{C(a_n)} b(z) dm_n(z) \leq s(\infty) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

任意の $k \in \mathbb{N}$ を固定する. $k \leq n$ である任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\sum_{j=0}^{n-1} \int_{E_j} b(z) dm_n(z)$ の各項は非負だからこれは $\sum_{j=0}^{k-1} \int_{E_j} b(z) dm_n(z)$ の上界となる故, (3.2.6) の第 1 の不等式より

$$\sum_{j=0}^{k-1} \int_{E_j} b(z) dm_n(z) \leq s(\infty) \quad (k \leq n \in \mathbb{N})$$

が出る. 命題 2.1.1 により, 任意の $0 \leq j \leq k-1$ に対する E_j 上漠収束の意味で

$$\lim_{j < n \nearrow \infty} m_n = m \quad \left(\text{特に, } \lim_{n \nearrow \infty} \int_{E_j} b(z) dm_n(z) = \int_{E_j} b(z) dm(z) \quad (j = 0, \dots, k-1) \right)$$

だから, 上記不等式により

$$\sum_{j=0}^{k-1} \int_{E_j} b(z) dm(z) = \lim_{n \nearrow \infty} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \int_{E_j} b(z) dm_n(z) \right) \leq s(\infty)$$

となる. $k \in \mathbb{N}$ は任意に固定しているのだから上式より

$$\int_E b(z) dm(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{E_j} b(z) dm(z) = \lim_{k \nearrow \infty} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \int_{E_j} b(z) dm(z) \right) \leq s(\infty)$$

となり, (3.2.2) が出る. (3.2.3) は (3.2.6) の第 2 式から直ちに従う. 以上により条件対 (3.2.2) & (3.2.3) は $f \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ となる為の必要条件であることが示された.

逆に (3.2.2) & (3.2.3) を仮定して $f \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) = H^\Psi(W)$ を示したい. 定数 $0 < K < +\infty$ を有限性が要求されている (3.2.2) の量と (3.2.3) の量の各量の共通の上界とすると, (3.2.5) と命題 2.1.1 により

$$\begin{aligned} H_b^{W_n}(\infty) &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{E_j} b(z) dm_n(z) + \int_{C(a_n)} b(z) dm_n(z) \leq \sum_{j=0}^{n-1} \int_{E_j} b(z) dm(z) + \int_{C(a_n)} b(z) dm_n(z) \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \int_{E_j} b(z) dm(z) + \int_{C(a_n)} b(z) dm_n(z) \leq \int_E b(z) dm(z) + \int_{C(a_n)} b(z) dm_n(z) \leq K + K = 2K \end{aligned}$$

となる. (3.2.4) によれば $(H_b^{W_n})_{n=0}^{\infty}$ は W 上の単調非減少関数列で $H_b^{W_n}(\infty) \leq 2K$ ($n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$) だから, Harnack 原理により W 上 $s := \lim_{n \nearrow \infty} H_b^{W_n}$ と置けば, s は W 上

$$\Psi(\log^+ |f|) = b \leq s$$

となり $f \in H^\Psi(W) = H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ となる. だから (3.2.2) & (3.2.3) は $f \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ となる為の十分条件でもあることが示された. \square

こうして一般判定定理がその証明共々完全に確立された. 従って勿論その一部である特殊判定定理:

$$(\Psi.1) \text{ \& } (\Psi.2) \iff 1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$$

の成立が保証された. この立場より本節頭の問題陳述を考察する. その為 Ω と u を $\Omega = \hat{\mathbb{C}} \setminus E$, $u = \Psi(\log^+ |1/z|)$ に特化して問題陳述を見る. すると $\int_{\Omega} u(z) d\omega(z)$ は $\int_E \Psi(\log^+ |1/z|) dm(z)$ だから $u \in L^1(\partial\Omega, d\omega)$ は $(\Psi.1)$ であり, $u = \Psi(\log^+ |1/z|)$ が優調和優函数を持つことは $1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ となり, 問題陳述の内容は

$$(\Psi.1) \Rightarrow 1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$$

と表現できる. 特殊判定定理によれば, 上の逆は確かに真だから, 最終的には, 問題陳述は,

$$\text{改訂版問題陳述:} \quad (\Psi.1) \iff 1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$$

として再登場する. 元々の問題陳述の真偽はと問われたら, 一般には偽りであると言う答は数学専攻学部後半コースで提供される函数論又はポテンシャル論の講義の中での Dirichlet 問題の項で大抵, 反例を示しながら教わる所である. しかし改訂版のそれとなると事態は一転難しくなる. 特殊判定定理と較べると, 改訂版では $(\Psi.2)$ を欠くのだから形式的に見て $(\Psi.1)$ のみでは駄目かと思うのは当然かもしれぬ. 大体その通りであるが, 後述するところであるが, 実は例えば Ψ が非強凸 (即ち強凸でない) なら, $(\Psi.2)$ は自動的に満たされ, 従ってその場合には改訂版問題陳述は真となる. Ψ が強凸なら $(\Psi.2)$ の成否は状況次第で, 真となるか否かも状況次第となる.

なので、以下では、(Ψ.1) を成立の方向に立って検討する 1 小節と、同じく (Ψ.2) について、これの成立と非成立の両面から検討する 1 小節の、計 2 小節を用意する。

3.3. 条件 (Ψ.1) の検討.

環状集合 E の補集合領域 $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$ と許容凸函数 Ψ が与えられているとき、条件

$$(\Psi.1) : \int_E \Psi(\log^+ |1/z|) dm(z) < +\infty$$

が満たされるように環状集合 E に手を加えたとしたら、大雑把に言って 2 つの方向からの取り組み方が考えられる:一つは E そのものに直接働きかける直接操作と、今一つは E そのものではなく、その外枠構造に手を付ける間接操作である。これら二つのいずれに従うにしろ、(Ψ.1) を導く過程に於いて特段の抵抗要素も出現せぬ一本道作業であるという意味で、(Ψ.1) は成り立ち易い、または成り立たせ易い性質であると言える。

まず直接操作の考察から始める。 E の成分列を $(E_n)_{n=0}^\infty$ とするとき、 $E_n \subset \{\delta a_n \leq |z| \leq a_n\}$ ($n = 0, 1, \dots$) だから

$$\int_E \Psi(\log^+ |1/z|) dm(z) = \sum_{n=0}^\infty \int_{E_n} \Psi(-\log |z|) dm(z) \leq \sum_{n=0}^\infty \Psi(-\log(\delta a_n)) m(E_n)$$

である。従って、例えば、数列 $(m(E_n))_{n \in \mathbb{N}}$ が

$$(3.3.1) \quad 0 < m(E_n) \leq 2^{-n} \Psi(-\log(\delta a_n))^{-1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

を満たせば (Ψ.1) が満たされる。各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $m(E_n)$ をより小さくしたいなら E_n をそのより小さい部分集合に取り換えたら良いのではないかと一瞬思ふかもしれないが、事はそれ程単純ではない。 m は $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$ の調和測度だから E_n を取り換えたら E も取り換えられ、 m も E に依存して変化するのだからである。百歩譲り、 $m(E_n)$ は小さく出来たとしても、小さくなり過ぎて $m(E_n) = 0$ となっては困る。 E_n の部分集合と言っても、それは非極でないといけぬ。と言うわけで E_n のその部分集合による置き換えで (3.3.1) を達成させるには、若干の工夫がいる。その道具が調和容量と呼ぶ集合函数 $K \rightarrow c(K)$ で、その説明を下に挿入せねばならぬ。

正定数 $0 < a < +\infty$ に対し、原点 $z = 0$ 中心で半径 a の開円板 (又は閉円板) を $B(a)$ (又は $\bar{B}(a)$) と記す。 $F \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{B}(a)$ を $\hat{\mathbb{C}} \setminus F$ が連結で無限遠点 ∞ を含むような非極な完閉集合とする。そのとき $\bar{B}(a)$ 内を色々に変化する完閉集合 $K \subset \bar{B}(a)$ に対する集合函数 $K \rightarrow c(K)$ を以下のように定義する。開集合 $(\hat{\mathbb{C}} \setminus F) \setminus K$ の相対境界 $\partial((\hat{\mathbb{C}} \setminus F) \setminus K) = \partial F \cup \partial K$ 上の連続函数 $\chi = \chi_K$ を $\chi|_{\partial F} = 0$ かつ $\chi|_{\partial K} = 1$ で定める。開集合 $(\hat{\mathbb{C}} \setminus F) \setminus K$ 上の境界値 χ である Dirichlet 問題の Parreau-Wiener-Brelot の意味の解を $H_{\chi_K}^{(\hat{\mathbb{C}} \setminus F) \setminus K}$ と記す ([3] 参照)。そのとき量

$$(3.3.2) \quad c(K) = H_{\chi_K}^{(\hat{\mathbb{C}} \setminus F) \setminus K}(\infty)$$

を完閉集合 $K \subset \bar{B}(a)$ の $\{a, F\}$ に関する調和容量又は単に容量と呼ぶ。 K としては空集合 \emptyset も含まれるが $\chi_\emptyset \equiv 0$ と解して $c(\emptyset) = 0$ と定められる。すると

$$(3.3.3) \quad 0 \leq c(K) < 1, \quad c(\emptyset) = 0$$

である。自明な $c(\emptyset) = 0$ 以外に何時 $c(K) = 0$ となるかを述べる。 $L \subset \hat{\mathbb{C}}$ を完閉集合 (即ち、有界閉集合) とすると開集合 $\hat{\mathbb{C}} \setminus L$ は高々可算個の成分からなるが、 $\infty \in \hat{\mathbb{C}} \setminus L$ 故 ∞ を含む唯一の成分がある。それを $(\hat{\mathbb{C}} \setminus L)_\infty$ と記すとき

$$\hat{L} := \hat{\mathbb{C}} \setminus (\hat{\mathbb{C}} \setminus L)_\infty$$

と記す。 \hat{L} は L を含むその $\hat{\mathbb{C}}$ に対する補集合が連結な完閉集合の内最小なものである。 F, K を (3.3.2) に於けるものとするとき、 $(\hat{\mathbb{C}} \setminus F) \setminus K = (\hat{\mathbb{C}} \setminus K) \setminus F$ の ∞ を含む成分は、 $(\hat{\mathbb{C}} \setminus K)_\infty \setminus F = (\hat{\mathbb{C}} \setminus F) \setminus \hat{K}$ であるから

$$H_{\chi_K}^{(\hat{\mathbb{C}} \setminus F) \setminus K}(\infty) = H_{\chi_{\hat{K}}}^{(\hat{\mathbb{C}} \setminus F) \setminus \hat{K}}(\infty) = H_{\chi_{\hat{K}}}^{(\hat{\mathbb{C}} \setminus \hat{K}) \setminus F}(\infty)$$

であり従って

$$(3.3.4) \quad c(K) = c(\hat{K})$$

である. これを準備として次を示す:

零容量定理: $K \subset \overline{B}(a)$ を完閉集合とするとき, 調和容量 $c(K) = 0$ となる為の必要十分条件は K の対数容量 $\text{cap}(K) = 0$ となることである.

証明. 最初 $c(K) = 0$ なら $\text{cap}(K) = 0$ を示す. (3.3.4) により $c(\hat{K}) = 0$ となる. だから $c(\hat{K})$ の定義 (3.3.2) により $H_{\chi_{\hat{K}}}^{(\hat{\mathbb{C}} \setminus \hat{K}) \setminus F}(\infty) = 0$ である. 従って $(\hat{\mathbb{C}} \setminus \hat{K}) \setminus F$ 上

$$(3.3.5) \quad H_{\chi_{\hat{K}}}^{(\hat{\mathbb{C}} \setminus \hat{K}) \setminus F} \equiv 0$$

となる. §2.1 にあった注意によれば, $(\hat{\mathbb{C}} \setminus \hat{K}) \setminus F$ 上ある正値優調和函数 s で, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し

$$H_{\chi_{\hat{K}}}^{(\hat{\mathbb{C}} \setminus \hat{K}) \setminus F} + \varepsilon s \in \overline{\mathcal{S}}_{\chi_{\hat{K}}}^{(\hat{\mathbb{C}} \setminus \hat{K}) \setminus F}$$

となるものが存在する. これと (3.3.5) から

$$(3.3.6) \quad \varepsilon s \in \overline{\mathcal{S}}_{\chi_{\hat{K}}}^{(\hat{\mathbb{C}} \setminus \hat{K}) \setminus F} \quad (\varepsilon > 0)$$

となる. $(\hat{\mathbb{C}} \setminus \hat{K}) \setminus F$ を Riemann 面 $\hat{\mathbb{C}} \setminus \hat{K}$ の部分領域で, $\partial \hat{K}$ をその理想境界で ∂F をその相対境界と見る. (3.3.6) によると, 各 $\zeta \in \partial \hat{K}$ に対し

$$\liminf_{z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \hat{K}, z \rightarrow \zeta} \varepsilon s(z) \geq \chi_{\hat{K}}(\zeta) = 1, \quad \text{即ち,} \quad \liminf_{\hat{\mathbb{C}} \setminus \hat{K} \ni z \rightarrow \zeta} s(z) \geq 1/\varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$$

であるから, 各 $\zeta \in \partial \hat{K}$ と各 $\zeta' \in \partial F$ に対し

$$\lim_{\hat{\mathbb{C}} \setminus \hat{K} \ni z \rightarrow \zeta} s(z) = +\infty, \quad \text{“} \quad \liminf_{(\hat{\mathbb{C}} \setminus \hat{K}) \setminus F \ni z \rightarrow \zeta'} s(z) \geq 0 \quad (\zeta' \in \partial F)\text{”}$$

となる. このような s を持つとき, $\hat{\mathbb{C}} \setminus \hat{K} \in \mathcal{O}_G$ (即ち, $\hat{\mathbb{C}} \setminus \hat{K}$ は放物型) であるから, \hat{K} を $\hat{K} = \hat{\mathbb{C}} \setminus (\hat{\mathbb{C}} \setminus \hat{K})$ とみると, これは $\text{cap}(\hat{K}) = 0$ を意味する (例えば [15] 参照). $K \subset \hat{K}$ より $\text{cap}(K) = 0$ が結論できる.

逆に $\text{cap}(K) = 0$ を仮定して $c(K) = 0$ を導きたい. $\text{cap}(K) = 0$ より K は完全非連結な完閉集合で, $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$ は連結, 従って Riemann 面である. $\text{cap}(K) = 0$ により, $(\hat{\mathbb{C}} \setminus K) \setminus F$ 上の Evans 函数 u が存在する. 即ち, u は $(\hat{\mathbb{C}} \setminus K) \setminus F$ 上の正値調和函数で, 各 $\zeta \in \partial K$ と各 $\zeta' \in \partial F$ に対し

$$\lim_{\hat{\mathbb{C}} \setminus K \ni z \rightarrow \zeta} u(z) = +\infty, \quad \text{“} \quad \liminf_{(\hat{\mathbb{C}} \setminus K) \setminus F \ni z \rightarrow \zeta'} u(z) \geq 0\text{”}$$

となる. これはすべての $\varepsilon > 0$ に対し $\varepsilon u \in \overline{\mathcal{S}}_{\chi_K}^{(\hat{\mathbb{C}} \setminus K) \setminus F}$ を意味するので

$$c(K) = H_{\chi_K}^{(\hat{\mathbb{C}} \setminus K) \setminus F}(\infty) \leq \varepsilon u(\infty) \quad (\varepsilon > 0)$$

となり, $\varepsilon \searrow 0$ として $c(K) = 0$ が導出される. □

ここで調和容量 $c(K)$ の初等的性質と呼ぶ所の 3 アイテムからなる性質を述べる. これらは一般の容量概念を支える本質的性質を形作る. それらは

- (a) 単調性: $\overline{B}(a)$ 内の 2 つの完閉集合 K_1, K_2 に対して $c(K_1) \leq c(K_2)$ ($K_1 \subset K_2$);
- (b) 劣加法性: $\overline{B}(a)$ 内の 2 つの完閉集合 K_1, K_2 に対して $c(K_1 \cup K_2) \leq c(K_1) + c(K_2)$;
- (c) 連続単調性: $\overline{B}(a)$ 内の単調減少完閉集合列 $K_1 \supset \cdots \supset K_n \supset K_{n+1} \supset \cdots$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} c(K_n) = c\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n\right)$.

これら 3 性質のいずれも $c(K)$ の定義 (3.3.2) に従って若干の論証により然程の困難なしに導き出せる (詳細は [13], また [7] も参照). 初等 3 性質 (a),(b),(c) を用いたら, 次の時折り便利に利用される事実が示される (再び上記 [13] に詳しい証明がある):

中間値の定理. K を $\overline{B}(a)$ 内の $c(K) > 0$ である完閉集合とする. そのとき, $0 \leq \alpha \leq c(K)$ である任意の実数 α に対し, $K_\alpha \subset K$ となる完閉集合 K_α で $c(K_\alpha) = \alpha$ となるものが存在する. 換言すれば

$$\{c(L) : \text{すべての完閉集合 } L \subset K\} = [0, c(K)].$$

再び環状集合 E と許容凸関数 Ψ の組が与えられている状況に戻る. E の外枠定数 $0 < \rho < \delta < 1$ と外枠数列 $(a_n)_{n=0}^\infty$ は固定する. E の成分集合列 $(E_n)_{n=0}^\infty$ に於いて, E_0 は固定するが, $(E_n)_{n=1}^\infty$ は可変とする. $\hat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{n=0}^\infty E_n$ の調和測度は m と記した. $c(K)$ は $\{a_1, E_0\}$ に関する完閉集合 $K \subset \bar{B}(a_1)$ の調和容量とする. すると

$$(3.3.7) \quad m(E_k) \leq c(E_k) \quad (k \in \mathbb{N})$$

となる. E_0 は固定されていることを再度強調する. 上式はすべての $k = 1, 2, \dots$ で成立するということである. $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を $(E'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に取り換えたなら $\hat{\mathbb{C}} \setminus (E_0 \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n))$ の調和測度 m は $\hat{\mathbb{C}} \setminus (E_0 \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E'_n))$ の調和測度 m' に換わるけれど, (3.3.7) の言うところはやはり

$$m'(E'_k) \leq c(E'_k) \quad (k \in \mathbb{N})$$

であるという事である. c は E_0 さえ不変ならばずっと不変のままであることを再々度述べる.

(3.3.7) の証明. $k \in \mathbb{N}$ とし

$$W := \hat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{n=0}^\infty E_n, \quad R_k := \hat{\mathbb{C}} \setminus (E_0 \cup E_k)$$

と置く. ∂W 上の有界連続関数 χ_k を $\chi_k|_{E_n} = \delta_{kn}$ ($n = 0, 1, \dots$) とし ∂R_k 上の有界連続関数 χ を $\chi|_{E_j} = \delta_{0j}$ ($j = 0, k$) とする. m と c 夫々の定義により

$$(3.3.8) \quad m(E_k) = H_{\chi_k}^W(\infty), \quad c(E_k) = H_{\chi}^{R_k}(\infty)$$

となる. ∂W 上の有界連続関数 χ' を, $\chi'|_{E_0 \cup E_k} = \chi|_{E_0 \cup E_k}$ かつ $\chi'|\partial W \setminus (E_0 \cup E_k) = H_{\chi}^{R_k}|\partial W \setminus (E_0 \cup E_k)$ とする. R_k 上 $H_{\chi}^{R_k} > 0$ だから, $\partial W \setminus (E_0 \cup E_k)$ 上 $\chi_k \leq \chi'$, $E_0 \cup E_k$ 上 $\chi_k = \chi'$ より ∂W 上 $\chi_k \leq \chi'$ 故 W 上 $H_{\chi_k}^W \leq H_{\chi'}^W = H_{\chi}^{R_k}$ となり $H_{\chi_k}^W(\infty) \leq H_{\chi}^{R_k}(\infty)$ となる. よって (3.3.8) を使って $m(E_k) \leq c(E)$, 即ち, (3.3.7) が導き出された. \square

条件 (Ψ.1) 達成の為の直接操作: 環状集合 $E = \{0\} \cup (\bigcup_{n=0}^\infty E_n)$ に対して許容凸関数 Ψ による条件 (Ψ.1) が満たされるように E を改変する方法として, 各成分 E_n ($n \in \mathbb{N}$) をその適当な部分集合で置き換える方法を直接操作と呼ぶ. 具体的には, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, E_n は元々非極なので $0 < c(E_n) < 1$ である (零容量定理). そこで $\alpha_n := \min\{2^{-n}\Psi(-\log(\delta a_n))^{-1}, c(E_n)\}$ と置くととき, $\alpha_n \in (0, c(E_n)]$ なので, E_n の完閉部分集合 E'_n で $c(E'_n) = \alpha_n$ となるものがとれる (中間値定理). $0 < \alpha_n \leq 2^{-n}\Psi(-\log(\delta a_n))^{-1}$ なので

$$0 < c(E'_n) \leq 2^{-n}\Psi(-\log(\delta a_n))^{-1}$$

である. $\hat{\mathbb{C}} \setminus (\{0\} \cup (\bigcup_{n=0}^\infty E'_n))$ の調和測度を m' とすると (3.3.7) より

$$0 < m'(E'_n) \leq 2^{-n}\Psi(-\log(\delta a_n))^{-1}$$

となる. 改めて E'_n を E_n , m' を m と記せば, (3.3.1) の成立をみることになり, 条件 (Ψ.1) が満たされる.

以上で直接操作の考察は終了で, 次に以下では間接操作の考察へ進む. 直接操作では環状集合 E の成分 E_0 を除く成分列 $(E_n)_{n=1}^\infty$ へ働きかけて (Ψ.1) の成立を達成したが間接操作では E の成分列でなく, E の外枠構造, 特にその大外枠数列 $(b_n)_{n=0}^\infty$ の選択で (Ψ.1) の成立の達成を図る.

まず2個の許容凸関数 Φ と Ψ をとり, その対が [4] で導入された次の条件を満たすとする: 任意に固定する正定数 $s > 0$ に対し

$$(3.3.9) \quad \frac{\Psi(t)}{\Phi(t-s)} = o(1) \quad (t \nearrow +\infty).$$

この条件を満たすような Φ と Ψ の対を $\langle \Phi, \Psi \rangle$ と記し, 許容凸関数の特異対と呼ぶことにする. 先ず次のことを注意する:

特異対 $\langle \Phi, \Psi \rangle$ では Φ は必ず強凸である

証明. 条件 (3.3.9) は $s = 0$ でも成立するから $\Psi(t)/\Phi(t) = o(1)$ ($t \nearrow +\infty$) である. よって $(\Psi(t)/t)/(\Phi(t)/t) = o(1)$ ($t \nearrow +\infty$) である. 主張に反し, もし Φ が非強凸ならば $0 < d(\Phi) < +\infty$ であるから $d(\Psi)/d(\Phi) = 0$ となり $d(\Psi) = 0$ と

なるが、これはどんな許容凸函数に対しても $0 < d(\Psi) \leq \infty$ であるべきことに反する。よって $d(\Phi) = +\infty$ 、即ち、 Φ は強凸である。□

だから $\langle \Phi, \Psi \rangle$ に於いて上に見た通り Φ は常に強凸であるが、 Ψ は強凸でも非強凸のいずれであっても構わないし、いずれの場合も実現する。特に非強凸、即ち、 $0 < d(\Psi) < +\infty$ の場合を考える。

$d(\Phi) = +\infty$ かつ $d(\Psi) < +\infty$ ならば、 Φ と Ψ は特異対 $\langle \Phi, \Psi \rangle$ を成す

証明. 任意の実数 $s \geq 0$ をとり、 $t > 0$ に対し

$$\frac{\Psi(t)}{\Phi(t-s)} = \frac{\Psi(t)/t}{\Phi(t-s)/(t-s)} \cdot \frac{t}{t-s} \rightarrow \frac{d(\Psi)}{d(\Phi)} \cdot 1 = 0 \quad (t \nearrow +\infty),$$

即ち、(3.3.9) が満たされるので、 Φ と Ψ は確かに特異対 $\langle \Phi, \Psi \rangle$ を成す。□

さて、環状集合 E は外側構造と成分列 $(E_n)_{n=0}^\infty$ から成り、外側構造は大外側数列 $(b_n)_{n=0}^\infty$ と外枠定数 $0 < \rho < \delta < 1$ 及び外枠数列 $(a_n)_{n=0}^\infty$ から成る。 $(b_n)_{n=0}^\infty$ は $b_0 = 1$ である以外は全く任意の正数列で、外枠数列 $(a_n)_{n=0}^\infty$ を $a_n \leq b_n$ ($n = 0, 1, \dots$) の形で規制するのみであるから、一般の場合ではあってもなくても良い非本質的なものである。なのに、この大外側数列 $(b_n)_{n=0}^\infty$ に条件 $(\Psi.1)$ 成立の役割を与えたのが、これもまた [4] の注目すべき叡智である。これが間接操作と名付けたところの胆である。

$\langle \Phi, \Psi \rangle$ を許容凸函数の特異対とする。上記の環状集合 E に於ける大外側数列 $(b_n)_{n=0}^\infty$ が、特に、次の 3 条件を満たすとき、任意の正数 $0 < \delta < 1$ に対する $\langle \Phi, \Psi \rangle$ 大外側数列と言う：第 1 に、当然ながら、 $(b_n)_{n=0}^\infty$ は大外側数列として、正数列で $b_0 = 1$ ；第 2 に、 $b_n < 1/n$ ($n = 1, 2, \dots$)；そして第 3 に、各 $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$(3.3.10) \quad 0 < \Psi\left(\log \frac{t}{\delta}\right) \leq \frac{1}{2^n} \Phi\left(\log \frac{t}{n}\right) \quad \left(\frac{1}{b_n} < t\right)$$

となる。定義するだけなら何でも定義できるが大事なことはそれが実在することで、つまり次の $\langle \Phi, \Psi \rangle$ 大外側数列存在定理が成り立つことである：

任意の正数 $0 < \delta < 1$ と任意の許容凸函数の特異対 $\langle \Phi, \Psi \rangle$ に対し、常に 1 つは $\langle \Phi, \Psi \rangle$ 大外側数列 $(b_n)_{n=0}^\infty$ が存在する。

証明. 先ず $b_0 = 1$ とする。任意の $n \in \mathbb{N}$ をとり暫時固定し

$$\sigma_n := \log \frac{n}{\delta} > 0$$

と置く。この σ_n を (3.3.9) に於ける任意定数としての s にとり、(3.3.9) を書き直すと

$$\Psi(\tau)/\Phi(\tau - \sigma_n) = o(1) \quad (\tau \nearrow +\infty)$$

だから、或る正数 $\tau_n > 0$ が定まって

$$(3.3.11) \quad 0 < \Psi(\tau)/\Phi(\tau - \sigma_n) \leq 1/2^n \quad (\tau \geq \tau_n)$$

となる。無論ここでは Φ や Ψ の許容凸性も使われている。こうして任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(3.3.12) \quad b_n := \frac{1}{ne^{\tau_n}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

と置く。 $b_0 = 1$ は勿論 $0 < b_n < 1/n$ ($n \in \mathbb{N}$) も明らかで、 $(b_n)_{n=0}^\infty$ の満たすべき第 1 及び第 2 の条件は実現されている。最後の第 3 条件については、(3.3.10) の成立をみることである。(3.3.11) に於いて

$$\tau = \log t - \log \delta$$

と置くならば $\sigma_n = \log n - \log \delta$ より $\tau - \sigma_n = \log t - \log n$ だから

$$0 < \Psi(\log t - \log \delta) \leq \frac{1}{2^n} \Phi(\log t - \log n) \quad (\log t - \log \delta \geq \tau_n)$$

が出る. b_n の定義式 (3.3.12) より $\tau_n = -\log n - \log b_n$ なので, $\log t - \log \delta \geq \tau_n$ は $\log t + \log n - \log \delta \geq -\log b_n$ である. $\log n - \log \delta > 0$ 故 $\log t + \log n - \log \delta \geq -\log b_n$ を成り立たせる為には $\log t \geq -\log b_n$, つまり $t \geq \frac{1}{b_n}$ を仮定すれば十分である. これで $(b_n)_{n=0}^\infty$ が満たすべき第3の条件たる (3.3.10) も充足することを示す. これで存在証明は完結である. \square

条件 **($\Psi.1$)** 達成の為の間接操作: 大外枠数列 $(b_n)_{n=0}^\infty$, 外枠定数 $0 < \rho < \delta < 1$, 外枠数列 $(a_n)_{n=0}^\infty$ の環状集合 $E = \{0\} \cup (\cup_{n=0}^\infty E_n)$ と許容凸関数 Ψ が与えられているとする.

定理 3.3.13. 次の3条件 1° - 3° を満たす許容凸関数 Φ を見つけることが出来るなら, E に対し条件 **($\Psi.1$)** は成立する:

- 1° $\langle \Phi, \Psi \rangle$ は特異対である;
- 2° $(b_n)_{n=0}^\infty$ は $\langle \Phi, \Psi \rangle$ 大外枠数列である;
- 3° $\sup_{n \in \mathbb{N}} \Phi(-\log(na_n))m(E_n) < +\infty$.

証明. 条件 2° により (3.3.10) が成り立つので, $a_n \leq b_n$ ($n = 0, 1, \dots$) により $1/a_n \geq 1/b_n$ だから

$$0 < \Psi(-\log(\delta a_n)) \leq \frac{1}{2^n} \Phi(-\log(na_n)) \quad (n \in \mathbb{N})$$

である. 3° の左辺を K と置くと $0 < K < +\infty$ で

$$m(E_n) \leq K/\Phi(-\log(na_n)) \quad (n \in \mathbb{N})$$

となる. $E_n \subset \{\delta a_n \leq |z| \leq a_n\}$ ($n = 0, 1, \dots$) であるから, $z \in E_n$ ならば $|z|^{-1} \leq (\delta a_n)^{-1}$ より, 各 $n \in \mathbb{N}$ および各 $z \in E_n$ に対し $\Psi(\log^+ |1/z|) \leq \Psi(-\log(\delta a_n))$ だから

$$\int_{E_n} \Psi\left(\log^+ \left|\frac{1}{z}\right|\right) dm(z) \leq \Psi(-\log(\delta a_n))m(E_n) \leq \frac{1}{2^n} \Phi(-\log(na_n)) \cdot (K/\Phi(-\log(na_n))) = \frac{K}{2^n}$$

である. $\int_{\{0\}} \Psi(\log^+ |1/z|) dm(z) = (+\infty)m(\{0\}) = (+\infty) \cdot 0 = 0$, $\int_{E_0} \Psi(\log^+ |1/z|) dm(z) \leq \Psi(-\log(\delta a_0))m(E_0)$ であるから

$$\begin{aligned} \int_E \Psi\left(\log^+ \left|\frac{1}{z}\right|\right) dm(z) &= \int_{\{0\} \cup E_0} \Psi\left(\log^+ \left|\frac{1}{z}\right|\right) dm(z) + \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} \Psi\left(\log^+ \left|\frac{1}{z}\right|\right) dm(z) \\ &\leq \Psi(-\log(\delta a_0))m(E_0) + \sum_{n=1}^\infty \frac{K}{2^n} < +\infty \end{aligned}$$

即ち, 条件 **($\Psi.1$)** が成立する. \square

3.4. 条件 **($\Psi.2$)** の検討.

環状集合 E の補集合領域 $W = \hat{\mathbb{C}} \setminus E$ の調和測度が E の随伴調和測度 m で, W の原点 0 方向の近似列 $(W_n)_{n=0}^\infty$ を定める $W_n = \{a_n < |z| \leq \infty\} \setminus E$ の調和測度が E の随伴近似調和測度 m_n ($n \in \mathbb{N}$) であった. 許容凸関数 Ψ に対して **($\Psi.1$)** は m に拘わるが, **($\Psi.2$)** は m_n ($n \in \mathbb{N}$) に拘わる:

$$\mathbf{(\Psi.2):} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \Psi(-\log a_n) m_n(C(a_n)) < +\infty,$$

ここで, $C(a_n) = \partial B(a_n) = \{|z| = a_n\} = (\partial W_n) \setminus E$ である. **($\Psi.2$)** に関しては, §2.2.2 で論じた $m_n(C(a_n))$ の上方評価 (2.2.1) 及び下方評価 (2.2.2) が重要な役割を果たす. 環状集合 E に対して条件 **($\Psi.2$)** が成立するとき, E は順 **($\Psi.2$)** 型と言う. それに反して E に対して条件 **($\Psi.2$)** が成立しないとき, E は反 **($\Psi.2$)** 型である言うことにする. 以下に於いて, 順 **($\Psi.2$)** 型の E の存在と反 **($\Psi.2$)** 型の E の存在およびそれらに関連した若干の注意を述べる.

定理 3.4.1. 許容凸関数 Ψ が非強凸 (即ち, $d(\Psi) < +\infty$) ならば, 環状集合 E の如何に拘わらず常に条件 **($\Psi.2$)** は成立する. 換言すれば, Ψ が非強凸ならばどんな環状集合 E も順 **($\Psi.2$)** 型である.

証明. 評価式 (2.2.4) に依れば $m_n(C(a_n)) \leq B/(-\log a_n)$ ($n \geq N$) となる正定数 $B = B(E)$ と番号 $N = N(E)$ が定まる. それ故

$$\Psi(-\log a_n) m_n(C(a_n)) \leq B \frac{\Psi(-\log a_n)}{-\log a_n} \leq Bd(\Psi) < +\infty \quad (n \geq N)$$

であるから, $A := \max_{1 \leq n \leq N} \Psi(-\log a_n) m_n(C(a_n)) < +\infty$ に注意して

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \Psi(-\log a_n) m_n(C(a_n)) \leq \max\{A, Bd(\Psi)\} < +\infty$$

となって, 条件 (Ψ.2) の成立を知る. □

上記の如く $d(\Psi) < +\infty$ の場合はすべての E が順 (Ψ.2) 型であると言う極めて平明な結論が得られた. $d(\Psi) = +\infty$ の場合は, 状況は一転非常に困難である.

$$\Psi(-\log a_n) m_n(C(a_n)) = \left(\frac{\Psi(-\log a_n)}{-\log a_n} \right) \cdot (m_n(C(a_n))(-\log a_n))$$

に於いて, 右辺第1因子は $m \nearrow +\infty$ のとき $d(\Psi)$ に収束し, 第2因子の $n \nearrow +\infty$ のときの上極限は有限で下極限は一般には非負である. 故に $d(\Psi) < +\infty$ なら, 左辺の n についての有界性が主張できたのであった. しかるに $d(\Psi) = +\infty$ の場合右辺第2因子の下極限が正なら E は反 (Ψ.2) 型だと言えるが, この下極限正は期待し難く思える. 最も起こり易く思えるのは, 下極限零であるが, すると左辺の極限は, $\infty \cdot 0$ 型の不定形となるから, これが状況解明の困難点である. それ故 $d(\Psi) = \infty$ の場合得られる情報は限定的であるが, 一応今得られている範囲の結論を次定理に述べる.

定理 3.4.2. 許容凸函数 Ψ が強凸 (即ち, $d(\Psi) = +\infty$) のとき, 条件 (Ψ.1) は満たされるが, 条件 (Ψ.2) は満たされないような環状集合 E が存在する; 特に強凸な Ψ に対しては, 反 (Ψ.2) 型の環状集合 E が常に存在する; Ψ が強凸なら, E が (Ψ.1) を満たしても, $1/z \in H^\Psi(\hat{C} \setminus E)$ が成り立たないような E の実例があることになり, 改定版問題陳述:

$$(\Psi.1) \iff 1/z \in H^\Psi(\hat{C} \setminus E)$$

の \iff は正しいが, \implies は否定される, 即ち, 上記陳述の真偽の問の答は偽である.

証明. 所求の環状集合 E の存在を構成的に示す. 先ず外枠構造の内, 大外枠数列 $(b_n)_{n=0}^\infty$ を $b_0 = 1$ 以外全く任意の正数列を1つ取り固定する. 又, これも任意の2正数 $0 < \rho < \delta < 1$ を外枠定数とする. そして残るところの外枠数列 $(a_n)_{n=0}^\infty$ と本体構造の中核をなす成分列 $(E_n)_{n=0}^\infty$ は, 以下の如く帰納的に構成する. 先ず $0 < a_0 \leq b_0 = 1$ である正数 a_0 を任意に固定する. 次いで非極 (即ち, $\text{cap}(E_0) > 0$) 完全非連結完閉集合 $E_0 \subset \{\delta a_0 \leq |z| \leq a_0\}$ を任意に固定する. 例えば円周 $|z| = (1 + \delta)a_0/2$ 上の Cantor 型集合を採ればよい. $c(K)$ を $\{|z| \leq \rho a_0\}$ 内の各完閉集合 K の ∞ に対する $(\rho a_0, E_0)$ に関する調和容量とする ((3.3.2) 参照). 構成する $(a_n)_{n=0}^\infty$ と $(E_n)_{n=0}^\infty$ は

$$(3.4.3) \quad \Psi(-\log a_n) m_n(C(a_n)) \geq n \quad (n \in \mathbb{N});$$

$$(3.4.4) \quad 0 < c(E_n) \leq 2^{-n} \Psi(-\log(\delta a_n)) \quad (n \in \mathbb{N})$$

の2条件を満たすようにすることを別途とする. 以下2実数 α, β に対し $\alpha \vee \beta = \max\{\alpha, \beta\}$, $\alpha \wedge \beta = \min\{\alpha, \beta\}$, の常用の記号を使う.

第1段. 正数 a_1 を定めるのだが差し当たり a_1 は区間 $(0, b_1 \wedge (\rho a_0))$ 内にある変数とする. 命題 2.2.15 によれば

$$R_0 = R_{1-1} := \{\sqrt{\rho \delta} a_0 < |z|\} \setminus E_0$$

の境界成分 $C(\sqrt{\rho \delta} a_0)$ の R_0 に関して ∞ に対する調和測度を $B_0 = B_{1-1}$ とするとき, $\{a_1 < |z|\} \setminus E_0$ の ∞ に対する調和測度を従前通り m_1 とすると, (2.2.16) により

$$\liminf_{a_1 \searrow 0} m_1(C(a_1))(-\log a_1) \geq B_0 \log \sqrt{\frac{\delta}{\rho}}$$

となることを下で使う. さて

$$\Psi(-\log a_1) m_1(C(a_1)) = \frac{\Psi(-\log a_1)}{-\log a_1} (m_1(C(a_1)) \cdot (-\log a_1))$$

の両辺の $a_1 \searrow 0$ とするときの下極限をとると

$$\liminf_{a_1 \searrow 0} \Psi(-\log a_1) m_1(C(a_1)) \geq d(\Psi) \cdot B_0 \log \sqrt{\frac{\delta}{\rho}} = +\infty$$

となるから, $a_1 \in (0, b_1 \wedge (\rho a_0))$ を十分小さくとるなら $\Psi(-\log a_1)m_1(C(a_1)) \geq 1$, 即ち, $0 < a_1 \leq b_1, 0 < a_1 < \rho a_0$, (3.4.3) $_{n=1}$ となる a_1 が取れる. 次いで E_1 を定める. 暫定的に非極 (即ち, $\text{cap}(E'_1) > 0$) で完全非連結な完閉集合 $E'_1 \subset \{\delta a_1 \leq |z| \leq a_1\}$ をとる. $c(E'_1) \leq 2^{-1}\Psi(-\log(\delta a_1))^{-1}$ ならば $E_1 = E'_1$ とする. もし $2^{-1}\Psi(-\log(\delta a_1))^{-1} < c(E'_1)$ なら c に関する中間値の定理により $E_1 \subset E'_1$ となる完閉集合 E_1 で $c(E_1) = 2^{-1}\Psi(-\log a_1)^{-1}$ となるものがとれる. このように E_1 を定めたら (3.4.4) $_{n=1}$ が満たされる.

第 2 段. $n \geq 2$ とし, a_0, a_1, \dots, a_{n-1} 及び E_0, E_1, \dots, E_{n-1} が $0 < a_j \leq b_j$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$), $0 < a_j < \rho a_{j-1}$ ($j = 1, \dots, n-1$), (3.4.3) $_j$ ($j = 1, \dots, n-1$), 非極完全非連結完閉集合 $E_j \subset \{\delta a_j \leq |z| \leq a_j\}$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$), 及び (3.4.4) $_j$ ($j = 1, \dots, n-1$) を満たすように求めたとする. そのとき a_n を $0 < a_n < b_n, 0 < a_n < \rho a_{n-1}$ かつ, (3.4.3) $_{n=n}$ を満たし, 次いで非極完全非連結完閉集合 $E_n \subset \{\delta a_n \leq |z| \leq a_n\}$ で (3.4.4) $_{n=n}$ を満たすものを定めたら, E の外枠数列 $(a_n)_{n=0}^\infty$ と成分列 $(E_n)_{n=0}^\infty$ で (3.4.3) と (3.4.4) を満たすものの帰納的構成が完結する. この部分は第 1 段の作業再現と本質的には変わらないが, 念の為実行する. さて

$$R_{n-1} := \{\sqrt{\rho\delta}a_{n-1} < |z|\} \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} E_k\right)$$

の境界成分 $C(\sqrt{\rho\delta}a_{n-1})$ の R_{n-1} に関して ∞ に対する調和測度を B_{n-1} とするとき, $\{a_n < |z|\} \setminus (\bigcup_{k=0}^{n-1} E_k)$ の ∞ に対する調和測度を上と同様従前通り m_n とすると, (2.2.16) により

$$\liminf_{a_n \searrow 0} m_n(C(a_n)) \cdot (-\log a_n) \geq B_{n-1} \log \sqrt{\frac{\delta}{\rho}}$$

となるがこれを下で使う. さて

$$\Psi(-\log a_n)m_n(C(a_n)) = \frac{\Psi(-\log a_n)}{-\log a_n} (m_n(C(a_n)) \cdot (-\log a_n))$$

の両辺の $a_n \searrow 0$ とするときの下極限をとると

$$\liminf_{a_n \searrow 0} \Psi(-\log a_n)m_n(C(a_n)) \geq d(\Psi)B_{n-1} \log \sqrt{\frac{\delta}{\rho}} = +\infty$$

となるから $a_n \in (0, b_n \wedge (\rho a_{n-1}))$ を十分小さくとるとき $\Psi(-\log a_n)m_n(C(a_n)) \geq n$, 即ち, $0 < a_n \leq b_n, 0 < a_n < \rho a_{n-1}$, (3.4.3) $_{n=n}$ となる a_n がとれる. 次いで E_n を定める. 暫定的に非極完全非連結完閉集合 $E'_n \subset \{\delta a_n \leq |z| \leq a_n\}$ をとる. $c(E'_n) \leq 2^{-n}\Psi(-\log(\delta a_n))^{-1}$ ならば, $E_n = E'_n$ とする. もし $2^{-n}\Psi(-\log(\delta a_n))^{-1} < c(E'_n)$ なら, c に関する中間値定理により $E_n \subset E'_n$ となる完閉集合 E_n で $c(E_n) = 2^{-n}\Psi(-\log(\delta a_n))^{-1}$ となるものがとれる. このように E_n を定めたら (3.3.4) $_{n=n}$ が満たされる.

第 3 段. 以上で (3.4.3) 及び (3.4.4) の 2 条件を満足する環状集合 E の構成のための数学的帰納法が完結し, 所求のもの存在が確定された. この E が条件 (Ψ.2) : $\sup_{n \in \mathbb{N}} \Psi(-\log a_n)m_n(C(a_n)) < +\infty$ を満たさないことは (3.4.3) : $\Psi(-\log a_n)m_n(C(a_n)) \geq n$ ($n \in \mathbb{N}$) を E が満たすことからわかる. $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$ の ∞ に対する調和測度 m に関して, (3.3.7) : $m(E_n) \leq c(E_n)$ ($n \in \mathbb{N}$) により (3.3.4) : $c(E_n) \leq 2^{-n}\Psi(-\log(\delta a_n))^{-1}$ から

$$(3.3.1) : 0 < m(E_n) \leq 2^{-n}\Psi(-\log(\delta a_n))^{-1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

がわかり, (Ψ.1) : $\int_E \Psi(\log^+ |1/z|) dm(z) < +\infty$ の成立が従う (§3.3 参照). こうして, 構成した環状集合 E は (Ψ.1) を満たすが, (Ψ.2) を満たさない. \square

言葉の問題に過ぎないが, $d(\Psi) < +\infty$ のときに反 (Ψ.2) 型の E はいつも無い事との著しい相違は注目すべき点である.

特殊判定定理 (定理 3.1.4) に依れば, 一般の $E' \in \Gamma$ に対しては, (Ψ.1) & (Ψ.2) $\iff 1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E')$, であったから, 我々の構成した E は (Ψ.2) を満たさないのだから, $1/z \notin H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ である. だから, $d(\Psi) = \infty$ のとき, ある特別の $E' \in \Gamma$ に対し, “(Ψ.1) があるから $1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E')$ ” という主張があれば, この真偽は直ちに結論できない. 例え真であっても上の 1 行だけでは説明は完全でない. (Ψ.2) と同値の何等かの事実を示さぬ限り完全でない. だが, 反 (Ψ.2) 型の E を持つてこられたら反論の余地は皆無である.

直前でも用いた通り, 原点 $z = 0$ 中心の環状集合の全体を Γ と記すことにしていた. 与えられた許容凸関数 Ψ に対して, 順 ($\Psi.2$) 型の $E \in \Gamma$ の全体を Γ' と記し, 反 ($\Psi.2$) 型の $E \in \Gamma$ の全体を Γ'' と記せば

$$\Gamma = \Gamma' \oplus \Gamma''$$

である.* さて我々の現有の知識は

$$(3.4.6) \quad \begin{cases} d(\Psi) < \infty & \implies \begin{cases} \Gamma' = \Gamma \\ \Gamma'' = \emptyset \end{cases} \\ d(\Psi) = \infty & \implies \begin{cases} \Gamma' = ? \\ \Gamma'' \neq \emptyset \end{cases} \end{cases}$$

である. これに関するところの我々の未解決問題は, $d(\Psi) = \infty$ のとき $\Gamma' = \Gamma \setminus \Gamma''$ が空集合 \emptyset であるか否かで, $\Gamma' \neq \emptyset$ となれば誠に好都合であると言える事情にある. が, その為には外枠数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ が相当の緩減少数列であることを要すると思われるが, 我々の関心状況では, $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ が急減少数列で, その度合いが激しければいくら激しくてもより好ましいと言う全体像の中にあり, $\Gamma' = \emptyset$ となる可能性も低くはないとも言いたくもなる. 要するに, 今は何も言えない.

4. 環状集合の分類

許容凸関数 Φ をノルムを持つ Hardy-Orlicz 空間 $H^\Phi(R)$ の構造解析に資する目的で環状集合 E が導入された. 即ち, E の補集合 $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$ を定義域を持つ $H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ の構造を E に転化することで, 研究の手掛かりを獲得しようと言うのが目論みである. ここで $H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ の構造等と大袈裟な物言いをしているが, $H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) = \mathbb{C}$ となるか否かとか, $\hat{\mathbb{C}}_0 := \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ 上の基本正則関数である $1/z$ が $1/z \in H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ であるかどうか, と言う程度の単純なものである. と言っても, 上の前者は Riemann 面の分類理論の基本視点ではある. 既に前3節で, これらはある程度の考察を行ってきたが, これからは, 単純な環状集合というだけでなく, 更に凸関数 Φ とのかかわりで, いくつかの付加条件を E に課した特殊化環状集合を考え, それ等の存在定理を与えることが本節の目的である.

4.1. 特殊環状集合の諸族.

原点 $z = 0$ を中心とする環状集合 $E := \{0\} \cup (\cup_{n=0}^{\infty} E_n)$ の定義 (小節 1.2 参照) を誠にしつこいことは承知の上で, 再度想起したい. 環状集合として舞台にあがるものは上の E であるが, 概念としても環状集合は外枠構造と本体構造の合体からなる. 外枠構造は舞台裏にいて表からは見えぬが, $b_0 = 1$ 以外は全く任意の正数列である大外枠数列 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ と, 外枠定数と呼ぶ 2 実数 $0 < \rho < \delta < 1$, 及び, 外枠数列と呼ぶ正数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ からなる, 但し, $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ は次の諸条件を満たすものである: $0 < a_n \leq b_n$ ($n = 0, 1, \dots$), $0 < a_{n+1} < \rho a_n$ ($n = 0, 1, \dots$). 本体構造は, 完全非連結で非極な (nonpolar) 完閉集合 $E_n \subset \{\delta a_n \leq |z| \leq a_n\}$ ($n = 0, 1, \dots$) からなる成分集合列 $(E_n)_{n=0}^{\infty}$ と中心 $\{0\}$ からなり, これが環状集合 $E := \{0\} \cup (\cup_{n=0}^{\infty} E_n)$ として表舞台に登場するのであった. これらの環状集合 E の全体からなる族を記号

$$(4.1.1) \quad \Gamma$$

で表す. Γ は対応するローマ大文字 C の小文字が circular (環状の) の頭文字であるからだと了解されたい. 各 $E \in \Gamma$ には補集合領域 $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$ の調和測度 m と $\{a_n < |z| \leq +\infty\} \setminus E$ の調和測度 m_n ($n \in \mathbb{N}$) が随伴し, m を E の随伴調和測度及び $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を E の随伴近似調和測度列と呼んだ.

許容凸関数 Φ を取る. $\frac{\Phi(t)}{t}$ は $(0, +\infty)$ 上の非減少関数なので, 量

$$(4.1.2) \quad d(\Phi) := \lim_{t \nearrow \infty} \frac{\Phi(t)}{t} \in (0, +\infty]$$

が常に定義できる. そして, $0 < d(\Phi) < \infty$ であるか, $d(\Phi) = +\infty$ のいずれかである. $d(\Phi) = +\infty$ の場合には, Φ は de la Vallée-Poussin 条件を満たすと言い, Φ は強凸であると言う. $0 < d(\Phi) < \infty$ のとき, Φ は非強凸と言う. そのとき

$$(4.1.3) \quad H^\Phi(R) = AB^*(R) \quad (d(\Phi) < \infty)$$

* 集合 X に対し, $Y \subset X$ かつ $Z \subset X$ であり, $X = Y \cup Z$ かつ $Y \cap Z = \emptyset$ のとき, $X = Y \oplus Z$ と記す.

となる. 但し, $AB^*(R)$ は R 上の Nevanlinna 族と言ったり, R 上の有界型正則函数環と呼んだりする. 言葉通り $AB^*(R)$ は \mathbb{C} 係数の代数 (algebra) となることが示される ([15] 参照).

さて Φ は強凸な許容凸函数として, 次のような $E \in \Gamma$ を考える. 先ず E の大外枠数列 $(b_n)_{n=0}^\infty$ は $b_0 = 1$ かつ $0 < b_n < 1/n$ ($n \in \mathbb{N}$) を満たす. 外枠定数 $0 < \rho < \delta < 1$ は任意に定める. そして外枠数列 $(a_n)_{n=0}^\infty$ は, 型通り, $0 < a_n \leq b_n$ ($n = 0, 1, \dots$) と $0 < a_{n+1} \leq \rho a_n$ ($n = 0, 1, \dots$) を満たす. そして成分列 $(E_n)_{n=0}^\infty$ は, 次の如きものである: 任意に定数 $0 < d < 1$ を定め, 非極な \mathcal{N}_Φ 集合 $E_n \subset \{\delta a_n \leq |z| \leq a_n\}$ ($n = 0, 1, \dots$) を

$$(4.1.4) \quad d \leq \Phi(-\log(na_n))m(E_n) \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

を満たすように取り, $E = \{0\} \cup (\cup_{n=0}^\infty E_n)$ とする. 但し m は E の随伴調和測度である.

上記のような性質を持つ $E \in \Gamma$ の全体の作る Γ の部分族を

$$(4.1.5) \quad \Gamma_\Phi$$

と記す. ならば, $\Gamma \supset \Gamma_\Phi$. この族 Γ_Φ は $d(\Phi) = +\infty$, 即ち, 強凸な Φ に対してのみ考えることは致命的に重要である. つまり族 Γ_Φ は $d(\Phi) = \infty$ に対してのみ考えることを再度強調する.

2個の Hardy-Orlicz 空間 $H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ と $H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ のかかわりの研究に於いては, $E \in \Gamma$ が Φ にも Ψ にも何等かの拘束を受けることになるであろう. かかる事態への対処の方向へ進む. 許容凸函数 Φ と Ψ を考える. これが条件

$$(3.3.9) : \quad \frac{\Psi(t)}{\Phi(t-s)} = o(1) \quad (t \nearrow \infty)$$

をすべての任意に固定した $s > 0$ に対して満足するならば, Φ と Ψ は特異対 $\langle \Phi, \Psi \rangle$ を作るということにした.* ならば, 自動的に Φ は強凸でなければならぬが, Ψ は強凸なことも非強凸なことも自由に起こり得ることを小節 3.1 で見た. また逆に $d(\Psi) < \infty$ なら, Φ と Ψ は特異対 $\langle \Phi, \Psi \rangle$ を形成することも見た. そこで特異対 $\langle \Phi, \Psi \rangle$ に対しある任意の $0 < \delta < 1$ を与えて, 正数列 $(b_n)_{n=0}^\infty$ が, $b_0 = 1, 0 < b_n < 1/n$ ($n \in \mathbb{N}$), 及び

$$(3.3.10) : \quad 0 < \Psi\left(\log \frac{t}{\delta}\right) \leq \frac{1}{2^n} \Phi\left(\log \frac{t}{n}\right) \quad \left(\frac{1}{b_n} < t\right)$$

の3条件を満たすとき, $(b_n)_{n=0}^\infty$ を $0 < \delta < 1$ に対する $\langle \Phi, \Psi \rangle$ 大外枠数列と呼ぶことにした. そしてその存在証明も確立している.

さて $\langle \Phi, \Psi \rangle$ は任意の許容凸函数の特異対として, 次のような $E \in \Gamma$ を考える. 先ず $0 < \rho < \delta < 1$ であるような任意の2定数を E の外枠定数とし, E の大外枠数列 $(b_n)_{n=0}^\infty$ は, $\langle \Phi, \Psi \rangle$ と δ に対する $\langle \Phi, \Psi \rangle$ 大外枠数列とする. そして E の外枠数列 $(a_n)_{n=0}^\infty$ は, $0 < a_n < b_n$ ($n = 0, 1, \dots$) と $0 < a_{n+1} < \rho a_n$ ($n = 0, 1, \dots$) を満たす. そして E の成分集合列 $(E_n)_{n=0}^\infty$ は次の如きものである: 任意に定数 $0 < d < 1$ を定め, 非極な \mathcal{N}_Φ 集合 $E_n \subset \{\delta a_n \leq |z| \leq a_n\}$ ($n = 0, 1, \dots$) を

$$(4.1.4) : \quad d \leq \Phi(-\log(na_n))m(E_n) \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

を満足するように取り, $E = \{0\} \cup (\cup_{n=0}^\infty E_n)$ を求める環状集合とする. 但し m は E の随伴調和測度である. このような $E \in \Gamma$ の全体の作る Γ の部分族を

$$(4.1.6) \quad \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$$

と記すことにする. 明らかに $\Gamma \supset \Gamma_\Phi \supset \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ の包含関係にある.

ここに特殊判定定理 (定理 3.1.4) の出番となるのが $\Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ である. 特殊判定定理を支える本質的2条件のうち $(\Psi.1)$ には手厚い配慮が施されている (即ち, (3.3.10) と (4.1.4) の手配) のに $(\Psi.2)$ についてはそれが無い. 即ち,

$$(\Psi.2) : \quad \sup_{n \in \{0\} \cup \mathbb{N}} \Psi(-\log a_n)m_n(C(a_n)) < +\infty$$

の成否への言及が一切ない. 従ってこれに対する検討が是非必要となる. その為 $E \in \Gamma$ で, 与えられた許容凸函数 Ψ に対し, $(\Psi.2)$ が満たされる (又は, 満たされない) とき, E は Ψ に関し順 **($\Psi.2$)** 型 (又は, 反 **($\Psi.2$)** 型) と言い, 順 **($\Psi.2$)** 型

* この条件は Φ, Ψ の少なくともいずれかが Δ_2 条件を満たすときは, 単純な条件 $\Psi(t)/\Phi(t) = o(1)$ ($t \nearrow \infty$) と同値であることは直ぐ分かる.

の $E \in \Gamma$ の全体を Γ' , 又反 (Ψ.2) 型の $E \in \Gamma$ の全体を Γ'' と記すことにすれば, \oplus で互いに素な 2 集合の和 (直和) を示すことにして

$$\Gamma = \Gamma' \oplus \Gamma'' \quad (\Psi \text{ に関して})$$

と Γ が分解される. これを $\Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ で行う. 即ち $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ が順 (Ψ.2) 型であるような E の全体を $\Gamma'_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ と記し, $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ が反 (Ψ.2) 型であるような E の全体を $\Gamma''_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ と記すならば

$$(4.1.7) \quad \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle} = \Gamma'_{\langle \Phi, \Psi \rangle} \oplus \Gamma''_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$$

である. 単純な包含関係としては

$$(4.1.8) \quad \Gamma \supset \Gamma_{\Phi} \supset \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle} = \Gamma'_{\langle \Phi, \Psi \rangle} \oplus \Gamma''_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$$

である. ここに現れる Γ_{Φ} , $\Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$, $\Gamma'_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$, $\Gamma''_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ が自明 (即ち, 空集合) か非自明かの検討は先ず第 1 の重要な課題である.

4.2. 特殊環状集合の存在.

ここでは, $\Gamma \supset \Gamma_{\Phi} \supset \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ に於いて, Γ は無論, Γ_{Φ} も $\Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ のいずれも非自明なことを示し, ついで $\Gamma'_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ と $\Gamma''_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ に関する非自明性の検討を行う. この目標の作業実行のための準備的考察を 2 個行う. 一つは \mathcal{N}_{Φ} 零集合の存在に関するところで, もう一つは, $E \in \Gamma$ の随伴調和測度 m と E の随伴近似調和測度列 $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ については詳しく説明を行ったが, 未だ触れていなかった E の随伴変種近似調和測度列 $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ と呼ぶものについてである.

最初 \mathcal{N}_{Φ} 零集合に関するところから始める. 完閉集合 $K \subset \hat{\mathbb{C}}$ と許容凸函数 Φ に対して, $K \subset V$ である $\hat{\mathbb{C}}$ のすべての部分領域 V に対して $H^{\Phi}(V \setminus K) = H^{\Phi}(V)$ となるとき, K は H^{Φ} 除去可能集合又は H^{Φ} 零集合等と呼び, その全体を \mathcal{N}_{Φ} と記す. $K \in \mathcal{N}_{\Phi}$ は完全非連結な完閉集合である. 次の主張は非常に重要である:

命題 4.2.1 (\mathcal{N}_{Φ} 集合の基本存在定理). Φ は許容凸函数で強凸 (即ち, $d(\Phi) = \infty$) とし, 正数 $0 < a < \infty$ を固定する. $F \subset \{a < |z|\}$ は非極 (nonpolar) な有界閉集合で $\{a < |z|\} \setminus F$ は連結とする. そのとき, 任意に与えた 2 正数 $\varepsilon > 0$ と $0 < \delta < 1$ に対し, 次の性質を持つ非極な $E \in \mathcal{N}_{\Phi}$ が存在する:

- (a) $E \subset \{\delta a \leq |z| \leq a\}$;
- (b) $0 < \mu_{C(a)}(C(a)) - \mu_E(E) < \varepsilon$,

但し, $\mu_{C(a)}$ 及び μ_E は夫々領域 $\{a < |z|\} \setminus F$ 及び $(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) \setminus F$ の ∞ に対する調和測度とし, $C(a) = \{|z| = a\}$ とする.

説明. この重要な定理は荷見 [4] ([6] も参照) に依る. 元々 [6, p.342] では Φ は強凸のみではなく Δ_2 条件をも満たすものとしてこの定理を述べている. しかし Φ の強凸性の故, 強凸かつ Δ_2 条件を満たし $\Xi(t)/\Phi(t) = o(1)$ ($t \nearrow \infty$) となる許容凸函数 Ξ は常に求まる (例えば [6, p.331] 参照). だから [6, p.342] の定理により (a), (b) を満たす $E \in \mathcal{N}_{\Xi}$ が求まり, $\Xi(t)/\Phi(t) = o(1)$ ($t \rightarrow \infty$) より $\mathcal{N}_{\Xi} \subset \mathcal{N}_{\Phi}$ であるから $E \in \mathcal{N}_{\Xi} \subset \mathcal{N}_{\Phi}$ より $E \in \mathcal{N}_{\Phi}$ となり, 上記定理の如く Φ には Δ_2 条件なしでよいことになる.

加えて更に (b) は次の如く多くの帰結を含む. まず

$$\begin{cases} \mu_{C(a)}(C(a)) + \mu_{C(a)}(F) = 1, \\ \mu_E(E) + \mu_E(F) = 1 \end{cases}$$

であり, $\mu_{C(a)}(C(a)) > \mu_E(E)$ だから $\mu_{C(a)}(F) < \mu_E(F)$ である.

$$0 < \mu_E(F) - \mu_{C(a)}(F) < \varepsilon$$

となり, 更に, F が互いに素な有界閉集合 F_j ($j = 1, \dots, n$) の合併 $F = \cup_{j=1}^n F_j$ に分解されるなら, $\mu_{C(a)}(F_j) < \mu_E(F_j)$ ($j = 1, \dots, n$) であり

$$0 < \sum_{j=1}^n (\mu_E(F_j) - \mu_{C(a)}(F_j)) < \varepsilon \quad (\text{特に, } 0 < \mu_E(F_j) - \mu_{C(a)}(F_j) < \varepsilon \text{ (} j = 1, \dots, n \text{)})$$

となることが結論出来る。 □

次に準備的考察の第2である調和測度についてである。 $E \in \Gamma$ としてその成分分解を $E = \{0\} \cup (\cup_{n=0}^{\infty} E_n)$ とする。 $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$ の ∞ に対する調和測度 m が E の随伴調和測度で、 $\{a_n < |z|\} \setminus (\cup_{j=0}^{n-1} E_j)$ の ∞ に対する調和測度 m_n の列 $(m_n)_{n=1}^{\infty}$ が E の随伴近似調和測度列であった。 これらに加えて、 $\hat{\mathbb{C}} \setminus (\cup_{j=0}^n E_j)$ の ∞ に対する調和測度を μ_n と記すとき、 $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ を E の随伴変種近似調和測度列と呼ぶことにする。 命題 2.1.1 に於いて得た所に呼応して次の性質がある。

命題 4.2.2. 成分 E_j 上 $(\mu_{j+n})_{n=0}^{\infty}$ は単調減少、即ち、

$$(4.2.3) \quad \mu_{j+n} \geq \mu_{j+n+1} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

であって、 m を下界に持ち、即ち

$$(4.2.4) \quad \mu_{j+n} \geq m \quad (n = 0, 1, \dots)$$

となり、 m に漠収束する、即ち

$$(4.2.5) \quad \lim_{n \nearrow \infty} \mu_{j+n} = m.$$

この主張は、命題 2.1.1 の証明と全く並行的に同じように証明出来るので、証明は省略する。 だから各成分 E_j ($j = 0, 1, \dots$) 上で十分大きなすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$m_{j+n} \leq m_{j+n+1} \leq m \leq \mu_{j+n+1} \leq \mu_{j+n}$$

となり、更に各 E_j 上

$$m_{j+n} \nearrow m, \quad \mu_{j+n} \searrow m \quad (n \nearrow \infty)$$

となる訳である。

以上で準備は終了として、下記する如き特別の性質を持つ $E \in \Gamma$ を考え、そのような E の存在を構成的に証明する。

定理 4.2.6. 任意の強凸な許容凸函数 Φ と Ξ を与える。 そのとき次のような環状集合 $E \in \Gamma$ が存在する。 E の外枠構造としての大外枠数列 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ は $b_0 = 1$ 及び $b_n < 1/n$ ($n \in \mathbb{N}$) 以外は任意の正数列とする。 外枠定数 $0 < \rho < \delta < 1$ も任意でよい。 外枠数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ と E の本体構造に於ける成分集合列 $(E_n)_{n=0}^{\infty}$ は以下の緒性質を満たす：

$$(4.2.7) \quad 0 < a_n < b_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$(4.2.8) \quad a_{n+1} \leq \rho a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

各 $n = 0, 1, \dots$ に対し $E_n \subset \hat{\mathbb{C}}$ は \mathcal{N}_{Φ} 級零集合で対数容量正である完閉集合で

$$(4.2.9) \quad E_n \subset \{\delta a_n \leq |z| \leq a_n\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を満たし、更に或る任意に与えた固定正数 $0 < d < 1$ に対して

$$(4.2.10) \quad d \leq \Phi(-\log(na_n))m(E_n) \leq 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

となり、その上更に

$$(4.2.11) \quad \Xi(-\log a_n)m_n(C(a_n)) \geq n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を満たす。 このように定めた Γ の元

$$E := \left(\cup_{n=0}^{\infty} E_n \right) \cup \{0\}$$

が求めるものである。 但し m と m_n は夫々計測点 ∞ に対する領域 $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$ 及び $\{a_n < |z|\} \setminus E$ の調和測度である。

証明. 上記主張で言う所の外枠数列 $(a_n)_{n=0}^\infty$ と E の成分列 $(E_n)_{n=0}^\infty$ を定めるのに、先ず a_0 を決め、ついで E_0 を決める. 次に a_1 を決めた上で E_1 を決める. 次いで a_2 を決めその後で E_2 を決める. この様に次々と帰納的手続きに従って $(a_n)_{n=0}^\infty$ と $(E_n)_{n=0}^\infty$ を作り上げるのがこの証明の基本方針である.

先ず二三の補助的記号又は量を導入又は想起する. (4.2.10) にかかわる $0 < d < 1$ に対して数列

$$1 > d_0 > d_1 > \cdots > d_{n-1} > d_n \cdots \searrow d$$

を用意する. 2 領域

$$\hat{C} \setminus \bigcup_{j=0}^{n-1} E_j \quad \text{と} \quad \{a_n < |z|\} \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{n-1} E_j \right)$$

の計測点 ∞ の調和測度を μ_{n-1} と m_n と記すことにしている. 上に述べた様に次々と a_n を定めていくのであるが、この作業に於いては、小さければ $a_n > 0$ である限りいくら a_n を小さく取っても構わないという状況下にあることを常に念頭に置くことが重要で、それ故すべての $n \in \mathbb{N}$ につき a_n は十分小さく取って

$$\Phi(-\log(na_n)) > 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

となっており、さらに

$$\alpha_n := 1/\Phi(-\log(na_n)) \quad (n \in \mathbb{N})$$

で定める数列 $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は零に収束する正数列であると仮定してよい.

ここから、いよいよ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ と $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の決定作業を始める. a_0 を $0 < a_0 \leq b_0 = 1$ かつ $\Phi(-\log a_0) > 0$ となるようにとる (つまり a_0 を十分小に取ればよい). 零集合の基本存在定理 (命題 4.2.1) により非極な (即ち、極集合でない、つまり対数容量正である) $E_0 \in \mathcal{N}_\Phi$ で

$$E_0 \subset \{\delta a_0 \leq |z| \leq a_0\}$$

となるものを取る. このように決めた a_0 と E_0 は、しかし別格で、以下すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して次の条件

$$(c_n) \quad \begin{cases} 0 < a_j < b_j, & \Phi(-\log(ja_j)) > 0 & (1 \leq j \leq n) \\ a_{j+1} \leq \rho a_j & & (0 \leq j \leq n-1) \\ d_n \alpha_j \leq \mu_n(E_j) \leq \alpha_j & & (1 \leq j \leq n) \\ \Xi(-\log a_j) m_j(C(a_j)) \geq j & & (1 \leq j \leq n) \end{cases}$$

(但し $\alpha_j := 1/\Phi(-\log(ja_j))$ ($1 \leq j \leq n$)) を満足するような外枠数列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ と成分集合列 $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を構成したい. 但し、 $E_n \subset \{\delta a_n \leq |z| \leq a_n\}$ は $E_n \in \mathcal{N}_\Phi$ で非極である完閉集合である. (だから、無論、 E_n が \mathcal{N}_Φ 集合であることの帰結としても、すべての E_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) は完全非連結である.) これを以下で $n \in \mathbb{N}$ に関する数学的帰納法で実行する.

帰納法の 1 つの階梯へ進むため $n \in \mathbb{N}$ で $n \geq 2$ となるものを任意に取る. 別格的に a_0 と E_0 は元々定めてあるが、その上正数列 $a_1 > a_2 > \cdots > a_{n-1} > 0$ と非極 \mathcal{N}_Φ 完閉集合列 E_1, E_2, \dots, E_{n-1} で $E_j \subset \{\delta a_j \leq |z| \leq a_j\}$ ($1 \leq j \leq n-1$) となり次の条件

$$(c_{n-1}) \quad \begin{cases} 0 < a_j < b_j, & \Phi(-\log(ja_j)) > 0 & (1 \leq j \leq n-1) \\ a_{j+1} \leq \rho a_j & & (0 \leq j \leq n-2) \\ d_{n-1} \alpha_j \leq \mu_{n-1}(E_j) \leq \alpha_j & & (1 \leq j \leq n-1) \\ \Xi(-\log a_j) m_j(C(a_j)) \geq j & & (1 \leq j \leq n-1) \end{cases}$$

但し $\alpha_j := 1/\Phi(-\log(ja_j))$, を満足するものが定められているとすると、 $a_n \in (0, b_n \wedge (\rho a_{n-1}))$ である a_n と非極 \mathcal{N}_Φ 完閉集合 $E_n \subset \{\delta a_n \leq |z| \leq a_n\}$ を上手くとって、 a_1, \dots, a_n と E_1, \dots, E_n が (c_n) を満たすように出来ることを示す.

上の目的を達成するに、先ず $a_n > 0$ を定め、次に E_n を決めるという順序で行う. 最初の $a_n > 0$ の決定に関する指導原理として、 $a_n > 0$ を十分小さく取ることにより、しかもひとたび目途とする所が達成されたら、更に好きなだけ小さく取って構わないという状況で、だから十分小さいすべての $a_n > 0$ に対して達成済みの枠組みに入るということになるのである. この状況を念頭に、十分小さいすべての $a_n > 0$ に対して次の 4 性質を満足するように出来ることを見る:

- (i) $0 < a_n < b_n$, $a_n \leq \rho a_{n-1}$, $\Phi(-\log(na_n)) > 0$;
- (ii) $d_n \alpha_j \leq m_n(E_j) \leq \alpha_j$ ($1 \leq j \leq n-1$);
- (iii) $m_n(C(a_n)) > 1/\Phi(-\log(na_n)) = \alpha_n$;
- (iv) $\Xi(-\log a_n)m_n(C(a_n)) \geq n$.

以上の4性質を容易なものから順次面倒なものへと (i) から初めて、次に (iii) ついで (iv) へ、そして最後に (ii) を扱う。

最初は完璧無欠に自明な (i) から始める。 $\eta_1 > 0$ を小さく取ったときの開区間 $(0, b_n \wedge (\rho a_{n-1}))$ の部分開区間 $(0, \eta_1)$ に対して $a_n \in (0, \eta_1)$ ならば (i) が成立する。事実、(i) の最初の2性質については言うまでもない。 $\Phi(t) \nearrow \infty$ ($t \nearrow \infty$) と $-\log(na_n) \nearrow \infty$ ($a_n \searrow 0$) により (i) の第3の性質の導出も容易である。

次は (iii) に進む。(iii) のみならずそれに続く (iv) に於いても用いる命題 2.2.15 を想起する、即ち、領域 $\{\sqrt{\rho\delta}a_{n-1} < |z|\} \setminus \cup_{j=0}^{n-1} E_j$ の境界成分 $C(\sqrt{\rho\delta}a_{n-1})$ の ∞ に対する調和測度 B_{n-1} は $a_n \in (0, b_n \wedge (\rho a_{n-1}))$ に無関係な正定数であって

$$(2.2.16): \quad \liminf_{a_n \searrow 0} m_n(C(a_n)) \cdot (-\log a_n) \geq B_{n-1} \log \sqrt{\frac{\delta}{\rho}}$$

となる。そこで

$$\begin{aligned} m_n(C(a_n))\Phi(-\log(na_n)) &= (m_n(C(a_n))(-\log a_n)) \cdot \frac{\Phi(-\log(na_n))}{-\log a_n} \\ &= (m_n(C(a_n))(-\log a_n)) \cdot \frac{\Phi(-\log(na_n))}{-\log(na_n)} \cdot \left(1 + \frac{-\log n}{-\log a_n}\right) \end{aligned}$$

に於いて、 $a_n \searrow 0$ なら $-\log a_n \nearrow \infty$ かつ $-\log(na_n) \nearrow \infty$ であり、 Φ は強凸故 $\Phi(-\log(na_n))/(-\log(na_n)) \nearrow \infty$ となる故、(2.2.16) により、上式より

$$\liminf_{a_n \searrow 0} m_n(C(a_n))\Phi(-\log(na_n)) \geq \left(B_{n-1} \log \sqrt{\frac{\delta}{\rho}}\right) \cdot \infty \cdot (1+0) = \infty$$

となる。従って $\eta_3 > 0$ を十分小にとれば、すべての $a_n \in (0, \eta_3) \subset (0, b_n \wedge (\rho a_{n-1}))$ について $m_n(C(a_n))\Phi(-\log(na_n)) \geq 1$ と出来る。なので、(i) も使って

$$m_n(C(a_n)) \geq 1/\Phi(-\log(na_n)) = \alpha_n,$$

即ち、(iii) が導かれた。

つづいて (iv) も殆ど上の (iii) と同様に示される、と言うより、幾分より簡明である。まず

$$\Xi(-\log a_n)m_n(C(a_n)) = \frac{\Xi(-\log a_n)}{-\log a_n} \cdot (m_n(C(a_n))(-\log a_n))$$

に注意して、両辺の $a_n \searrow 0$ に対する下極限をとるとき、 $-\log a_n \nearrow \infty$ であり、 Ξ の強凸性より $\Xi(-\log a_n)/(-\log a_n) \nearrow \infty$ であり、更に (2.2.16) より

$$\liminf_{a_n \searrow 0} \Xi(-\log a_n)m_n(C(a_n)) \geq \infty \cdot B_{n-1} \log \sqrt{\frac{\delta}{\rho}} = \infty$$

となる。従って $\eta_4 > 0$ を十分小にとれば、すべての $a_n \in (0, \eta_4) \subset (0, b_n \wedge (\rho a_{n-1}))$ について $\Xi(-\log a_n)m_n(C(a_n)) \geq n$ と出来る、つまり (iv) が導かれた。

最後に性質 (ii) へ進む。各 E_j ($1 \leq j \leq n-1$) につき

$$m_n(E_j) \leq \mu_{n-1}(E_j), \quad \lim_{a_n \searrow 0} m_n(E_j) = \mu_{n-1}(E_j)$$

となることに先ず注意する。これは当該調和測度の函数表示で考えるという標準的考察により直ぐ分かる (2.1 節、命題 4.2.2 等参照)、即ち、 u を領域 $\{a_n < |z|\} \setminus \cup_{k=1}^{n-1} E_k$ 上境界条件 $u|_{E_j} = 1$, $u|_{C(a_n)} \cup (\cup_{1 \leq k \leq n-1, k \neq j} E_k) = 0$ の Dirichlet 解、 v を領域 $\hat{C} \setminus \cup_{k=1}^{n-1} E_k$ 上境界条件 $v|_{E_j} = 1$, $v|_{\cup_{1 \leq k \leq n-1, k \neq j} E_k} = 0$ の Dirichlet 解とすると

$$u(\infty) = m_n(E_j), \quad v(\infty) = \mu_{n-1}(E_j)$$

である. $\{|z| \leq a_n\}$ 上 $u \equiv 0$ として u の定義域を $\Omega := \hat{\mathbb{C}} \setminus \cup_{k=1}^{n-1} E_k$ 迄拡張しておく, u は Ω 上劣調和, $\Omega \setminus \{|z| \leq a_n\}$ 上調和であり, Ω 上 $a_n \searrow 0$ と共に単調非減少で, Ω 上 $0 \leq u \leq v \leq 1$ である. よって特に $u(\infty) \leq v(\infty)$ より

$$m_n(E_j) \leq \mu_{n-1}(E_j) \quad (j = 1, \dots, n-1)$$

がまず分かる. 同じく Harnack 原理により $\Omega \setminus \{0\}$ 上

$$w := \lim_{a_n \searrow 0} u$$

が定義出来そして調和で $0 \leq w \leq v \leq 1$ である. よって Riemann の定理より $z = 0$ は w の調和除去可能特異点となるから, w は Ω 上調和となる. 故に $v - w$ は $\Omega = \hat{\mathbb{C}} \setminus \cup_{k=1}^{n-1} E_k$ 上境界条件 $(v - w)|_{\cup_{k=1}^{n-1} E_k} = 0$ の Dirichlet 解であるので, Ω 上 $v - w = 0$ なので $\lim_{a_n \searrow 0} u = v$ で特に $\lim_{a_n \searrow 0} u(\infty) = v(\infty)$, 即ち

$$\lim_{a_n \searrow 0} m_n(E_j) = \mu_{n-1}(E_j) \quad (j = 1, \dots, n-1)$$

も導出できた. だから

$$\lim_{a_n \searrow 0} \sum_{j=1}^{n-1} (\mu_{n-1}(E_j) - m_n(E_j)) = 0$$

となる. 故に $0 < \eta_2 < b_n \wedge (\rho a_{n-1})$ が定まって $a_n \in (0, \eta_2)$ なら

$$\sum_{j=1}^{n-1} (\mu_{n-1}(E_j) - m_n(E_j)) < \varepsilon := (d_{n-1} - d_n) \min\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$$

が成り立つ. 帰納法の仮定 (c_{n-1}) の第3式 $d_{n-1}\alpha_j \leq \mu_{n-1}(E_j) \leq \alpha_j$ ($1 \leq j \leq n-1$) と上の ε の定義より $\varepsilon \leq (d_{n-1} - d_n)\alpha_j$ ($1 \leq j \leq n-1$) であることから, 各 $j = 1, \dots, n-1$ に対し

$$d_n\alpha_j = d_{n-1}\alpha_j - (d_{n-1} - d_n)\alpha_j \leq d_{n-1}\alpha_j - \varepsilon \leq \mu_{n-1}(E_j) - \varepsilon \leq m_n(E_j) \leq \mu_{n-1}(E_j) \leq \alpha_j$$

が $a_n \in (0, \eta_2)$ なら満たされる. つまり $a_n \in (0, \eta_2)$ なら

$$d_n\alpha_j \leq m_n(E_j) \leq \alpha_j \quad (j = 1, \dots, n-1)$$

となることがわかる, 即ち, (ii) が満たされる.

こうして4性質 (i)–(iv) が $a_n \in (0, \eta)$ ($\eta = \min\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$) に対して, つまり十分小さいすべての $a_n > 0$ に対して満たされることがわかり, $0 < a_n < b_n \wedge (\rho a_{n-1})$ が定められた. 次に E_n を決める.

非極で \mathcal{N}_Φ 級零集合である完閉集合 $E_n \subset \{\delta a_n \leq |z| \leq a_n\}$ で (c_n) の第3式 $d_n\alpha_j \leq \mu_n(E_j) \leq \alpha_j$ ($j = 1, \dots, n$) を満たすものを構成したい. これは (c_1) の第3式を満たす E_1 を作製したと全く同じと言うか本質的に変わらない論法で達成できるが, 念の為繰り返す. まず上の (iii), 即ち

$$m_n(C(a_n)) > \alpha_n$$

に注目する. Φ は強凸故 \mathcal{N}_Φ 零集合基本存在定理 (命題 4.2.1) によれば任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し非極な \mathcal{N}_Φ 零集合で $K \subset \{\delta a_n \leq |z| \leq a_n\}$ である完閉集合 K で

$$0 < m_n(C(a_n)) - \mu_K(K) < \varepsilon$$

となるものが存在する, 但し, μ_K は $(\hat{\mathbb{C}} \setminus K) \setminus \cup_{j=0}^{n-1} E_j$ の計測点 ∞ の調和測度とする. ここで上の $\varepsilon > 0$ として $\varepsilon = m_n(C(a_n)) - \alpha_n > 0$ に取ってあったとすると, 上の陳列式の右辺は $m_n(C(a_n)) - \mu_K(K) < m_n(C(a_n)) - \alpha_n$ となり, 従って

$$(4.2.12) \quad \alpha_n < \mu_K(K)$$

となる. $F \subset \{|z| \leq a_n\}$ を $\hat{\mathbb{C}} \setminus F$ が連結となる完閉集合とすると, μ_F を領域 $(\hat{\mathbb{C}} \setminus F) \setminus \cup_{j=0}^{n-1} E_j$ の計測点 ∞ の調和測度とするとき

$$F \mapsto c(F) := \mu_F(F)$$

で集合関数 $c(F)$ を定義すると, これは 3.3 節で定めた $(a_n, \cup_{j=0}^{n-1} E_j)$ に関する F の調和容量と呼ぶものであった. すると $\mu_K(K) = c(K)$ なので (4.2.12) より

$$(4.2.13) \quad [d_n \alpha_n, \alpha_n] \subset [0, c(K)]$$

である. 任意の $\alpha \in [d_n \alpha_n, \alpha_n]$ をとり固定すると $\alpha \in [0, c(K)]$ なので, 調和容量の中間値の定理 (3.3 節参照) により

$$c(E_n) = \alpha > 0$$

となる K の完閉部分集合 E_n が求まる. $c(E_n) > 0$ より E_n は非極で $E_n \subset K \in \mathcal{N}_\Phi$ より E_n は \mathcal{N}_Φ 零集合で $E_n \subset K \subset \{\delta a_n \leq |z| \leq a_n\}$ で, $c(E_n) = \mu_{E_n}(E_n) = \mu_n(E_n)$ より

$$(4.2.14) \quad d_n \alpha_n \leq \mu_n(E_n) \leq \alpha_n$$

即ち, 非極で \mathcal{N}_Φ 級零集合である完閉集合 $E_n \subset \{\delta a_n \leq |z| \leq a_n\}$ で (c_n) の第 3 式 $d_n \alpha_j \leq \mu_n(E_j) \leq \alpha_j$ ($j = 1, \dots, n$) の内 $j = n$ のものを満たすものが構成できた. 残るところ $j = 1, \dots, n-1$ のものが満たされることを以下に示す. 命題 2.1.1 と 4.2.2 によれば

$$(4.2.15) \quad m_n(E_j) \leq m(E_j) \leq \mu_n(E_j) \leq \mu_{n-1}(E_j) \quad (j = 1, \dots, n-1)$$

である. 上の (ii) よりわかる $d_n \alpha_j \leq m_n(E_j)$ ($j = 1, \dots, n-1$) と (c_{n-1}) の第 3 式より $\mu_{n-1}(E_j) \leq \alpha_j$ ($j = 1, \dots, n-1$), 及び上の (4.2.15) を順次使って

$$d_n \alpha_j \leq m_n(E_j) \leq \mu_n(E_j) \leq \mu_{n-1}(E_j) \leq \alpha_j \quad (j = 1, \dots, n-1)$$

即ち, $d_n \alpha_j \leq \mu_n(E_j) \leq \alpha_j$ ($j = 1, \dots, n-1$) となる. (4.2.14) と合わせて (c_n) の第 3 式が導かれる. 他に (c_{n-1}) (i) から (c_n) の第 1&2 式が従い, (c_{n-1}) (iv) から (c_n) の第 4 式が出る. こうして a_0, a_1, \dots, a_n と E_0, E_1, \dots, E_n が (c_n) を満足する.

減少正数列 $(a_j)_{j=0}^\infty$ と非極 \mathcal{N}_Φ 完閉集合列 $(E_j)_{j=0}^\infty$, $E_j \subset \{\delta a_j \leq |z| \leq a_j\}$ ($j = 0, 1, \dots$), で各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, $(a_j)_{j=0}^n$ と $(E_j)_{j=0}^n$ が条件 (c_n) を満たすようなものを帰納的に構成するにあたり, (c_{n-1}) を満たす $(a_j)_{j=0}^{n-1}$ と $(E_j)_{j=0}^{n-1}$ から (c_n) を満たす $(a_j)_{j=0}^n$ と $(E_j)_{j=0}^n$ を作製して見せたが ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$), 帰納法を完結させる為には, $(a_j)_{j=0}^1$ と $(E_j)_{j=0}^1$ で (c_1) を満たすものを構成せねばならぬ, 即ち, 正数 $a_1 > 0$ と非極 \mathcal{N}_Φ 完閉集合 $E_1 \subset \{\delta a_1 \leq |z| \leq a_1\}$ で条件

$$(c_1) \quad \begin{cases} 0 < a_1 < b_1, & \Phi(-\log(a_1)) > 0 \\ a_1 \leq \rho a_0 \\ d_1 \alpha_1 \leq \mu_1(E_1) \leq \alpha_1 \\ \Xi(-\log a_1) m_1(C(a_1)) \geq 1 \end{cases}$$

を満たすものを作りたい. この構成作業は, (c_{n-1}) をみたす $\{(a_j)_{j=0}^{n-1}, (E_j)_{j=0}^{n-1}\}$ から (c_n) を満たす $\{(a_j)_{j=0}^n, (E_j)_{j=0}^n\}$ の構成作業と本質的には同一で, 繰り返して見せる必要はないとも言えるが, $\{a_0, E_0\}$ から (c_1) を満たす $\{(a_j)_{j=0}^1, (E_j)_{j=0}^1\}$ の構成作業の仮定部分 $\{a_0, E_0\} = \{(a_j)_{j=0}^0, (E_j)_{j=0}^0\}$ は (c_n) の如き縛りは一切ない (つまり (c_0) と言ったものはない) ので, 形式は異なるので, 念のため (c_1) を満たす a_1 と E_1 の構成を明示する.

先ず (c_1) の第 1 式も第 2 式も, 十分小さな $0 < \sigma_{1,2} < b_1 \wedge (\rho a_0)$ を取るとき, すべての $a_1 \in (0, \sigma_{1,2})$ で満たされること自明であろう.

次に (c_1) 第 4 式に進む. 前の (iii), (iv) のとき同様命題 2.2.15 の

$$(2.2.16) : \liminf_{a_1 \searrow 0} m_1(C(a_1))(-\log a_1) \geq B_0 \log \sqrt{\frac{\delta}{\rho}} > 0$$

を使う。ここで B_0 は領域 $\{\sqrt{\rho\delta}a_0 < |z|\} \setminus E_0$ の境界成分 $C(\sqrt{\rho\delta}a_0)$ の計測点 ∞ の調和測度で、 a_1 には無関係な正定数である。さて

$$\Xi(-\log a_1)m_1(C(a_1)) = (m_1(C(a_1))(-\log a_1)) \cdot \frac{\Xi(-\log a_1)}{-\log a_1}$$

の両辺の $a_1 \searrow 0$ とする下極限を取るとき、 Ξ の強凸性により、(2.2.16) と共に

$$\liminf_{a_1 \searrow 0} \Xi(-\log a_1)m_1(C(a_1)) \geq \left(B_0 \log \sqrt{\frac{\delta}{\rho}} \right) \cdot \infty = \infty$$

なので十分小さい $0 < \sigma_4 < b_1 \wedge (\rho a_0)$ をとれば、すべての $a_1 \in (0, \sigma_4)$ に対し

$$\Xi(-\log a_1)m_1(C(a_1)) \geq 1$$

となる。即ち (c_1) の第 4 式は示された。

最後の (c_1) の第 3 式は、これを満たす非極 \mathcal{N}_Φ 完閉集合 $E_1 \subset \{\delta a_1 \leq |z| \leq a_1\}$ を構成するのであるが、その前にそれを可能にするが如き a_1 を定めねばならぬので、 (c_1) 中検討が最も厄介な式である。最初、上と同様

$$m_1(C(a_1))\Phi(-\log a_1) = (m_1(C(a_1))(-\log a_1)) \cdot \frac{\Phi(-\log a_1)}{-\log a_1}$$

の両辺の $a_1 \searrow 0$ とする下極限を取れば、 Φ の強凸性により (2.2.16) と共に

$$\liminf_{a_1 \searrow 0} m_1(C(a_1))\Phi(-\log a_1) \geq \left(B_0 \log \sqrt{\frac{\delta}{\rho}} \right) \cdot \infty = \infty$$

となるから、十分小さい $0 < \sigma_3 < b_1 \wedge (\rho a_0)$ をとれば、すべての $a_1 \in (0, \sigma_3)$ に対し

$$m_1(C(a_1))\Phi(-\log a_1) > 1$$

となるから、 $a_1 \in (0, \sigma)$, $\sigma = \min\{\sigma_{1,2}, \sigma_3, \sigma_4\}$, なら

$$(4.2.16) \quad m_1(C(a_1)) > \alpha_1 \quad (\alpha_1 = 1/\Phi(-\log a_1))$$

である。よって a_1 としては $a_1 \in (0, \sigma)$ となる任意の a_1 をとって a_1 と定める。その上で命題 4.2.1 を使えば、非極 \mathcal{N}_Φ 完閉集合 $K \subset \{\delta a_1 \leq |z| \leq a_1\}$ で、任意に与えられた正数 $\varepsilon > 0$ に対し

$$0 < m_1(C(a_1)) - \mu_K(K) < \varepsilon$$

となる K が求まる。但し、 μ_K は領域 $(\hat{C} \setminus K) \setminus E_0$ の計測点 ∞ の調和測度とする。そこで ε として、 $\varepsilon = m_1(C(a_1)) - \alpha_1 > 0$ ((4.2.16) 参照) にとれば

$$(4.2.17) \quad \alpha_1 < \mu_K(K)$$

となる。 $F \subset \{|z| \leq a_1\}$ を $\hat{C} \setminus F$ が連結となる完閉集合とすると、 μ_F を領域 $(\hat{C} \setminus F) \setminus E_0$ の計測点 ∞ の調和測度とするとき

$$F \mapsto c(F) := \mu_F(F)$$

で集合関数 $c(F)$ を定義すると、これは 3.3 節で定めた (a_1, E_0) に関する F の調和容量と呼ぶものであった。すると $\mu_K(K) = c(K)$ なので (4.2.17) より

$$(4.2.18) \quad [d_1\alpha_1, \alpha_1] \subset [0, c(K)]$$

である。任意の $\alpha \in [d_1\alpha_1, \alpha_1]$ を固定すると $\alpha \in [0, c(K)]$ なので調和容量の中間値の定理 (3.3 節参照) より

$$c(E_1) = \alpha > 0$$

となる K の完閉部分集合 E_1 が求まる. $c(E_1) > 0$ より E_1 は非極で, $E_1 \subset K \in \mathcal{N}_\Phi$ より E_1 は \mathcal{N}_Φ 級零集合である 完閉集合 $E_1 \subset K \subset \{\delta a_1 \leq |z| \leq a_1\}$ で, (c_1) の第3式を満たす. こうして $(a_j)_{j=0}^\infty$ と $(E_j)_{j=0}^\infty$ の構成の帰納法が完結する.

このようにして求める $E \in \Gamma$ が

$$E = \left(\bigcup_{j=0}^{\infty} E_j \right) \cup \{0\}$$

により構成できた. これが, 我々の定理 4.2.6 で要求する緒性質の中で (4.2.10) : $d \leq \Phi(-\log(na_n))m(E_n) \leq 1$ ($n = 1, 2, \dots$) 以外のもので総て満たされることは, 今や明らかになっている. (4.2.10) を示すに, 再び命題 2.1.1 と 4.2.2 を使う: 任意の E_j ($j = 0, 1, 2, \dots$) を固定するとき

$$\begin{cases} m_n(E_j) \nearrow m(E_j) \\ \mu_n(E_j) \searrow m(E_j) \end{cases} \quad (n \nearrow \infty)$$

となる. (c_n) の第3式: $d_n \alpha_j \leq \mu_n(E_j) \leq \alpha_j$, $\alpha_j = 1/\Phi(-\log(ja_j))$ ($j \leq n \in \mathbb{N}$), は, 単純な書き換えで,

$$d_n \leq \Phi(-\log(ja_j))\mu_n(E_j) \leq 1 \quad (j \leq n \in \mathbb{N})$$

となる. ここで $n \nearrow \infty$ とすると, $d_n \searrow d$ かつ $\mu_n(E_j) \searrow m(E_j)$ となるから, 上式から

$$d \leq \Phi(-\log(ja_j))m(E_j) \leq 1 \quad (j \in \mathbb{N})$$

となり, (4.2.10) が従う. □

4.3. 非自明特殊環状集合族.

前節 4.2 の主定理である定理 4.2.6 の応用として, 4.2 で導入した Γ の幾つかの部分族の自明, 非自明を検討する. 以下 2 つの許容凸関数 Φ と Ψ を考えるが, Φ は常に強凸と仮定するけれど Ψ は強凸になることも非強凸なこともある. これらは主役級の役割を演ずる. 今一つ強凸な許容凸関数 Ξ が主として脇役に登場する. 時には準主役に扱われたり, 単なるダミーであったりする.

最初許容凸関数 Φ と Ψ が特異対 $\langle \Phi, \Psi \rangle$ をなすとし, $(b_n)_{n=0}^\infty$ が正数 $\delta > 0$ に対する $\langle \Phi, \Psi \rangle$ 大外枠数列であるとする (常に 1 つは存在した). Ξ は全く任意の強凸な許容凸関数とする. 定理 4.2.6 の $(b_n)_{n=0}^\infty$ は $\delta > 0$ に対する $\langle \Phi, \Psi \rangle$ 大外枠数列に取ることが出来る (δ はそこの外枠定数 $0 < \rho < \delta < 1$ の δ をとる). $b_0 = 1$, $b_n \leq 1/n$ なら何でも良かったからである. こうして定理 4.2.6 で構成された $E \in \Gamma$ は $\Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ に入るための条件をすべて持つ. これ以外 (4.2.11) : $\Xi(-\log a_n)m_n(C(a_n)) \geq n$ ($n \in \mathbb{N}$) と言う $\Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ に入る要件として全く無用な性質も持つが, これは無視して, $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ には違いない. 故に結論として

定理 4.3.1. 許容凸関数 Φ と Ψ の特異対 $\langle \Phi, \Psi \rangle$ 如何に拘わらず

$$(4.3.2) \quad \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle} \neq \emptyset.$$

$\Gamma \supset \Gamma_\Phi \supset \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ なので, 上記 (4.3.2) から次が従う:

定理 4.3.3. 任意の強凸な許容凸関数 Φ に対し

$$(4.3.4) \quad \Gamma_\Phi \neq \emptyset.$$

許容凸関数 Ψ に対し, $E \in \Gamma$ が条件 $(\Psi.2)$: $\sup_{n \in \mathbb{N}} \Psi(-\log a_n)m_n(C(a_n)) < \infty$ を満足する (又は, 満足しない) とき, E は順 $(\Psi.2)$ 型 (又は, 反 $(\Psi.2)$ 型) であると言った. 順 $(\Psi, 2)$ 型 (又は, 反 $(\Psi.2)$ 型) の $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ の全体を $\Gamma'_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ (又は, $\Gamma''_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$) と記せば, $\Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle} = \Gamma'_{\langle \Phi, \Psi \rangle} \cup \Gamma''_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$, $\Gamma'_{\langle \Phi, \Psi \rangle} \cap \Gamma''_{\langle \Phi, \Psi \rangle} = \emptyset$ の意味で $\Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ は $\Gamma'_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ と $\Gamma''_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ の直和であると言って

$$(4.3.5) \quad \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle} = \Gamma'_{\langle \Phi, \Psi \rangle} \oplus \Gamma''_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$$

と記した. $\Gamma'_{\langle\Phi,\Psi\rangle}$ や $\Gamma''_{\langle\Phi,\Psi\rangle}$ の自明であるか否かの判定は, 深く $d(\Psi)$ の有限性 (又は, 無限性) にかかわり, つまり, Ψ の非強凸性 (又は強凸性) にかかわり, 状況解明の作業は大変困難で, 一筋縄には行かないと思われ, 以下の如く成果は限定的で大きな課題が残る.

先ず Ψ が非強凸 (即ち, $d(\Psi) < \infty$) と仮定する. 定理 3.4.1 により, 任意の $E \in \Gamma$ は (Ψ.2) を満たす, 即ち, すべての $E \in \Gamma$ は順 (Ψ.2) 型であるので, 特に, 任意の $E \in \Gamma_{\langle\Phi,\Psi\rangle}$ は順 (Ψ.2) 型なので

$$(4.3.6) \quad \Gamma'_{\langle\Phi,\Psi\rangle} = \Gamma_{\langle\Phi,\Psi\rangle} \neq \emptyset \quad (d(\Psi) < \infty),$$

従って上式と (4.3.5) により

$$(4.3.7) \quad \Gamma''_{\langle\Phi,\Psi\rangle} = \emptyset \quad (d(\Psi) < \infty)$$

となる. 以上を纏めて述べる:

定理 4.3.8. Ψ が非強凸 (即ち, $d(\Psi) < \infty$) ならば

$$(4.3.9) \quad \begin{cases} \Gamma'_{\langle\Phi,\Psi\rangle} = \Gamma_{\langle\Phi,\Psi\rangle} \neq \emptyset, \\ \Gamma''_{\langle\Phi,\Psi\rangle} = \emptyset. \end{cases}$$

次いで Ψ は強凸 (即ち, $d(\Psi) = \infty$) と仮定する. 従って Φ と Ψ が特異対 $\langle\Phi,\Psi\rangle$ をなすのだから, Φ も Ψ も共に強凸である. 定理 4.2.6 の大外枠数列として $\langle\Phi,\Psi\rangle$ 大外枠数列 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ をとり, 強凸函数 Ξ として $\Xi = \Psi$ を取るならば, 定理 4.2.6 で構成された $E \in \Gamma$ は, 前に見たとおり, $E \in \Gamma_{\langle\Phi,\Psi\rangle}$ であり, その上前は単なる邪魔者であった (4.2.11): $\Xi(-\log a_n)m_n(C(a_n)) \geq n$ ($n \in \mathbb{N}$) が $\Xi = \Psi$ で成り立つのだから, E に対して

$$\Psi(-\log a_n)m_n(C(a_n)) \geq n \quad (n \in \mathbb{N})$$

が成り立つ. よって

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \Psi(-\log a_n)m_n(C(a_n)) = \infty$$

となって, E は条件 (Ψ.2) を成り立たせぬ故 E は反 (Ψ.2) 型であり, この E は $E \in \Gamma''_{\langle\Phi,\Psi\rangle}$ となり, $\Gamma''_{\langle\Phi,\Psi\rangle} \neq \emptyset$ がわかる. こうして

定理 4.3.10. Ψ が強凸 (即ち, $d(\Psi) = \infty$) ならば

$$(4.3.11) \quad \begin{cases} \Gamma'_{\langle\Phi,\Psi\rangle} = ?, \\ \Gamma''_{\langle\Phi,\Psi\rangle} \neq \emptyset. \end{cases}$$

上記 $\Gamma'_{\langle\Phi,\Psi\rangle} = ?$ の意味は, $\Gamma'_{\langle\Phi,\Psi\rangle} = \emptyset$ であるか又は $\Gamma'_{\langle\Phi,\Psi\rangle} \neq \emptyset$ であるかのいずれであるかの判定が現時点では筆者達には出来ないでいるということである. いずれにしろ, これは非常に重要な絶対に解決さるべき研究問題である:

課題 4.3.12. 予想 (期待) $\Gamma'_{\langle\Phi,\Psi\rangle} \neq \emptyset$ ($d(\Psi) = \infty$) は正しいか?

5. Hardy-Orlicz 空間の単純構造

本第 5 節に於いては, 中心 0 の環状集合 $E \in \Gamma_{\langle\Phi,\Psi\rangle}$ の補集合領域 $\hat{\mathbb{C}} \setminus E \subset \hat{\mathbb{C}}$ を定義域とする夫々ノルム Φ 及び Ψ である二つの Hardy-Orlicz 空間 $H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ 及び $H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ を縮退又は非縮退の両視点から眺める. 前者については, その縮退性: $H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) = \mathbb{C}$ の成否について, 後者については, その非縮退性を, $A(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$ の最簡の非定数正則函数と看做される $1/z$ の $H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ への所属性: $1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ の成否で考える.

先ず最初に小節 5.1 で $H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) = \mathbb{C}$ ($E \in \Gamma_\Phi$) を示す. 従って, $\Gamma_{\langle\Phi,\Psi\rangle} \subset \Gamma_\Phi$ だから $H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ ($E \in \Gamma_{\langle\Phi,\Psi\rangle}$) は縮退性を持つ: $H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) = \mathbb{C}$ ($E \in \Gamma_{\langle\Phi,\Psi\rangle}$).

$1/z$ の $H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ ($E \in \Gamma_{\langle\Phi,\Psi\rangle}$) への所属性については, Ψ が de la Vallée-Poussin 条件: $d(\Psi) := \lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t)/t = \infty$ を満た

すか否かに深くかかわる. 小節 5.2 に於いては, Ψ が非強凸 (即ち, $d(\Psi) < \infty$) ならば常に $1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ ($E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$) であることを見る.

次いで小節 5.3 に於いては, Ψ は今度は強凸 (即ち, $d(\Psi) = \infty$) として, $1/z \notin H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ となる $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ の存在が例示される. 実は, Hasumi による重要な論文 [4](次節 6 参照) に於いては, de la Vallée-Poussin 条件にかかわらず常に “ $1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ ($E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$)” であることが主張されている. せめて $1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ となる $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ の存在が言えたら, とにかく本質的には問題無しとなるのであるが, この存在非存在の決定は全然出来ていない. しかし $1/z \notin H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ となる $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ の構成には, この E の外枠数列 $(a_n)_{n=0}^\infty$ が急減少でなくてはならず, 急減少ならいくらかでも急減少でも構わないと言う状況で達成される. また $E \in \Gamma$ が $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ となるためにも同様な状況でないといけない. これからして, $1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ となる $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ の構成に於いては反対に $(a_n)_{n=0}^\infty$ が緩減少でなくてはならず, これと $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ 構成のための $(a_n)_{n=0}^\infty$ の急減少性との相剋故に $1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ となる $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ の構成はとても困難で, 不可能かとの感触さえ持ちたくなるが, 安全のため, 本当の所は不明と今の所述しておくよりない.

5.1. 零族例.

Φ を許容凸関数とする. Φ をノルムにも持つ Hary-Orlicz 空間の定義域が領域 $W \subset \hat{\mathbb{C}}$ のとき, それは $H^\Phi(W)$ と記されるが, $H^\Phi(W) = \mathbb{C}$ となる様な W の全体が平面領域の零族 \mathcal{O}_Φ である. $E \in \Gamma$ を採るとき $\hat{\mathbb{C}} \setminus E \in \mathcal{O}_\Phi$ となる様な $E \in \Gamma$ の全体は Γ のどんな部分族を作るかは, それなりに遣り甲斐のある大事な問題である. ここではその方向に沿う一結果として, 更に Φ を強凸と仮定するとき, 次の本質的には Hasumi による事実である

$$(5.1.1) \quad \hat{\mathbb{C}} \setminus E \in \mathcal{O}_\Phi \quad (E \in \Gamma_\Phi)$$

を後述する定理 5.1.10 として証明を与えたい. Γ_Φ よりさらに簡明で分かり易い Γ の部分族も色々考えられるが*, 本論文の主要考察である次節 6 の議論のため, 上の Γ_Φ 版がどうしても必要なので, これの例示には固執する. 本小節 5.1 では, だから, (5.1.1) 又は同じことであるが定理 5.1.10 の証明を与えるのであるが, 先ずそのための準備的考察から始める.

領域 $W \subset \hat{\mathbb{C}}$ が解析的 Jordan 曲線 γ を ∂W の一成分として持つとする. $\zeta \in W$ を計測点とする W の調和測度を ω とすると, $d\omega$ は γ 上の弧長測度 ds と相互に絶対連続の関係にあり, その Radon-Nikodym 密度 $d\omega/ds$ 及び $ds/d\omega$ は γ 上有界正值解析関数で, $(d\omega/ds) \cdot (ds/d\omega) = 1$ である. 何故なら, W の極 ζ の Green 関数を $g(z, \zeta)$ とすると, Poisson 型公式により

$$d\omega(z) = \frac{\partial}{\partial \nu_z} g(z, \zeta) ds \quad (z \in \gamma)$$

であることから明白である, 但し $\partial/\partial \nu_z$ は γ 上 W に関する内法線微分とする. これを, W として, 原点中心の同心円環

$$R(a, b) := \{a < |z| < b\} \quad (0 < a < b < \infty),$$

及び, 所謂, 環型領域

$$R(a, b; K) := \{a < |z|\} \setminus K \quad (0 < a < b < \infty),$$

但し, $K \subset \{b \leq |z|\}$ は有界閉集合で $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$ が連結なものとする, の夫々の場合に具体化した場合で, Radon-Nikodym の評価不等式が必要となる.

同心円環 $R(a, b)$ は内円 $C(a) := \{|z| = a\}$ と外円 $C(b) := \{|z| = b\}$ の間にある $R(a, b)$ の二分円 $C(\sqrt{ab})$ を持ち, これは等角不変対象である. その, $R(a, b)$ の二分円 $C(\sqrt{ab})$ の $R(a, b)$ に対する Harnack 定数 $k = k_{R(a, b)}$ は

$$(5.1.2) \quad k := \sup_{u \in h(R(a, b))^+ \setminus \{0\}} \frac{\max_{z \in C(\sqrt{ab})} u(z)}{\min_{z \in C(\sqrt{ab})} u(z)}$$

で与えられる, 但し, $h(W)$ は領域 W 上の調和関数全体の族で, $h(W)^+$ は $h(W)$ 内の非負関数の作る族とする. 簡単のため, k は $R(a, b)$ の Harnack 定数とも呼ぶことにする. Harnack の不等式により, $k \in (1, \infty)$ で, 無論, k は等角不変量である, 即ち, $R(a, b) \simeq R(a', b')$ (等角同値) ならば $k_{R(a, b)} = k_{R(a', b')}$ となる.

同心円環 $R(a, b)$ は 2 径数 $0 < a < b < \infty$ で決まるが, 1 径数 $1 < t < \infty$ で決まる特別な形の同心円環

$$R(t) := \left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} < |z| < \sqrt{t} \right\} \quad (1 < t < \infty)$$

* 付録 2 参照

を考える. $R(t)$ の二分円は $C(\sqrt{(1/\sqrt{t}) \cdot \sqrt{t}})$, 即ち, t にかかわらず同一の単位円周 $C(1)$ である. $R(t)$ は t が 1 から増加して ∞ に到る間に極薄円環 “ $\{1 - 0 < |z| < 1 + 0\}$ ” から出発して極厚円環 “ $\{+0 < |z| < \infty\}$ ” までを, 単位円周内外に等角的に広がる円環

$$R(1/\sqrt{t}, 1) \cup C(1) \cup R(1, \sqrt{t})$$

として増加する橋を形成する. $R(t)$ の Harnack 定数を $A_1 = A_1(t) (1 < t < \infty)$ と記せば (5.1.2) の再記だけけれど

$$(5.1.3) \quad A_1(t) = \sup_{u \in h(R(t))^+ \setminus \{0\}} \frac{\max_{z \in C(1)} u(z)}{\min_{z \in C(1)} u(z)}$$

である. $t \in (1, \infty)$ が増加すれば上にも見た通り領域 $R(t)$ は増加するので, $h(R(t))^+$ は減少故それに関する上限部分は非増加なので, $A_1(t)$ 自身 $(1, \infty)$ 上非増加なることが分かる. 結局の所, いずれも小考の要はあるけれど

$$(5.1.4) \quad \begin{cases} A_1(t) \text{ は } (1, \infty) \text{ 上の減少関数で } 1 < A_1(t) < \infty; \\ \lim_{t \downarrow 1} A_1(t) = \infty; \\ \lim_{t \uparrow \infty} A_1(t) = 1 \end{cases}$$

となることが分かる. 実の所, $1 < A_1(t) < \infty (1 < t < \infty)$ 以上は必要ないけれど, $A_1(t)$ の t に対する変化状態の認識は無駄とは思われない.

伸縮拡大変換である等角写像 $z \mapsto \varphi(t) := z/\sqrt{ab}$ により 2 径数円環 $R(a, b) (0 < a < b < \infty)$ は 1 径数円環 $R(t) (t = b/a)$ に等角同型である:

$$(5.1.5) \quad R(a, b) \simeq R(t) \quad (0 < a < b < \infty, t = b/a).$$

これを円環 $R(a, b)$ の 1 径数表示と言ひ, $t = b/a$ を $R(a, b)$ の固有径数 (ついでながら, $\log t = \log(b/a)$ を $R(a, b)$ の **modulus**) と言ふ. よって, $R(a, b)$ の二分円 $C(\sqrt{ab})$ の $R(a, b)$ に関する Harnack 定数, 即ち $R(a, b)$ の Harnack 定数の次の表示が得られる:

$$(5.1.6) \quad R(a, b) \text{ の Harnack 定数 } k_{R(a, b)} = A_1\left(\frac{b}{a}\right).$$

上に導入した定数 A_1 を使って, $R(a, b)$ 及び $R(a, b; K)$ の調和測度の弧長測度に関する密度評価式を与える. 最初同心円環 $R(a, b) (0 < a < b < \infty)$ の計測点 $w \in C(\sqrt{ab})$ の調和測度を ξ_w と記し, $\partial R(a, b) = C(a) \cup C(b)$ 上の弧長測度を ds とするとき評価式

$$(5.1.7) \quad \frac{d\xi_w}{ds}(z) \leq \begin{cases} A_1\left(\frac{b}{a}\right) \frac{1}{4\pi a} & (z \in C(a)) \\ A_1\left(\frac{b}{a}\right) \frac{1}{4\pi b} & (z \in C(b)) \end{cases}$$

が成立することが分かる.*

次に環型領域 $R(a, b; K) := \{a < |z|\} \setminus K (0 < a < b < \infty, K \text{ は } \{b \leq |z| < \infty\} \text{ 内の有界閉集合で非極で } \hat{\mathbb{C}} \setminus K \text{ は連結とする})$ の計測点 ∞ の調和測度を η とする. 上で用いた定数 A_1 から定まる定数 A を

$$(5.1.8) \quad A = A\left(\frac{b}{a}\right) := 2 \left(A_1\left(\frac{b}{a}\right) \right)^2$$

と導入したとき, $\partial R(a, b; K)$ の成分 $C(a)$ 上の弧長測度を ds とするとき評価式

$$(5.1.9) \quad \max_{z \in C(a)} \frac{ds}{d\eta}(z) \leq A\left(\frac{b}{a}\right) \min_{z \in C(a)} \frac{ds}{d\eta}(z) \leq A\left(\frac{b}{a}\right) \frac{2\pi a}{\eta(C(a))}$$

が成立する. 実際は $\{b \leq |z| < \infty\}$ の完閉かつ非極な完全非連結集合を K として取ったとき上式を適用することになる.

本小節冒頭に述べた (5.1.1) の成立理由を示すとき, 即ち, 次の定理 5.1.10 の証明に於いて, (5.1.7) 及び (5.1.9) の二評価式

* 評価式 (5.1.7) 及び下の (5.1.9) の証明は Hasumi[4, 6] に与えられている. 別視点からの証明を本講の付録 1 で与える.

が使われる。

定理 5.1.10. Φ は許容凸関数で強凸とする。 $E \in \Gamma_\Phi$ であれば領域 $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$ 上の Φ をノルムとする Hardy-Orlicz 空間 $H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ は自明である:

$$(5.1.11) \quad H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) = \mathbb{C} \quad (E \in \Gamma_\Phi).$$

証明.* 定理 4.3.3 で見た通り $\Gamma_\Phi \neq \emptyset$ なので, 例示すべき $E \in \Gamma_\Phi$ は確かに存在する. このことは, 無論, 極めて重要なことである. 証明は背理法で行う. それで, 空間 $H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ ($E \in \Gamma_\Phi$) が定数関数以外の関数 $f \in H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) \setminus \mathbb{C}$ を含むと仮定して矛盾が出ることを言えば良い. Hardy-Orlicz 空間の定義により, さすれば, f は $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$ ($\hat{\mathbb{C}}_0 := \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$) 上正則であり, $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$ 上の正值調和関数 $u \in h(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)^+$ があって

$$(5.1.12) \quad \Phi(\log^+ |f(z)|) \leq u(z) \quad (z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus E)$$

となっている. これが背理法の仮定である.

E の外枠定数 $0 < \rho < \delta < 1$ に加えて, 新たに定数 σ を

$$(5.1.13) \quad \sigma := (\delta/\rho)^{1/4} \in (1, \infty)$$

により導入する. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $a_n \leq \rho a_{n-1}$ なので, 順次 $\delta a_n \leq \delta \rho a_{n-1}$, $(\delta/\rho)a_n \leq \delta a_{n-1}$, 次いで $\sigma^4 a_n \leq \delta a_{n-1}$ となる: $a_n < \sigma^4 a_n \leq \delta a_{n-1}$. それ故に

$$\{a_n < |z| < \sigma^4 a_n\} \subset \{a_n < |z| < \delta a_{n-1}\} \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus E \quad (n \in \mathbb{N})$$

である. 最終的には, 自明な $n = 0$ の場合を加えて

$$(5.1.14) \quad \{a_n < |z| < \sigma^4 a_n\} \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus E \quad (n \in \mathbb{Z}^+ := \{0\} \cup \mathbb{N})$$

である. そこで $B_n := \{\sigma^2 a_{n+1} < |z| < \sigma^2 a_n\} \supset E_n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) に注意すれば, $B_n \setminus E_n \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus E$ だから, $E_n \in \mathcal{N}_\Phi$ により

$$f \in H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) \subset H^\Phi(B_n \setminus E_n) = H^\Phi(B_n) \quad (n \in \mathbb{Z}^+),$$

即ち, $f \in H^\Phi(B_n) \subset A(B_n)$ はどの $E_n \subset B_n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$), 従って $E \setminus \{0\}$ のどの点にも特異点を持たぬから, $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ 上正則となる:

$$(5.1.15) \quad f \in A(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}).$$

従って, $\infty^{-j} = 0$ ($j \in \mathbb{N}$) 及び $\infty^{-0} = 1$ と解して, f は $1/z$ の冪級数展開を持つ:

$$(5.1.16) \quad f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^{-j} \quad ((0 < |z| \leq \infty)).$$

同心円環 $R(a_n, \sigma^2 a_n) = \{a_n < |z| < \sigma^2 a_n\}$ の二分円 $C(\sigma a_n)$ の上の点 w を計測点とする $R(a_n, \sigma^2 a_n)$ の調和測度を ξ_w と記すと (5.1.7) の再記であるが

$$(5.1.17) \quad \frac{d\xi_w}{ds}(z) \leq \begin{cases} A_1/(4\pi a_n) & (z \in C(a_n)), \\ A_1/(4\pi \sigma^2 a_n) & (z \in C(\sigma^2 a_n)), \end{cases}$$

但し, $A_1 = A_1(\sigma^2 a_n/a_n) = A_1(\sigma^2)$ は二分円 $C(\sigma a_n)$ の $R(a_n, \sigma^2 a_n)$ に対する Harnack 定数である. (5.1.15) により, $\log^+ |f(z)|$ と共に

$$V(z) := \Phi(\log^+ |f(z)|)$$

は $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ 上の非負値連続劣調和関数である. よって $R := R(a_n, \sigma^2 a_n)$ の二分円 $C(\sigma a_n)$ 上の点 w に対し

$$\log^+ |f(w)| \leq \int_{\partial R} \log^+ |f(\zeta)| d\xi_w(\zeta) \quad (w \in C(\sigma a_n))$$

* 論証検討のため, Hasumi[4, 6] の方法を完全踏襲する. 別視点からの証明へのアプローチについては, 付録 2 参照.

が得られる. ξ_w は確率測度だから上不等式の両辺の Φ をとるとき, Jensen の不等式が合法だから

$$(5.1.18) \quad \begin{aligned} \Phi(\log^+ |f(w)|) &\leq \int_{\partial R} \Phi(\log^+ |f(\zeta)|) d\xi_w(\zeta) \\ &\leq \left(\int_{C(a_n)} + \int_{C(\sigma^2 a_n)} \right) \Phi(\log^+ |f(\zeta)|) d\xi_w(\zeta) = \text{I} + \text{II} \end{aligned}$$

となる, 但し, I (又は II) は上の $C(a_n)$ (又は $C(\sigma^2 a_n)$) に沿う積分の項とする.

先ず I の評価から始める. 環型領域

$$R_1 := R(a_n, \sigma^2 a_n; \cup_{j=0}^{n-1} E_j)$$

に注目する. R_1 の計測点 ∞ の調和測度を η_1 とする (後程述べ, しかも必要となることであるが, η_1 は E の随伴近似調和測度列の第 n 項 m_n そのものである). すると (5.1.9) の再記に過ぎないが

$$(5.1.19) \quad \max_{z \in C(a_n)} \frac{ds}{d\eta_1}(z) \leq A \min_{C(a_n)} \frac{ds}{d\eta_1}(z) \leq A \frac{2\pi a_n}{\eta_1(C(a_n))},$$

但し, $A = A(\sigma^2 a_n/a_n) = A(\sigma^2) = 2(A_1(\sigma^2))^2$ である. さて記号簡単化の目的で, $\Phi(\log^+ |f|) = V$ と記すことにしたので

$$\text{I} = \int_{C(a_n)} V(\zeta) d\xi_w(\zeta) = \int_{C(a_n)} V(\zeta) \frac{d\xi_w(\zeta)}{ds}(\zeta) \frac{ds}{d\eta_1}(\zeta) d\eta_1(\zeta)$$

と書ける. (5.1.17) と (5.1.19) によれば

$$(5.1.20) \quad \begin{aligned} \text{I} &\leq \int_{C(a_n)} V(\zeta) \frac{A_1(\sigma^2)}{4\pi a_n} \cdot 2(A_1(\sigma^2))^2 \frac{2\pi a_n}{\eta_1(C(a_n))} d\eta_1(\zeta) \\ &= \frac{(A_1(\sigma^2))^3}{\eta_1(C(a_n))} \int_{C(a_n)} V(\zeta) d\eta_1(\zeta) \end{aligned}$$

である. $u_1 \in C(\partial R_1)$ を $u_1|_{C(a_n)} = u|_{C(a_n)}$ かつ $u_1|_{(\partial R_1 \setminus C(a_n))} = 0$ で定義すると $C(a_n)$ 上 $V \leq u_1 = u$ であるから

$$(5.1.21) \quad \int_{C(a_n)} V(\zeta) d\eta_1(\zeta) \leq \int_{C(a_n)} u_1(\zeta) d\eta_1(\zeta) = H_{u_1}^{R_1}(\infty) \leq u(\infty)$$

となり, (5.1.20) と合せて次の評価式を得る:

$$(5.1.22) \quad \text{I} \leq \frac{(A_1(\sigma^2))^3 u(\infty)}{\eta_1(C(a_n))}.$$

次に II の評価に転ずる. 殆んど I の評価と並行的である. 環型領域

$$R_2 := R(\sigma^2 a_n, \sigma^4 a_n; \cup_{j=0}^{n-1} E_j)$$

に注目する. R_2 の計測点 ∞ の調和測度を η_2 とすると上同様 (5.1.9) の再記に過ぎないが

$$(5.1.23) \quad \max_{z \in C(\sigma^2 a_n)} \frac{ds}{d\eta_2}(z) \leq A \min_{z \in C(\sigma^2 a_n)} \frac{ds}{d\eta_2}(z) \leq A \frac{2\pi \sigma^2 a_n}{\eta_2(C(\sigma^2 a_n))},$$

但し, $A = A(\sigma^4 a_n/(\sigma^2 a_n)) = A(\sigma^2) = 2(A_1(\sigma^2))^2$ である. 前同様 $\Phi(\log^+ |f(\zeta)|) = V(\zeta)$ として

$$\text{II} = \int_{C(\sigma^2 a_n)} V(\zeta) d\xi_w(\zeta) = \int_{C(\sigma^2 a_n)} V(\zeta) \frac{d\xi_w(\zeta)}{ds}(\zeta) \frac{ds}{d\eta_2}(\zeta) d\eta_2(\zeta)$$

と書ける. (5.1.17) と (5.1.23) によれば

$$(5.1.24) \quad \begin{aligned} \text{II} &\leq \int_{C(\sigma^2 a_n)} V(\zeta) \frac{A_1(\sigma^2)}{4\pi \sigma^2 a_n} \cdot 2(A_1(\sigma^2))^2 \frac{2\pi \sigma^2 a_n}{\eta_2(C(\sigma^2 a_n))} d\eta_2(\zeta) \\ &= \frac{(A_1(\sigma^2))^3}{\eta_2(C(\sigma^2 a_n))} \int_{C(\sigma^2 a_n)} V(\zeta) d\eta_2(\zeta) \end{aligned}$$

である. $u_2 \in C(\partial R_2)$ を $u_2|_{C(\sigma^2 a_n)} = u|_{C(\sigma^2 a_n)}$ かつ $u_2|_{(\partial R_2 \setminus C(\sigma^2 a_n))} = 0$ と定義すると $C(\sigma^2 a_n)$ 上 $V \leq u_2 = u$ であるから

$$\int_{C(\sigma^2 a_n)} V(\zeta) d\eta_2(\zeta) \leq \int_{C(\sigma^2 a_n)} u_2(\zeta) d\eta_2(\zeta) = H_{u_2}^{R_2}(\infty) \leq u(\infty)$$

となり, (5.1.24) と合せて, 次の評価式を得る:

$$(5.1.25) \quad \Pi \leq \frac{(A_1(\sigma^2))^3 u(\infty)}{\eta_2(C(\sigma^2 a_n))}.$$

だから, (5.1.10) と (5.1.22) 及び (5.1.25) の三者から次の評価式が従う:

$$(5.1.26) \quad \Phi(\log^+ |f(w)|) \leq \left(\frac{1}{\eta_1(C(a_n))} + \frac{1}{\eta_2(C(\sigma^2 a_n))} \right) (A_1(\sigma^2))^3 u(\infty) \quad (w \in C(\sigma a_n)).$$

さて $R_1 \supset R_2$ に注目する. $\varphi_j \in C(\partial R_j)$ ($j = 1, 2$) として, 先ず $\varphi_1|_{C(a_n)} = 1$, $\varphi_1|_{(\partial R_1 \setminus C(a_n))} = 0$ で φ_1 を定め, $\varphi_2|_{C(\sigma^2 a_n)} = 1$, $\varphi_2|_{(\partial R_2 \setminus C(\sigma^2 a_n))} = 0$ で φ_2 を定めるとき

$$\eta_1(C(a_n)) = H_{\varphi_1}^{R_1}(\infty), \quad \eta_2(C(\sigma^2 a_n)) = H_{\varphi_2}^{R_2}(\infty)$$

である. $0 \leq H_{\varphi_j}^{R_j} \leq 1$ ($j = 1, 2$) で, $H_{\varphi_1}^{R_1}|_{C(\sigma^2 a_n)} \leq 1 = H_{\varphi_2}^{R_2}|_{C(\sigma^2 a_n)}$ であり, $\gamma := \partial R_1 \setminus C(a_n) = \partial R_2 \setminus C(\sigma^2 a_n)$ とおくと $H_{\varphi_1}^{R_1}|_{\gamma} = H_{\varphi_2}^{R_2}|_{\gamma} = 0$ であることから最大値の原理により

$$H_{\varphi_1}^{R_1}(z) \leq H_{\varphi_2}^{R_2}(z) \quad (z \in R_2)$$

が分かり, よってこれを特に ∞ で考えたら, $\eta_1(C(a_n)) \leq \eta_2(C(\sigma^2 a_n))$ である. これと (5.1.26) より

$$\Phi(\log^+ |f(w)|) \leq \frac{2(A_1(\sigma^2))^3 u(\infty)}{\eta_1(C(a_n))} \quad (w \in C(\sigma a_n))$$

が導出される. η_1 は $\{a_n < |z|\} \setminus \cup_{j=0}^{n-1} E_j$ の計測点 ∞ の調和測度故, E の随伴近似調和測度列 $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ の第 n 項 m_n に他ならないので, 上記不等式は

$$(5.1.27) \quad \Phi(\log^+ |f(w)|) \leq \frac{2(A_1(\sigma^2))^3 u(\infty)}{m_n(C(a_n))} \quad (w \in C(\sigma a_n))$$

の形となる. ここで, $m_n(C(a_n)) \geq m(E_n)$ に注意する. これは $m_n(C(a_n))$ と $m(E_n)$ 夫々の対応する Dirichlet 解の比較から直ちに了解出来る所あった (小節 2.1 参照). 更に

$$(4.1.2) : d \leq \Phi(-\log(na_n)) m(E_n) \leq 1$$

を想起する. $-\log(na_n) \leq -\log a_n$ と $m(E_n) \leq m_n(C(a_n))$ 及び上記陳列不等式より

$$d \leq \Phi(-\log(na_n)) m(E_n) \leq \Phi(-\log a_n) m_n(C(a_n))$$

であるから

$$\frac{1}{m_n(C(a_n))} \leq \frac{\Phi(-\log a_n)}{d}$$

となる. そこで $L := 2(A_1(\sigma^2))^3 u(\infty)/d$ で定める正定数 L を用いると, (5.1.27) より更に

$$\Phi(\log^+ |f(w)|) \leq 2(A_1(\sigma^2))^3 u(\infty) \cdot \frac{1}{m_n(C(a_n))} \leq 2(A_1(\sigma^2))^3 u(\infty) \cdot \frac{\Phi(-\log a_n)}{d}$$

であるから, 結局次式が得られる: 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$(5.1.28) \quad \Phi(\log^+ |f(w)|) \leq L\Phi(-\log a_n) \quad (w \in C(\sigma a_n)).$$

ここで上記不等式 (5.1.28) から $|f(w)|$ ($w \in C(\sigma a_n)$) の a_n による評価式を導く目的で次の簡単な不等式を用意する. 先ず

$$t_0 := \inf\{t \in \mathbb{R}^+ : \Phi(t) > 0\}$$

とおく. $\Phi(t)$ の許容凸条件により $0 \leq t_0 < \infty$ となり, (t_0, ∞) 上の t の函数 $\Phi(t)/t$ は単調増加函数で, $t \mapsto \Phi(t)/t : (t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ は全単射である. なので, 次の不等式が成り立つ:

$$(5.1.29) \quad \frac{t_1}{t_2} \leq 1 + \frac{\Phi(t_1)}{\Phi(t_2)} \quad (t_1 \geq 0, t_2 > t_0).$$

成立理由を述べる. $t_1 \leq t_2$ ならば $t_1/t_2 \leq 1$ だから $\Phi(t_1)/\Phi(t_2)$ が意味ある限り, 従って, 更に $t_2 > t_0$ なら, $t_1/t_2 \leq 1 \leq 1 + \Phi(t_1)/\Phi(t_2)$ で, 上不等式 (5.1.29) は確かに成立する. もし, $t_2 \leq t_1$ ならば, 更に $t_2 > t_0$ なら, 従って, $t_0 < t_2 \leq t_1$ ならば, $t \mapsto \Phi(t)/t$ の (t_0, ∞) 上の増加性により, $\Phi(t_2)/t_2 \leq \Phi(t_1)/t_1$ だから順次 $t_1/t_2 \leq \Phi(t_1)/\Phi(t_2) \leq 1 + \Phi(t_1)/\Phi(t_2)$ となり, 矢張り上記不等式の成立を見る. 以上が理由である.

さて本筋の (5.1.28) へ帰る. $-\log a_n \nearrow \infty$ ($n \nearrow \infty$) なので

$$N_0 := \inf\{n \in \mathbb{N} : -\log a_n > t_0\} \in \mathbb{N}$$

が定まる. すると $n \geq N_0$ なら $-\log a_n > t_0$ かつ $\Phi(-\log a_n) > 0$ であり, 従って, (5.1.28) と (5.1.29), 及び N_0 の定義により, $n \geq N_0$ ならば

$$\frac{\log^+ |f(w)|}{-\log a_n} \leq 1 + \frac{\Phi(\log^+ |f(w)|)}{\Phi(-\log a_n)} \leq 1 + L \quad (w \in C(\sigma a_n))$$

となる. 従って, すべての $n \geq N_0$ に対し, 次の評価式が導出される:

$$(5.1.30) \quad |f(w)| \leq a_n^{-L-1} \quad (w \in C(\sigma a_n)).$$

上式 (5.1.30) を用いて, $f \in A(\hat{C}_0)$ ($\hat{C}_0 = \hat{C} \setminus \{0\}$) の決定に進む. そこで先ず (5.1.16) に立ち返る: $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^{-j}$ ($0 < |z| < \infty$). すると

$$c_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(\sigma a_n)} f(z) z^{j-1} dz \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

だから, (5.1.30) を使って

$$|c_j| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=\sigma a_n} |f(z)| |z|^j \left| \frac{dz}{z} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=\sigma a_n} a_n^{-L-1} (\sigma a_n)^j d \arg z = \sigma^j a_n^{j-L-1}$$

となる. 即ち, 各 $j = 0, 1, 2, \dots$ に対し

$$|c_j| \leq \sigma^j a_n^{j-L-1}$$

が得られる. $j > L+1$ ならば, $a_n \searrow 0$ ($n \nearrow \infty$) なので, $c_j = 0$ ($j > L+1$) が結論される. そこで

$$p := \sup\{j \in \{0\} \cup \mathbb{N} : c_j \neq 0\}$$

となる $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ が定まるが, f は定数函数でないとして仮定していたから $p = 0$ は除外されるので $p \in \mathbb{N}$ であって, その故に f は次の如き z^{-1} の p 次多項式の形を持つことが分かる:

$$(5.1.31) \quad f(z) = \sum_{j=0}^p c_j z^{-j}, \quad c_p \neq 0 \quad (p \geq 1).$$

$f(z)$ は z^{-1} の p 次多項式 ($p \geq 1$) なので, $z = 0$ の近傍に於いては, 大雑把には, 主要項 $c_p z^{-p}$ に支配される. 即ち,

$$f(z) = c_p z^{-p} \left(1 + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{c_{p-j}}{c_p} z^j \right).$$

$|f(z)|$ を下から $|c_p z^{-p}|$ で評価する目的で

$$|f(z)| = |c_p z^{-p}| \cdot \left| 1 + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{c_{p-j}}{c_p} z^j \right| \geq |c_p| |z|^{-p} \left(1 - \sum_{j=1}^{p-1} \left| \frac{c_{p-j}}{c_p} \right| |z^j| \right)$$

と見て, $1 - \sum_{j=1}^{p-1} \left| \frac{c_{p-j}}{c_p} \right| |z^j| \nearrow 1$ ($z \rightarrow 0$) に注意すれば, $0 < \varepsilon_0 < 1$ で

$$1 - \sum_{j=1}^{p-1} \left| \frac{c_{p-j}}{c_p} \right| |z^j| \geq \frac{1}{2} \quad (|z| < \varepsilon_0)$$

となる ε_0 を定めることが出来る. よって下に示す $|f(z)|$ の $|c_p||z|^{-p}$ による下からの評価式が出る:

$$(5.1.32) \quad |f(z)| \geq \frac{1}{2} |c_p| |z|^{-p} \quad (|z| < \varepsilon_0).$$

ここで, $N_0 \leq N_1$ である N_1 を十分大きくとれば

$$|a_n| \leq \varepsilon_0, \quad \frac{1}{2} |c_p| \geq \frac{1}{n} \quad (n \geq N_1)$$

となる. かかる N_1 を一つ固定する. すると $N_1 \leq n \in \mathbb{N}$ ならば $2^{-1}|c_p| \geq n^{-1}$ かつ $a_n \geq a_n^p$ となる. これより順次 $2^{-1}|c_p|a_n \geq n^{-1}a_n^p$, $2^{-1}|c_p|a_n^{-p} \geq n^{-1}a_n^{-1}$, $\log(2^{-1}|c_p|a_n^{-p}) \geq -\log(na_n)$, そして

$$\Phi\left(\log\left(\frac{1}{2}|c_p|a_n^{-p}\right)\right) \geq \Phi(-\log(na_n)) \quad (n \geq N_1)$$

となることが分かる. こうして最終的には次の評価式が得られる:

$$(5.1.33) \quad \frac{\Phi\left(\log\left(\frac{1}{2}|c_p|a_n^{-p}\right)\right)}{\Phi(-\log(na_n))} \geq 1 \quad (n \geq N_1).$$

ここからいよいよ証明は最終段階に入る. 以下, 先ず下に述べる不等式 (5.1.34) と次いで同じくその下に述べる等式 (5.1.35) を提示し, これら二式が互いに相矛盾することで背理法が完結すると言うのが, これからの進行の予定である.

最初, 一般判定定理 (定理 3.2.1) を想起する: $g \in A(\hat{\mathbb{C}}_0)$ が $g \in H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ となるための必要十分条件は, 次の二条件が同時に成立する事であった:

$$\begin{cases} (3.2.2) : \int_E \Phi(\log^+ |g(z)|) dm(z) < \infty, \\ (3.2.3) : \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{C(a_n)} \Phi(\log^+ |g(z)|) dm_n(z) < \infty. \end{cases}$$

さすれば, 最初, 非定数の $f \in H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ を取ったのであるが, これが

$$(5.1.5) : f \in A(\hat{\mathbb{C}}) \setminus \mathbb{C}$$

を満たすことは確認済みで, これが $f \in H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ を満たすのであるから, 一般判定定理により, f はとにかく上の (3.2.2) を満たさねばならぬ故

$$(5.1.34) \quad \int_E \Phi(\log^+ |f(z)|) dm(z) < \infty$$

が成立する (本当は大変難しい条件である (3.2.3) は, ここには何の関与もせぬ).

上記 (5.1.34) の積分を J , その被積分函数を従前通り V と記す. $V(z) \geq 0$ ($z \in \hat{\mathbb{C}}_0$) だから $E \supset \bigcup_{n=N_1}^{\infty} E_n$ より

$$J = \int_E V(z) dm(z) \geq \int_{\bigcup_{n=N_1}^{\infty} E_n} V(z) dm(z) = \sum_{n=N_1}^{\infty} \int_{E_n} V(z) dm(z)$$

となる. $z \in E_n$ ($n \geq N_1$) なら $|z| \leq a_n$ ($n \geq N_1$) 故 N_1 の定義から $|z| (\leq a_n) \leq \varepsilon_0$ より, (5.1.32) から $n \geq N_1$ のとき

$$V(z) = \Phi(\log^+ |f(z)|) \geq \Phi(\log(\frac{1}{2}|c_p||z|^{-p})) \quad (z \in E_n)$$

である. それ故 $n \geq N_1$ のとき, $|z|^{-p} \geq a_n^{-p}$ ($z \in E_n$) だから

$$\begin{aligned} \int_{E_n} V(z) dm(z) &\geq \int_{E_n} \Phi\left(\log\left(\frac{1}{2}|c_p||z|^{-p}\right)\right) dm(z) \geq \int_{E_n} \Phi\left(\log\left(\frac{1}{2}|c_p|a_n^{-p}\right)\right) dm(z) \\ &= \Phi\left(\log\left(\frac{1}{2}|c_p|a_n^{-p}\right)\right) m(E_n) \quad (n \geq N_1) \end{aligned}$$

となる. (4.1.2): $d \leq \Phi(-\log(na_n)) m(E_n) \leq 1$ を使えば

$$m(E_n) \geq d \cdot \Phi(-\log(na_n))^{-1}$$

なので, (5.1.33) を援用して

$$\int_{E_n} V(z) dm(z) \geq \Phi\left(\log\left(\frac{1}{2}|c_p|a_n^{-p}\right)\right) m(E_n) \geq d \cdot \frac{\Phi\left(\log\left(\frac{1}{2}|c_p|a_n^{-p}\right)\right)}{\Phi(-\log(na_n))} \geq d$$

となる. だから $d_n := d$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_1$) と記せば

$$J \geq \sum_{n=N_1}^{\infty} \int_{E_n} V(z) dm(z) \geq \sum_{n=N_1}^{\infty} d_n = d \cdot \infty = \infty,$$

即ち, 次の計算結果が出た:

$$(5.1.35) \quad \int_E \Phi(\log^+ |f(z)|) dm(z) = \infty.$$

こうして, (5.1.34) と (5.1.35) の二式が導かれ, 矛盾が出たので背理法が完成して, (5.1.11) を主張する定理 5.1.10 の証明が完結する. \square

5.2. 順例.

前小節 5.1 に於いて, $\hat{C} \setminus E$ ($E \in \Gamma$) 上のノルム Φ の Hardy-Orlicz 空間 $H^\Phi(\hat{C} \setminus E)$ に定数空間 \mathbb{C} への縮退 $H^\Phi(\hat{C} \setminus E) = \mathbb{C}$ が起こる定義領域 $\hat{C} \setminus E$ の E を Γ の中に探した. 穴開き球面 $\hat{C}_0 := \hat{C} \setminus \{0\}$ 上の全正則函数空間 $A(\hat{C}_0)$ は z^{-1} の \hat{C}_0 上の収束巾級数空間として表示される:

$$A(\hat{C}_0) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n} : |c_n|^{1/n} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty) \right\}.$$

だから, その中の自明でない最簡正則函数は $1/z$ であると言って良い. そこで今度はその $1/z$ に関し, $1/z \in H^\Psi(\hat{C} \setminus E)$, 或いは $1/z \notin H^\Psi(\hat{C} \setminus E)$ となる様な E の例を Γ の中に求める.

この作業の基本指針として特殊判定定理 (定理 3.1.4) を想起する: Ψ を許容凸函数とするとき, $E \in \Gamma$ として, $1/z \in H^\Psi(\hat{C} \setminus E)$ となるための必要かつ十分条件は, 次の 2 条件 ($\Psi.1$) 及び ($\Psi.2$) が同時に満たされることである:

$$\begin{cases} (\Psi.1) : \int_E \Psi\left(\log^+ \left|\frac{1}{z}\right|\right) dm(z) < \infty, \\ (\Psi.2) : \sup_{n \in \mathbb{N}} \Psi(-\log a_n) m_n(C(a_n)) < \infty. \end{cases}$$

だから与えられた $E \in \Gamma$ が $1/z \in H^\Psi(\hat{C} \setminus E)$ となるものであるか否かの判定には ($\Psi.1$) と ($\Psi.2$) の 2 条件が満たされるか否かの確認を行えば良い. ($\Psi.2$) の正否は Ψ の強凸 ($d(\Psi) = \infty$) 或いは非強凸 ($d(\Psi) < \infty$) のいずれであるかに深くかわりその制御は容易でない. それに反して ($\Psi.1$) は 3 節でも見た通り相対的に操作し易い. 我々の目的にとって次の注意は有力である.

本小節では勿論記号 $\Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ を用いるときはいつも許容凸函数 Φ と Ψ は特異対 $\langle \Phi, \Psi \rangle$ をなしていることは前提とする. 更に $\Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle} \neq \emptyset$ の常時成立 ((4.3.2)) は忘れてはならない.

命題 5.2.1. 任意の許容凸函数 Ψ に対して (即ち, その強凸ないしは非強凸に拘らず), 任意の $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ は条件 ($\Psi.1$) を満たす.

証明. このためにお誂えの準備がある. それが定理 3.3.13 である: Ψ に対して次の 3 条件を満たす許容凸函数 Φ が用意されてあれば, $E := (\cup_{n=0}^{\infty} E_n) \cup \{0\}$ は ($\Psi.1$) を満たす, 即ち, 1^0 . $\langle \Phi, \Psi \rangle$ は特異対; 2^0 . $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ は $\langle \Phi, \Psi \rangle$ 大外枠数列;

$$3^0. \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \Phi(-\log(na_n)) m(E_n) < +\infty.$$

番号 (4.1.6) を付けて導入した $\Gamma_{\langle\Phi, \Psi\rangle}$ の定義に 1^0 と 2^0 はそのままの形で含まれている. 更にそれらの条件に含まれている (4.1.4): $d \leq \Phi(-\log(na_n))m(E_n) \leq 1$ ($n \in \mathbb{N}$) より 3^0 は自明に従う. だから $E \in \Gamma_{\langle\Phi, \Psi\rangle}$ は $(\Psi.1)$ を満たす. \square

命題 5.2.2. Ψ が非強凸 ($d(\Psi) < \infty$) ならば, 任意の $E \in \Gamma_{\langle\Phi, \Psi\rangle}$ は条件 $(\Psi.2)$ を満たす.

証明. 定理 4.3.8 によれば, 仮定 $d(\Psi) < \infty$ があると, (4.3.9): $\Gamma_{\langle\Phi, \Psi\rangle} = \Gamma'_{\langle\Phi, \Psi\rangle}$, 即ち, すべての $E \in \Gamma_{\langle\Phi, \Psi\rangle}$ は順 $(\Psi.2)$ 型, 即ち, すべての $E \in \Gamma_{\langle\Phi, \Psi\rangle}$ は条件 $(\Psi.2)$ を満たす. \square

定理 5.2.3. Ψ が非強凸 ($d(\Psi) < \infty$) のとき, 任意の $E \in \Gamma_{\langle\Phi, \Psi\rangle}$ に対して

$$\frac{1}{z} \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E).$$

証明. 特殊判定定理を念頭に置き, 命題 5.2.1 と 5.2.2 の両者を追加すれば良い. \square

系 5.2.4. Ψ が非強凸 ($d(\Psi) < \infty$) のとき, 任意の $E \in \Gamma_{\langle\Phi, \Psi\rangle}$ に対して

$$(5.2.5) \quad \begin{cases} H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) = \mathbb{C}, \\ \frac{1}{z} \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E). \end{cases}$$

証明. $\Gamma_{\langle\Phi, \Psi\rangle} \subset \Gamma_\Phi$ だから $E \in \Gamma_{\langle\Phi, \Psi\rangle}$ より $E \in \Gamma_\Phi$ 故定理 5.1.10 より $H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) = \mathbb{C}$ となり (5.2.5) の第 1 式が導かれる. 第 2 式は定理 5.2.3 から従う. \square

定理 5.2.6. Φ と Ψ が特異対 $\langle\Phi, \Psi\rangle$ をなし, Ψ が非強凸 ($d(\Psi) < \infty$) とすると

$$(5.2.7) \quad \mathcal{O}_\Psi < \mathcal{O}_\Phi \quad (\text{厳格包含}).$$

証明. $\langle\Phi, \Psi\rangle$ が特異対だから, 或る正数 $\alpha > 0$ があって, $\Psi(t) \leq \Phi(t) + \alpha$ ($0 \leq t < \infty$) となる. $f \in H^\Phi(W)$ ならば $\Phi(\log^+ |f|)$ は W 上調和優函数 u を持つので

$$\Psi(\log^+ |f(w)|) \leq \Phi(\log^+ |f(w)|) + \alpha \leq u(w) + \alpha \quad (w \in W)$$

となり $\Psi(\log^+ |f(w)|)$ は W 上調和優函数 $u + \alpha$ を持つことになるので $f \in H^\Psi(W)$ となり, $H^\Phi(W) \subset H^\Psi(W)$ ($\langle\Phi, \Psi\rangle$: 特異対) が従う. だから, もし $H^\Psi(W) = \mathbb{C}$, 即ち, $W \in \mathcal{O}_\Psi$ なら $H^\Phi(W) = \mathbb{C}$, 即ち, $W \in \mathcal{O}_\Phi$ となり, 単純包含関係

$$(5.2.8) \quad \mathcal{O}_\Psi \subset \mathcal{O}_\Phi \quad (\langle\Phi, \Psi\rangle: \text{特異対})$$

が成り立つ. そこで系 5.2.4 によれば, 任意の $E \in \Gamma_{\langle\Phi, \Psi\rangle}$ に対して, $\hat{\mathbb{C}} \setminus E \in \mathcal{O}_\Phi$ であるが, $1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ により $H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) = \mathbb{C}$ でないから $\hat{\mathbb{C}} \setminus E \notin \mathcal{O}_\Psi$, 即ち,

$$\hat{\mathbb{C}} \setminus E \in \mathcal{O}_\Phi \setminus \mathcal{O}_\Psi$$

となるのであるから, (5.2.8) は実は “ $\mathcal{O}_\Psi \subset \mathcal{O}_\Phi$ かつ $\mathcal{O}_\Psi \neq \mathcal{O}_\Phi$ ” の意味での厳格包含関係 $\mathcal{O}_\Psi < \mathcal{O}_\Phi$ としての (5.2.7) であることが分かる. \square

上の定理 5.2.6 の仮定に関連して, 次の念押し的な注意を述べる. 許容凸函数 Φ と Ψ が特異対 $\langle\Phi, \Psi\rangle$ を成すとき, 更に Ψ が非強凸 ($d(\Psi) < \infty$) であるか強凸 ($d(\Psi) = \infty$) であるかにより互いに本質的に異なる 2 状況が生ずる. 上記定理では前者が仮定されていた. 即ち, “ $\langle\Phi, \Psi\rangle$ が特異対かつ $d(\Psi) < \infty$ ” である. これは同じことながら心理的には格段に分かり易く気持ちの良い表現 “ $d(\Phi) = \infty$ かつ $d(\Psi) < \infty$ ” と言い換えることが出来る:

$$(5.2.9) \quad \begin{cases} \langle\Phi, \Psi\rangle: \text{特異対}, \\ d(\Psi) < \infty. \end{cases} \iff \begin{cases} d(\Phi) = \infty, \\ d(\Psi) < \infty. \end{cases}$$

この同値性の証明は既述通り (小節 1.1 及び (3.3.9) 参照) 簡単である. これによれば,

系 5.2.10 (定理 5.2.6 の言い換え 1). $d(\Phi) = \infty$ かつ $d(\Psi) < \infty$ のとき

$$\mathcal{O}_\Psi < \mathcal{O}_\Phi.$$

Ψ が非強凸 (即ち, $d(\Psi) < \infty$) ならば $H^\Psi = AB^*$ で $\mathcal{O}_\Psi = \mathcal{O}_{AB^*}$ なので (小節 1.1 参照), 同じことながら次の表現に従えば定理 5.2.6 の正体をずっと鮮明に把握させられることになる.

系 5.2.11 (定理 5.2.6 の言い換え 2). どんな強凸な許容凸函数 Φ に対しても

$$(5.2.12) \quad \mathcal{O}_{AB^*} < \mathcal{O}_\Phi \quad (d(\Phi) = \infty).$$

最後に今一つ定理 5.2.6 の系を追加する. Parreau は彼の有名な学位論文 [14] で次の厳格包含関係式を示した (Heins[8] も参照):

$$\mathcal{O}_{AB^*} < \bigcap_{0 < p < \infty} \mathcal{O}_p \quad (\text{一般 Riemann 面}).$$

種数無限大も許す一般開 Riemann 面の分類理論的零族に関する所を, 種数有限開 Riemann 面, 特に平面領域或いは球面領域の零族で既に成立することを示せば, これはまた逆の意味での一般化 (拡張) である. Hardy 族の零族問題 (分類理論) を上の Parreau の結果も含めて球面領域へ拡張する問題を提起したのが Heins の問題である ([8] 参照). 追加するという定理 5.2.6 の今一つの系は上の Parreau の結果の球面領域への拡張である:

系 5.2.13 (Parreau の包含関係式の拡張).

$$(5.2.14) \quad \mathcal{O}_{AB^*} < \bigcap_{0 < p < \infty} \mathcal{O}_p \quad (\text{球面領域}).$$

証明. $AB^* \supset H^p$ ($0 < p < \infty$) であったから $\mathcal{O}_{AB^*} \subset \mathcal{O}_p$ ($0 < p < \infty$) であるので

$$\mathcal{O}_{AB^*} \subset \bigcap_{0 < p < \infty} \mathcal{O}_p$$

となる. $\Psi(t) := t$ ($0 \leq t < \infty$) 及び $\Psi_0(t) := t^2$ ($0 \leq t < \infty$) で定める許容凸函数 Ψ と Ψ_0 に対しては $d(\Psi) < \infty$ 及び $d(\Psi_0) = \infty$ となる. 系 5.2.10 と系 5.2.11 によれば

$$\mathcal{O}_{AB^*} = \mathcal{O}_\Psi < \mathcal{O}_{\Psi_0}$$

が出る. 更に $0 < p < \infty$ として $\Phi_p(t) := e^{pt} - 1$ ($0 \leq t < \infty$) で強凸許容凸函数 Φ を定めるとき $\langle \Phi_p, \Psi_0 \rangle$ は特異対だから, 自明ながらとにかく

$$\mathcal{O}_{\Psi_0} \subset \mathcal{O}_{\Phi_p} = \mathcal{O}_p$$

となる. 従ってすべての $0 < p < \infty$ に対し

$$\mathcal{O}_{AB^*} < \mathcal{O}_{\Psi_0} \subset \mathcal{O}_p$$

が成り立つ. 故に

$$\mathcal{O}_{AB^*} < \mathcal{O}_{\Psi_0} \subset \bigcap_{0 < p < \infty} \mathcal{O}_p$$

が従い, 結局厳格包含関係 (5.2.14) が結論される. □

5.3. 反例.

前小節 5.2 で $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ に対し $1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ が成立するか否かを問題とし, $d(\Psi) < \infty$ ならば常に $1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ ($E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$) が成立することを見た. ならば, $d(\Psi) = \infty$ の場合にどうなるかの検討に進むのが順序である. いずれにしろ $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ である限り ($\Psi.1$) は成り立つのであるから $1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ の成否はこの E に対しての ($\Psi.2$) の成否に懸かっている (特殊判定定理 3.1.4 参照). 即ち, $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ が順 ($\Psi.2$) 型 (即ち, ($\Psi.2$) を成り立たせるもの) であるか反 ($\Psi.2$) 型 (即ち, ($\Psi.2$) を成り立たせぬもの) であるかに準ずるのである. 先ず定立定理 5.2.3 (即ち, $d(\Psi) < \infty$ なら, すべての $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ に対して $1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$) に対する反立として, 次の例がある:

定理 5.3.1.* $d(\Psi) = \infty$ のとき, 少なく共 1 つは $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ があって

$$(5.3.2) \quad \frac{1}{z} \notin H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E).$$

* この定理の主張よりさらに決定的な事実も成り立つ: $d(\Psi) = \infty$ のときには少なくとも 1 つは $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ があって $H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) = \mathbb{C}$ (付録 2 参照).

証明. 反 $(\Psi.2)$ 型の $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ は確かに存在する (定理 4.3.10) ので, この反 $(\Psi.2)$ 型の $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ を取るとき, もし $1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ ならば, この E に対しては $(\Psi.2)$ が成立せねばならぬ (特殊判定定理 3.1.4) から, 反 E ($\Psi.2$) 型であることに矛盾する. \square

$d(\Psi) = \infty$ のとき, $1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ となる $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ があるか否か, 即ち, 順 $(\Psi.2)$ 型の $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ の存在はどうかの問題の極度の重要性は, 今や認識に何の努力も必要ではない (課題 4.3.12 参照). 課題 4.3.12 の予想の成否は期待通りなら嬉しいが, 成立を期待させる何の兆しも我々には現時点で一切持ち得ない. どの $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ でも (5.3.2) となるのが実情かも知れぬ. この点の解明は困難ではあるが, 次節 6 の観点に立つならば極度に重要な課題である.

6. Heins 問題に関する Hasumi 論文考

Hardy 族による Riemann 面の分類に関しての 1969 年発行の Springer Lecture Notes シリーズ 98 の 50-51 頁で提出され **Heins** の問題として識られ注目され多くの関心の的であった研究課題に完全完璧な結論を与えたとして著名な Ark. Mat. 16(1978), no.2, 213-227 所載の **Hasumi** の一論文 Hardy classes on plane domains の内容は発表時から詳細はともかく大要は十分に承知していたと思うが, この度今更ながらではあるが, 読み直し論証を逐一精査するセミナーを持つ機会を得た. その検討状況を述べるのが本節の目的である. 結果の報告としては, 四捨五入的に言えば, 当該論文の明快で繊細精緻な上巧妙な着想の支える主定理の主張によもや一点の疑点も挟む余地はないものとの印象持つものの, 改めてその主定理の真偽の判定を求められたら, 誠に残念ながら現在の我々の力量の遠く及ばない所である. しかし, この主定理の当該論文の証明として与えている所に関する限りでは, 論証の流れに反例を持って指摘できると言う意味での本質的とも言える困難を含むと思われる, Heins 問題は未だに完結と言える段階に至っていないと言わざるを得ないと思う. 以下, 以上に関しての説明を詳しく述べる.

6.1. Hardy 空間による Riemann 面の分類.

Navanlinna の値分布論との関連で, 与えられた単連結開 Riemann 面 R が放物的 (即ち, $R \in \mathcal{O}_G$) となるか否かを論ずる型問題が Riemann 面の分類理論の嚆矢であった ([2], [15], [16] 等参照). こうして次第に大きく函数論の独立した一分野へと成長して行く Riemann 面の分類理論の中で Hardy 族による分類を組織的に論じたのが 1951-1952 年に公刊された有名な Parreau の学位論文 [14] である. 20 年近く時がたち, 一般 Riemann 面上で Hardy 族を展開する統一理論を構築し, その中で, Hardy 族による一般 Riemann 面の完全な分類系統図を以下の如く与えたのが Heins[8] であった:

$$(6.1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \mathcal{O}_{AB^*} < \bigcap_{0 < q < \infty} \mathcal{O}_q; \\ (b) \quad \bigcup_{0 < q < p} \mathcal{O}_q < \mathcal{O}_p < \bigcap_{p < q < \infty} \mathcal{O}_q \quad (0 < p < \infty); \\ (c) \quad \bigcup_{0 < q < \infty} \mathcal{O}_q < \mathcal{O}_{AB}, \end{array} \right.$$

但し, (a) は既に Heins に先行した上述の Parreau[14] の発見であった. 前から使ってきた通り, また以下で使い続ける “ $X < Y$ ” は 2 集合 X と Y の厳格包含関係 “ $X \subset Y$ かつ $X \neq Y$ ” を意味する記号である.

6.2. Heins の問題.

集合 $E \subset \mathbb{C}$ が直線又は円周の部分集合のとき, E を線形集合と言う. 線形完閉集合 E に対し, $E \in \mathcal{N}_\infty$ となるための必要かつ十分な条件は, E の線形測度 (即ち, 長さ) $|E| = 0$ となることである. これが有名な **Painlevé** の定理である. Heins([8], Chap.III, §7(pp.50-51)) は, これを次の如く一般化できることを先ず注意した:

Painlevé-Heins の定理. $E \subset \mathbb{C}$ を線形完閉集合とすると, $E \in \mathcal{N}_p$ ($1 \leq p \leq \infty$) となるための必要十分条件は $|E| = 0$ である.

他方完閉集合 $E \subset \mathbb{C}$ に対し $E \in \mathcal{N}_{AB^*}$ となるための必要十分条件は E の対数容量 $\text{cap}(E) = 0$ となることであつたから, Cantor 型の線形完閉集合 $E_0 \subset \mathbb{C}$ で $|E_0| = 0$ かつ $\text{cap}(E_0) > 0$ となるものを採れば, 自明な包含関係 (小節 1.1 参照)

$$\mathcal{O}_{AB^*} \subset \mathcal{O}_1 = \bigcap_{1 \leq p \leq \infty} \mathcal{O}_p$$

において球面領域

$$W_0 := \hat{\mathbb{C}} \setminus E_0$$

を採れば, $W_0 \notin \mathcal{O}_{AB^*}$ で $W_0 \in \mathcal{O}_p$ ($1 \leq p \leq \infty$) なので平面領域についての厳格包含関係

$$\mathcal{O}_{AB^*} < \mathcal{O}_1 = \bigcap_{1 \leq p \leq \infty} \mathcal{O}_p$$

が結論出来ることを示した (loc. cit.). (6.1.1) の (a) の平面領域版の一部とみなされる. この例示に基づいて, 一般 Riemann 面の Hardy 族による分類 (6.1.1) を平面 (球面) 領域に限定した Hardy 族による分類で再現する (だから結局拡張する) という研究課題を提案した. これが後に Hardy 族における **Heins の問題**と呼ばれたもので, Riemann 面の分類理論の中で Ahlfors-Beurling 流の函数論的零集合 ([1]) の視点の重要性に基づく指針であるとも解される.

この Heins 問題に関する最初の, しかも重要な, 貢献は, 1970 年代初頭の Heijhel の学位論文に基づく論文 [9, 10] で, 主として $1 \leq p \leq \infty$ の場合に於いて多くの本質的進展を見た. 続いて, この路線の鮮鋭化を通じて $0 < p \leq 1$ への踏込みも視野に入れた Kobayashi [11, 12] の研究も先行する中, 遂に, すべての指数 $0 < p \leq \infty$ に対する厳格包含関係図 (6.1.1) の平面領域による完全な再現を示したのが, 我々が精査研究の対象とする 1978 年の Hasumi の論文 [4] である. この内容は又, 全く同一ながら, 更に分かり易く解説的記述の形で, Riemann 面の Hardy 族に関する大変優れたしかも高度な 2010 年発刊の専門書 [6] に, 最終章, 第 11 章として収録されている.

6.3. Hasumi 論文の要点.

ここで言う Hasumi 論文とは, 前小節 6.2 を含めて既にここまでに複数回言及した論文 [4] のことである. この論文での主定理, それを導出するための先行定理, そして先行定理から主定理を導き出す証明 (つまり導出手続き) の 3 ポイントから成る “本体部分” を先ず説明する. 但し, 表現中関連概念は本講でここまでに導入したものに従うので, 勿論本質的には [4] と同一であるが, 表面的には異なって見えるかも知れぬ. 次いで “応用部分” として, 主定理から平面領域版厳格包含関係 “(6.1.1)” を (6.3.9) として導き出す部分を説明する. 言うまでもないが, この部分では本体部分の主定理 (従って, 先行定理) は正しいものと仮定して, この作業を行う. この肝心部分の成否についての我々の検討結果は, 本小節の次の小節以下で述べる.

Hasumi 論文 [4] の要点の説明を始める. 最初は “本体部分” で Hasumi 論文 [4] の主定理を **Hasumi 定理 A** と呼ぶ:

定理 6.3.1 (Hasumi 定理 A). 許容凸函数 Φ と Ψ は特異対 $\langle \Phi, \Psi \rangle$ をなすとすると, 次の厳格包含関係が成り立つ:

$$(6.3.2) \quad \mathcal{O}_\Psi < \mathcal{O}_\Phi \quad (\text{平面領域}).$$

原論文 [4] では, $\langle \Phi, \Psi \rangle$ が特異対 $\langle \Phi, \Psi \rangle$ をなすと共に Φ の強凸性も仮定しているが, 小節 3.3 で見た通り, これは $\langle \Phi, \Psi \rangle$ の特異性の帰結であって仮定する必要はない. 著書 [6] では特別の説明はないが, この仮定は外してある. とにかく Φ は強凸ではあるが Ψ は強凸でも非強凸でも構わない. しかしこの点が致命的に重要なことに繋がることになるのが後で述べられる. Hasumi 論文 [4] では, Hasumi 定理 A を直接証明するのではなく, 一つの先行定理を用意して, これの系として Hasumi 定理 A が導かれる. この先行定理は [4] においては一つに纏められているが, 実質は 2 個の主張からなっており, ここではこれを分けて, 二つの先行定理に分離して, Hasumi 定理 B と Hasumi 定理 C として述べておく方が便利である. よって第一の先行定理として

定理 6.3.3 (Hasumi 定理 B). すべての環状集合 $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ に対して

$$(6.3.4) \quad H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) = \mathbb{C}.$$

無論ここでは許容凸函数 Φ と Ψ は特異対 $\langle \Phi, \Psi \rangle$ をなすことが前提条件として仮定されており, 定理 4.3.1 で見た通り $\Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle} \neq \emptyset$ は重要な知識である. 状況は次定理においても同じである. その第二の先行定理として

定理 6.3.5 (Hasumi 定理 C). すべての環状集合 $\Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ に対して

$$(6.3.6) \quad \frac{1}{z} \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E).$$

上述 2 個の先行定理である Hasumi 定理 B と Hasumi 定理 C が Hasumi 定理 A を導出する導出手続きを述べて Hasumi 定理に対する本体部分が終る:

導出手続き: $\langle \Phi, \Psi \rangle$ は特異対なので, 特に $\Psi(t)/\Phi(t) = o(1)$ ($t \rightarrow \infty$) となるから正数 α と β を適当に採るとき

$$\Psi(t) \leq \alpha\Phi(t) + \beta \quad (0 \leq t < \infty)$$

だから, 領域 $W \in \hat{\mathbb{C}}$ に対して $f \in H^\Phi(W)$ とすると W 上の正值調和函数 u があって, W 上 $\Phi(\log^+ |f|) \leq u$ となる. すると $\alpha u + \beta$ は W 上の正值調和函数で, W 上

$$\Psi(\log^+ |f|) \leq \alpha\Phi(\log^+ |f|) + \beta \leq \alpha u + \beta$$

である故 $f \in H^\Psi(W)$ となり $H^\Phi(W) \subset H^\Psi(W)$ である. よって $W \in \mathcal{O}_\Psi$ なら $H^\Psi(W) = \mathbb{C}$ だから $H^\Phi(W) = \mathbb{C}$ となり $W \in \mathcal{O}_\Phi$ 故, とにかく単純包含関係

$$\mathcal{O}_\Psi \subset \mathcal{O}_\Phi$$

が出る. Hasumi 定理 (6.3.2) の自明部分は, かく, とにかく自明であり, 本質部分は厳格包含 $<$ を導くのに Hasumi 定理 B と C の先行主張が重要な役割を演ずる. 先ず Hasumi 定理 B により $H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) = \mathbb{C}$, 即ち, $\hat{\mathbb{C}} \setminus E \in \mathcal{O}_\Phi$ である. 次いで Hasumi 定理 C により $1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ だから, とにかく $H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) > \mathbb{C}$ だから $\hat{\mathbb{C}} \setminus E \notin \mathcal{O}_\Psi$ で, $\hat{\mathbb{C}} \setminus E \in \mathcal{O}_\Phi \setminus \mathcal{O}_\Psi$ となる. つまり “ $\mathcal{O}_\Psi \subset \mathcal{O}_\Phi$ で $\mathcal{O}_\Psi \neq \mathcal{O}_\Phi$ ” 故 $\mathcal{O}_\Psi < \mathcal{O}_\Phi$ (即ち, (6.3.1)) だから, Hasumi 定理 A が Hasumi 定理 B & C から導出された. \square

Hardy 族による平面領域の分類. 次に Hasumi 論文 [4] の応用部分, 即ち, Hasumi 定理 A から平面領域版厳格包含関係図 (6.1.1) ((6.3.9) として下に現れる) を導いてみせる. これが “Heins 問題の完全解決” 部分である. 先ず

$$(6.3.7) \quad \mathcal{O}_{AB^*} \subset \mathcal{O}_p \subset \mathcal{O}_q \subset \mathcal{O}_{AB} \quad (0 < p < q < \infty)$$

を想起する (小節 1.1 参照). そこでは第 1 の包含は不等式 $\log^+ t \leq (1/p)t^p$ より, 第 2 の包含は不等式 $t^p \leq t^q + 1$ より導かれ, そして第 3 の包含は自明である. 或いはすぐ上で行った様に

$$\Psi(t) = t, \quad \Phi_r(t) = e^{rt} - 1 \quad (0 < r < \infty)$$

により許容凸函数 Ψ と Φ_r を定めるとき

$$\Psi(t)/\Phi_p(t) = o(1), \quad \Phi_p(t)/\Phi_q(t) = o(1) \quad (t \rightarrow \infty)$$

であり, 又

$$\mathcal{O}_{AB^*} = \mathcal{O}_\Psi, \quad \mathcal{O}_p = \mathcal{O}_{\Phi_p}, \quad \mathcal{O}_q = \mathcal{O}_{\Phi_q}$$

であることより, (6.3.7) の最初の 2 個の包含が導かれ, そして第 3 のそれは自明である. 何はともあれ (6.3.7) は定義より直ちに分かるとして良い. (6.3.7) から直ちに平面領域版 (一般 Riemann 面でも同じことであるが) の単純包含関係図

$$(6.3.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \mathcal{O}_{AB^*} \subset \bigcap_{0 < q < \infty} \mathcal{O}_q; \\ (b) \quad \bigcup_{0 < q < p} \mathcal{O}_q \subset \mathcal{O}_p \subset \bigcap_{p < q < \infty} \mathcal{O}_q \quad (0 < p < \infty); \\ (c) \quad \bigcup_{0 < q < \infty} \mathcal{O}_q \subset \mathcal{O}_{AB} \end{array} \right.$$

が得られる. 問題は, (6.3.8) の (a) の単純包含 \subset が実は厳格包含 $<$ (即ち, \subsetneq) であり, (6.3.8) の (b) の 2 個の単純包含, 及び (c) のその厳格性を示す点にある: 次の平面版の厳格包含関係図

$$(6.3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \mathcal{O}_{AB^*} < \bigcap_{0 < q < \infty} \mathcal{O}_q; \\ (b) \quad \bigcup_{0 < q < p} \mathcal{O}_q < \mathcal{O}_p < \bigcap_{p < q < \infty} \mathcal{O}_q \quad (0 < p < \infty); \\ (c) \quad \bigcup_{0 < q < \infty} \mathcal{O}_q < \mathcal{O}_{AB} \end{array} \right.$$

を Hasumi 定理 A から導き出して見せることが要求される. これを以下で実行する.

(6.3.9) の (a) の証: この部分は系 5.2.13 としての包含図 (5.2.14) とその証明として既述の所であるが, 記述の流れ上, ここに再記する. 3 個の t の函数 Ψ, Φ_0, Φ を

$$\Psi(t) = t, \quad \Phi_0(t) = t^2, \quad \Phi(t) = e^{qt} - 1 \quad (0 < q < \infty)$$

と定める. すると Ψ, Φ_0, Φ のいずれも許容凸函数で, 更に $\langle \Phi_0, \Psi \rangle$ も $\langle \Phi, \Phi_0 \rangle$ も特異対となることの確認は容易である. 猶, $\mathcal{O}_\Psi = \mathcal{O}_{AB^*}$ 及び $\mathcal{O}_\Phi = \mathcal{O}_q$ ($0 < q < \infty$) に注意する. Hasumi 定理 A によれば,

$$\mathcal{O}_{AB^*} = \mathcal{O}_\Psi < \mathcal{O}_{\Phi_0}, \quad \mathcal{O}_{\Phi_0} < \mathcal{O}_\Phi = \mathcal{O}_q \quad (0 < q < \infty)$$

である. だから

$$\mathcal{O}_{AB^*} = \mathcal{O}_\Psi < \mathcal{O}_{\Phi_0} \subset \bigcap_{0 < q < \infty} \mathcal{O}_q$$

となり, (6.3.9) の (a) の成立が確かめられた. □

(6.3.9) の (b) の証: 最初に (b) の第 1 の厳格包含を示す. そのため 3 個の $t \in \mathbb{R}^+$ の函数 Ψ, Φ_0, Φ を

$$\Psi(t) = e^{qt} - 1 \quad (0 < q < p), \quad \Phi_0(t) = \frac{e^{p(t+2/p)} - pe^2}{t+2/p}, \quad \Phi(t) = e^{pt} - 1$$

で定める. Ψ, Φ_0, Φ のいずれも, Φ_0 以外は, 許容凸函数となることは自明であるから, ここでは Φ_0 がそうであることを確かめておく. そのため $t > 0$ の函数 $y = e^{pt}/t$ を考える. y の 1 次及び 2 次導函数を y' 及び y'' と記すならば, 先ず, $ty' = (pt-1)y$ より, $t > 1/p$ ならば $y' > 0$ で, 次に $ty'' = py + (pt-2)y'$ より, $t > 2/p$ ならば, そのとき $t > 1/p$ であることも踏まえて, $y'' > 0$ となるのだから $t \mapsto e^{pt}/t$ は $[2/p, \infty)$ 上で単調増加凸函数なので $t \mapsto e^{p(t+2/p)}/(t+2/p)$ は $[0, \infty) = \mathbb{R}^+$ 上単調増加凸函数である. それ故

$$\Phi_0(t) = \frac{e^{p(t+2/p)} - pe^2}{t+2/p} - \frac{pe^2}{2} \left(= \frac{e^{p(t+2/p)}}{t+2/p} - \frac{e^{p(0+2/p)}}{0+2/p} \right)$$

は許容凸函数であることが結論出来る. ここで $\mathcal{O}_\Psi = \mathcal{O}_q$ かつ $\mathcal{O}_\Phi = \mathcal{O}_p$ ($0 < q < p$) に注意する. 次いで, $\langle \Phi_0, \Psi \rangle$ も $\langle \Phi, \Phi_0 \rangle$ のいずれも特異対をなすことは簡単に調べられる. だから Hasumi 定理 A により

$$\mathcal{O}_q = \mathcal{O}_\Psi < \mathcal{O}_{\Phi_0} \quad (0 < q < p), \quad \mathcal{O}_{\Phi_0} < \mathcal{O}_\Phi = \mathcal{O}_p$$

が導かれる. それ故

$$\bigcup_{0 < q < p} \mathcal{O}_q \subset \mathcal{O}_{\Phi_0} < \mathcal{O}_p$$

となり, (6.3.9) の (b) の第 1 の厳格包含関係が示された.

次に, (6.3.9) の (b) の第 2 の厳格包含関係を導く. そのため 3 個の $t > 0$ の函数 Ψ, Φ_0, Φ を

$$\Psi(t) = e^{pt} - 1, \quad \Phi_0(t) = te^{pt}, \quad \Phi(t) = e^{qt} - 1 \quad (0 < p < q < \infty)$$

で定める. 容易に, これ等の 3 函数は許容凸函数であり, $\mathcal{O}_\Psi = \mathcal{O}_p$, かつ $\mathcal{O}_\Phi = \mathcal{O}_q$ ($0 < p < q < \infty$) であることが分かる. 更に $\langle \Phi_0, \Psi \rangle$ も $\langle \Phi, \Phi_0 \rangle$ も共に特異対をなすことも自明である. だから, Hasumi 定理 A より

$$\mathcal{O}_p = \mathcal{O}_\Psi < \mathcal{O}_{\Phi_0}, \quad \mathcal{O}_{\Phi_0} < \mathcal{O}_\Phi = \mathcal{O}_q \quad (0 < p < q < \infty)$$

となる. それ故前半同様

$$\mathcal{O}_p < \mathcal{O}_{\Phi_0} \subset \bigcap_{p < q < \infty} \mathcal{O}_q$$

となり, (6.3.9) の (b) の第 2 の厳格包含関係が導かれ, こうして, (6.3.9) の (b) の証明が終る. □

(6.3.9) の (c) の証: $t \in \mathbb{R}^+$ の 3 個の函数 Ψ, Ψ_0, Φ_0 を

$$\Psi(t) = e^{qt} - 1 \quad (0 < q < \infty), \quad \Psi_0(t) = e^{t^2} - 1, \quad \Phi_0(t) = e^{t^3} - 1$$

で定める. これ等は許容凸函数で, $\mathcal{O}_\Psi = \mathcal{O}_q$ ($0 < q < \infty$) にも注意する. 明らかに, $\langle \Psi_0, \Psi \rangle$ も $\langle \Phi_0, \Psi_0 \rangle$ も特異対をなすことが分かるから, Hasumi 定理 A より

$$\mathcal{O}_q = \mathcal{O}_\Psi < \mathcal{O}_{\Psi_0} < \mathcal{O}_{\Phi_0} \quad (0 < q < \infty)$$

となる. ここで, 球面領域 $W \in \mathcal{O}_{\Phi_0}$ とすると, $H^{\Phi_0}(W) = \mathbb{C}$ である. 任意の $f \in AB(W)$ を採るとき, $\sup_{z \in W} |f(z)| := \gamma < \infty$ とおくならば, W 上

$$\Phi_0(\log^+ |f|) \leq \Phi_0(\log^+ \gamma)$$

である. 即ち, W 上劣調和函数 $\Phi_0(\log^+ |f|)$ は定数函数である $\Phi_0(\log^+ \gamma)$ を調和優函数として持つから, $f \in H^{\Phi_0}(W)$ であり, $H^{\Phi_0}(W) = \mathbb{C}$ より f 自身 W 上定数となるのだから, $AB(W) = \mathbb{C}$, 即ち $W \in \mathcal{O}_{AB}$ となるから, 結局の所, $\mathcal{O}_{\Phi_0} \subset \mathcal{O}_{AB}$ が出るから

$$\mathcal{O}_q < \mathcal{O}_{\Psi_0} < \mathcal{O}_{\Phi_0} \subset \mathcal{O}_{AB} \quad (0 < q < \infty)$$

となる. こうして

$$\bigcup_{0 < q < \infty} \mathcal{O}_q \subset \mathcal{O}_{\Psi_0} < \mathcal{O}_{\Phi_0} \subset \mathcal{O}_{AB}$$

となり, 厳格包含関係 (6.3.9) の (c) が導出された. □

6.4. 論証検討.

前小節 6.2 で述べた通り, **Hasumi 論文 [5]** は主定理である **Hasumi 定理 A** とその 2 個の先行定理である **Hasumi 定理 B** と **hasumi 定理 C** が本体部分である骨組みである. そして最初の論証は

$$(I) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Hasumi 定理 B} \\ \text{Hasumi 定理 C} \end{array} \right\} \implies \text{Hasumi 定理 A}$$

の導出手続きで, これは小節 6.3 詳述した通り, 本質的には自明と言って良いもので問題となる所は一切無い.

次いで, Hasumi 定理 A の応用部分で, Hardy 族による平面領域の分類理論に関する **Heins 問題の完全解決** を与える Hasumi 論文 [4] の本来のセールスポイントである部分で, そこでの論証としては

$$(II) \quad \text{Hasumi 定理 A} \implies \text{厳格包含関係図 (6.3.9)}$$

を導出する部分であるが, それも小節 6.3 で詳述した通り, やはり一切の頑張りを要する所の無いものである. だから問題となる所は一切無い.

従って, Hasumi 論文 [4] の命は次の 2 点に懸かっている:

(III) Hasumi 定理 B の真偽;

(IV) Hasumi 定理 C の真偽.

(III) の検討: Hasumi 定理 B の内容は, すべての $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ に対して $H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) = \mathbb{C}$ となる, という主張であった. 定理 5.1.10 の内容, すべての $E \in \Gamma_\Phi$ に対して $H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) = \mathbb{C}$ となる, という主張は, そこでのこの主張の証明を完璧に追尾納得できたのだから, $\Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle} \subset \Gamma_\Phi$ ((3.3.10) と (4.1.4) 参照) と併せて, **Hasumi 定理 B** は一点の疑問なく成立は確認できたと結論出来る.

(IV) の検討: 残る所は, Hasumi 定理 C, 即ち, すべての $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ に対して $1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ となるという主張, の真偽と言うか成否の検討である. 事象 $1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ の成否については, 小節 3.1 で論じた特殊判定定理 (定理 3.1.4) が眺め向きの基礎手段を与える. そこでは, $E \in \Gamma$ に対する 2 個の条件が重要な道具であった: 先ず第 1 として

$$(\Psi.1) : \int_E \Psi(\log |z^{-1}|) dm(z) < +\infty$$

と, 今 1 つ, 第 2 として

$$(\Psi.2) : \sup_{n \in \mathbb{N}} \Psi(\log a_n^{-1}) m_n(C(a_n)) < +\infty$$

である, ここに m は環状集合 $E \in \Gamma$ の随伴調和測度で, $(m_n)_{n=1}^\infty$ は E の随伴近似調和測度列であった (小節 1.2 参照).
すると特殊判定定理の言う所は, $E \in \Gamma$ に対して,

$$(6.4.1) \quad (\Psi.1) \ \& \ (\Psi.2) \iff \frac{1}{z} \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$$

であった. だから Hasumi 定理 C を証明するには, E が条件 $(\Psi.1)$ と $(\Psi.2)$ を満たすことを言えば良い.

そこで Hasumi 定理 C の著者証明を読もう. 念のため Hasumi 論文 [4] だけでなく Hasumi モノグラフ [6] でのこの部分を
ほぼ原文のまま引用してみる:

[4], p.242 からの引用: “We see first that $z^{-1} \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$, for we have

$$\begin{aligned} \int_E \Psi(\log |z^{-1}|) dm(z) &= \sum_{n=0}^\infty \int_{E_n} \Psi(\log |z^{-1}|) dm(z) \leq \sum_{n=0}^\infty \Psi(-\log(\delta a_n)) m(E_n) \\ &\leq \Psi(-\log(\delta a_0)) m(E_0) + \sum_{n=1}^\infty \Psi(-\log(\delta a_n)) / \Phi(-\log(n a_n)) \leq \Psi(-\log(\delta a_0)) m(E_0) + \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} < +\infty. \end{aligned}$$

[6], p.354 からの引用: “第二の性質 $z^{-1} \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ は比較的簡単である. 実際, $a_n \leq b_n$ より,

$$\Psi(-\log(\delta a_n)) \leq 2^{-n} \Phi(-\log(n a_n)) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が成りたつ. E_n は $\{\delta a_n \leq |z| \leq a_n\}$ に含まれるから,

$$\begin{aligned} \int_E \Psi(\log |z^{-1}|) dm(z) &= \sum_{n=0}^\infty \int_{E_n} \Psi(\log |z^{-1}|) dm(z) \leq \sum_{n=0}^\infty \Psi(-\log |\delta a_n|) m(E_n) \\ &\leq \Psi(-\log |\delta a_0|) m(E_0) + \sum_{n=1}^\infty \frac{\Psi(-\log |\delta a_n|)}{\Phi(-\log |n a_n|)} \leq \Psi(-\log |\delta a_0|) m(E_0) + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} < \infty \end{aligned}$$

を得る. 故に, z^{-1} は $H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ に属する. □

仮定 $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ の中には, 大前提的に, E の大外枠数列 $(b_n)_{n=0}^\infty$ (小節 1.2 参照) が, E の外枠定数 $0 < \rho < \delta < 1$
の $0 < \delta < 1$ に対する $\langle \Phi, \Psi \rangle$ 大外枠数列 (小節 3.3 の (3.3.10) 参照) となっていることが要求されている. この故に E
は $(\Psi.1)$ を満たす訳で, 引用部分にある評価計算は, この確認, 即ち, E が $(\Psi.1)$ を満たすことの証明である. その上で,
 $1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ を結論している訳であるから, 引用部分での本質的主張を要約して言えば, 単に,

$$(6.4.2) \quad (\Psi.1) \implies \frac{1}{z} \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$$

であると述べているに過ぎない, 即ち, “ $E \in \Gamma$ が $(\Psi.1)$ を満たすから, $1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ となる” と述べている訳である.
一般的に成立する定理の要約である (6.4.1) に照らし合せて言えば, $(\Psi.1)$ は $1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ となるための必要条件であ
るが, 十分条件であるとは限らず, 主張としては (6.4.2) は一般的には成立するものではない. $E \in \Gamma$ は, 単なる $E \in \Gamma$ で
あるだけでなく, ここでの $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ であるから, E は $(\Psi.1)$ を確かに満たすが, その上に更に, E は $(\Psi.2)$ (或いは何か
それと同等な条件) を満たさなければ, $1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ は結論できない. だから (IV) の証明としては, 少なくとも, 不完
全と言わねばならぬ.

$\langle \Phi, \Psi \rangle$ が特異対故 Φ は常に強凸であるが, Ψ は強凸でも非強凸でも良いので, Ψ に対しては, この分類の視点に配慮する
ことが重要である.

Ψ が非強凸 (即ち, $d(\Psi) < \infty$) のとき: 命題 5.2.2 として示した通り, どんな $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ も $d(\Psi) < \infty$ なら $(\Psi.2)$ を満
たすから, (6.4.1) と合せて $1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ となるので (IV) は $d(\Psi) < \infty$ のときは成立, 即ち, $d(\Psi) < \infty$ のときには
Hasumi 定理 C は真である. 同じことであるが, 定理 5.2.3 としても, この事は確認している.

Ψ が強凸 (即ち, $d(\Psi) = \infty$) のとき: 定理 5.3.1 として, “ Ψ が強凸 (即ち, $d(\Psi) = \infty$) のときには, $1/z \notin H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ と
なる $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ が存在する”ことを示した. これは $d(\Psi) = \infty$ のとき $(\Psi.2)$ を満たさぬ $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ の存在 (定理 4.3.10
参照) に基づく所ある. Hasumi 定理 C は, “どんな $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ でも $1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ である”と主張しているので, (IV)
は $d(\Psi) = \infty$ のとき不成立, 即ち, $d(\Psi) = \infty$ のときには **Hasumi 定理 C** は偽である.

Hasumi 論文 [5] の主定理 (Hasumi 定理 A) の真偽判断. Hasumi 定理 A は “ Φ と Ψ が特異対 $\langle \Phi, \Psi \rangle$ を作るとき, $\mathcal{O}_\Psi < \mathcal{O}_\Phi$ となる” との主張である. だから (I)~(IV) で確認出来た所を感想を添えて纏めると

$\left\{ \begin{array}{l} \Psi \text{ が非強凸のとき} \\ \text{Hasumi 定理 A は成立} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{小節 5.2 で見た通り, } \Psi \text{ が非強凸ならば Hasumi 定理 A は真である.} \\ \text{しかし判定定理 (6.4.1) の条件 } (\Psi.2) \text{ 又はそれと同等条件への言及が} \\ \text{一切無い所から, その原著証明は不完全である.} \end{array} \right.$
	$\left\{ \begin{array}{l} \Psi \text{ が強凸のとき Hasumi} \\ \text{定理 A は真偽不明} \end{array} \right.$

6.5. 結論.

ここまで精査検討の対象として来た Hasumi 論文 [4] は函数論専攻の中では「Riemann 面の分類理論」と呼ばれる分野に属する研究である. 許容凸函数 Φ と Ψ が特異対 $\langle \Phi, \Psi \rangle$ を作るとき, 夫々の Hardy-Orlicz 空間 H^Φ と H^Ψ に関する球面領域 $W \in \hat{\mathbb{C}}$ の零族 \mathcal{O}_Φ と \mathcal{O}_Ψ の間の厳密包含関係

$$(6.5.1) \quad \mathcal{O}_\Psi < \mathcal{O}_\Phi$$

を示すことを主題とすると言う分類理論の中での伝統的でしかも典型的な研究を行っている. (6.5.1) 型の主張に対しては二つの手続きを要求する. 第一に先ず単純包含関係である

$$(6.5.2) \quad \mathcal{O}_\Psi \subset \mathcal{O}_\Phi$$

を導く. 球面領域 $W \subset \hat{\mathbb{C}}$ に対し $H^\Psi(W) = \mathbb{C}$ なら $H^\Phi(W) = \mathbb{C}$ を示すのであるから, 2 空間 $H^\Psi(W)$ と $H^\Phi(W)$ の間の関係性の解析と言う理論的研究が行われる. この部分の難易は一に懸かって上の二つの函数空間次第で決まる所で非常に難しい事例も多々あるが, (6.5.2) の場合では単に自明に尽きる. 次いで, 第二として, 球面領域 $W \subset \hat{\mathbb{C}}$ で

$$(6.5.3) \quad W \in \mathcal{O}_\Phi \setminus \mathcal{O}_\Psi$$

となるものを, 何でも良いから一つ例示する. これで (6.5.2) から (6.5.1) へ昇格させるのである. この様な W を (6.5.1) における反例と呼ぶのが「Riemann 面の分類理論」分野の業界用語的使用である. この分野での中心的な仕事は反例作りであるとのイメージが定着している. Hasumi[4] に於いては何でも良い一つの環状集合 $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ をとるとき, $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$ が (6.5.1) での反例であると提示しているのである:

$$(6.5.4) \quad \hat{\mathbb{C}} \setminus E \in \mathcal{O}_\Phi \setminus \mathcal{O}_\Psi \quad (E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}).$$

Ψ が非強凸ならばこれは良いが, Ψ が強凸ならこうはならぬ場合が実際起こる, つまり, (6.5.1) の反例に $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$ がならぬこともあるから, Ψ が強凸のときは関係 (6.5.1) は成否不明と結論したのである. (6.5.4) に関して, Ψ が強凸の場合, $\hat{\mathbb{C}} \setminus E \in \mathcal{O}_\Phi$ は常に成立するのであるが, $\hat{\mathbb{C}} \setminus E \notin \mathcal{O}_\Psi$ については, これを $1/z \in H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ (任意の $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$) 故 $H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) \neq \mathbb{C}$ なので $\hat{\mathbb{C}} \setminus E \notin \mathcal{O}_\Psi$ と著者証明で述べているのであるが, $1/z \notin H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ となる $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ の存在が示された故 $\hat{\mathbb{C}} \setminus E \notin \mathcal{O}_\Psi$ の著者証明は誤りと判断したのである. 但し, ここに二つの不透明部分が出現する, $1/z \notin H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ だからと言って $H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) \neq \mathbb{C}$ が出ない訳ではないとの指摘がその一つである. しかしこれについては, 実は, “ $H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) = \mathbb{C}$ となるための必要十分条件は $1/z \notin H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ である” ことが成り立つ*. だから上の $1/z \notin H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ となる $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ が存在することは $\hat{\mathbb{C}} \setminus E \in \mathcal{O}_\Psi$ となる $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ が存在することであり, $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$ が (6.5.4) を満たすことが否定される. どん

* 付録 2 参照

な $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ をとつても $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$ が (6.5.1) の反例だとの主張は否定される。第二の不透明部分は、前よりずっと深刻で手に負えぬものである。それは、駄目な $E \in \langle \Phi, \Psi \rangle$ は確かにあるけれど、良い $E \in \langle \Phi, \Psi \rangle$ もあるかも知れぬ、と言う疑問である。これについては、悪い $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ を具体的に例示したように、良い $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ を具体的に例示出来る可能性の判断をせねばならず、強凸な Ψ の場合の (6.5.1) の成否は不明と言うのが当面現実的な結論と思う。

Hasumi 論文 [4] の狙いは、言うまでもなく、Hardy 空間に関する Heins 問題、即ち、平面領域版厳格包含関係図 (6.3.9) を構築完成すること、にある。これを、単独の Hardy-Orlicz 空間の厳格包含関係 (6.3.2)(上の (6.5.1)):

$$\mathcal{O}_\Psi < \mathcal{O}_\Phi \quad (\langle \Phi, \Psi \rangle: \text{特異対})$$

と言う誠に美しい形に昇華し、これにより Heins 問題を一挙に解決すると言う一連の流れは感嘆の極みである。しかし (6.5.1) 自身に問題があるとすると Heins 問題 (6.3.9) が一挙解決とする [4] の主張を全面的に支持はできない。そこで以下、Heins 問題のどの部分が [4] により解決されたか、また [4] とは無関係に Heins 問題自身の現況について、我々の理解の範囲で述べる。

関係図 (6.3.9) の (a): (Parreau の定理の平面領域版) 小節 6.3 で見た様に (6.3.2)(上の (6.5.1)) からすべて導かれるので、(6.3.2) が成立することが前提である。 Ψ が非強凸なら (6.3.2) は、[4] での著者証明には問題があるにしても、我々の小節 5.2 での (6.3.2) の成立の確認と、それからの (6.3.9) の (a) の導出の確認がある故、(6.3.9) の (a) は確かに成立することを [5] が初めて指摘した訳である。関係図 (6.3.9) の (a) を“(6.3.2) \Rightarrow (6.3.9) の (a)”の導出法に拘らず視点を変えて見よう。平面領域では $\mathcal{O}_{AB^*} = \mathcal{O}_G$ 、即ち、完全非連結完閉集合 $E \subset \mathbb{C}$ に対し $\hat{\mathbb{C}} \setminus E \in \mathcal{O}_{AB^*} \Leftrightarrow \text{cap}(E) = 0$ であるので、[4] の重要な寄与である。 $d(\Phi) = \infty$ に対する非極 \mathcal{N}_Φ 集合の存在定理により (6.3.9) の (a) は容易に導出出来るので、いずれにしる (6.3.9) の (a) は [4] に依る重要な結果であると言える。

関係図 (6.3.9) の (b): これは (6.3.9) の中核をなす最も重要な部分で“ $\mathcal{O}_\Psi < \mathcal{O}_\Phi$ ($d(\Psi) = \infty$)” が是非欲しいのであるが、これの成立の保証が無い限り、(6.3.9) の (b) の一欠片も得られない。[4] の先行又は同時進行のこの部分に対する寄与としては大変重要で、特に方法論的見地から見て興味深い、Hejhal[9, 10] がある。その結果は

$$(*) \quad \bigcup_{0 < q < p} \mathcal{O}_q < \mathcal{O}_p \quad \left(p \in \frac{\mathbb{N}+1}{2} \right)$$

であり (6.3.9) の (b) の一部である所の

$$(**) \quad \bigcup_{0 < q < p} \mathcal{O}_q < \mathcal{O}_p < \bigcap_{p < q < \infty} \mathcal{O}_q \quad (1 \leq p < \infty)$$

からしても大分距離があると思える。[10] の中で Hejhal は自身の結果 (*) について、実は (**) への進化を確信的に述べつつ、他方 (**) の $0 < p < 1$ の場合については、例えば、(**) ($0 < p < 1$) は全然駄目で実は“ $\mathcal{O}_p = \mathcal{O}_{AB^*}$ ($0 < p < 1$)”かも知れぬと言われても驚かないと言うニュアンスの陳述まで記している。何か Hejhal 独自の絵が見えていたのであろう。他方 Kobayashi[11, 12] は Hejhal の着想の深化により

$$\mathcal{O}_p < \mathcal{O}_q \quad (0 < p < q \leq \infty, q \geq 1)$$

を示している。他には何も (6.3.9) の (b) に関しての知見を持たぬので、“完成型の (6.3.9) の (b)”については全くの白紙状態にあると言うのが適切であると思う。

関係図 (6.3.9) の (c): Heins がモノグラフ [8] で Heins 問題提出時に解答のサンプルとして示した着想を Hejhal 独自の方法で定式化した手法に基づく巧みな構成で得た“反例”により、(6.3.9) の (c) を前段でも引用した論文 Hejhal[9] に於いて完璧に確立している。

以上の如き状況が我々の理解なので、Heins 問題の中核部分は依然として未解決の儘であるのではないかを結論として終わりとする。

付録 1. 調和測度の密度評価

付 1.1. 円周平均法.

同心円環 $R = R(a, b) = \{a < |z| < b\}$ ($0 < a < b < \infty$) 上の調和函数 $u \in h(R)$ (R 上の調和函数空間) を扱うのに、 R

の回転不変性を利用する円周平均法と呼ばれる手法が簡単ながらときには大変有力な働きをする。

$u \in h(R)$ に対し

$$(付.1.1.1) \quad u^*(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(ze^{it}) dt \quad (z \in R)$$

と定める R 上の函数 u^* を U の同心円周平均又は略して単に平均と言う。 $\varphi \mapsto u(|z|e^{i\varphi}) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は周期 2π の周期函数故上の定義 (付 1.1.1) を書き換えて

$$(付.1.1.2) \quad u^*(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it}) dt \quad (z = re^{i\theta} \in R)$$

と見てもよく、これから

$$u^*(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(|z|e^{it}) dt = u^*(|z|) \quad (z \in R)$$

となるから $u^*(z)$ は所謂 R 上の半径函数 (radial function), 即ち, 実質的に开区間 (a, b) 上の 1 変数函数 $r \mapsto u^*(r) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ となり,

$$\Delta u^*(z) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) u^*(r).$$

また

$$\Delta_z u^*(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta_z u(ze^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 0 dt = 0,$$

即ち, $u^* \in h(R)$ となる. 更に

$$u \in h\mathcal{B}(R) := \{u \in h(R) : \sup_{z \in R} u(z) < +\infty\}$$

即ち, u は R 上の有界函数とする. すると, Fatou の定理により, 殆んどすべての $ae^{i\theta} \in C(a) := \{|z| = a\}$, 及び, 殆んどすべての $be^{i\theta} \in C(b)$ で

$$u(a^{i\theta}) := \lim_{(a,b) \ni r \searrow a} u(re^{i\theta}), \quad u(b^{i\theta}) := \lim_{(a,b) \ni r \nearrow b} u(re^{i\theta})$$

が存在するので, $u^*(r)$ を (a, b) を越えて $[a, b]$ まで

$$u^*(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta \quad (r \in [a, b])$$

により定義を拡げ得る. 更に Lebesgue の収束定理に依れば

$$\begin{aligned} u^*(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(ae^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{(a,b) \ni r \downarrow a} u(re^{i\theta}) d\theta \\ &= \lim_{(a,b) \ni r \downarrow a} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta = \lim_{(a,b) \ni r \downarrow a} u^*(r) \end{aligned}$$

となり, b についてもまったく同様に行つて

$$\begin{cases} u^*(a) = \lim_{(a,b) \ni r \downarrow a} u^*(r), \\ u^*(b) = \lim_{(a,b) \ni r \uparrow b} u^*(r) \end{cases}$$

が示される, 即ち, u^* は $[a, b]$ 上連続となる. よつて $u \in h\mathcal{B}(R)$ ならば

$$u^* \in h(R) \cap \mathcal{C}(\bar{R})$$

であるので, $u \in h\mathcal{B}(R)$ に対して $u^* \in h(R) \cap \mathcal{C}(\bar{R})$ は, $[a, b]$ 上次の 2 階線形常微分方程式の境界値問題の解として得られる:

$$(付.1.1.3) \quad \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) u^*(r) = 0 \\ u^*(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(ae^{i\theta}) d\theta, \quad u^*(b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(be^{i\theta}) d\theta. \end{cases}$$

これは直ちに解かれて、得られる解 u^* の公式は下記の如くである:

$$(付.1.1.4) \quad u^*(z) = u^*(a) \frac{\log |z| - \log b}{\log a - \log b} + u^*(b) \frac{\log |z| - \log a}{\log b - \log a} \quad (z \in \overline{R}).$$

上記公式を応用して、回転不変領域 (言わば ∞ 中心の開円板)

$$R(a) := \{a < |z| \leq \infty\} \quad (0 < a < \infty)$$

を取るとき, $u \in h\mathcal{B}(R(a))$ の同心円周平均 $u^* \in h\mathcal{B}(R(a))$ の表示公式を求めよう. 平均 u^* の定義は形式的には従前通り

$$u^*(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(|z|e^{i\theta}) d\theta \quad (z \in R(a))$$

であるが, とくに $z \neq \infty$ なら文字通り前と同じで良いが, $z = \infty$ のとき $u(\infty)$ は確定値故 $u^*(\infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\infty e^{i\theta}) d\theta = u(\infty)$ であり, また Lebesgue の収束定理により

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} u^*(z) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(|z|e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\lim_{z \rightarrow \infty} u(|z|e^{i\theta}) \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\infty) d\theta = u(\infty) = u^*(\infty) \end{aligned}$$

なので, u^* は (a, ∞) を越えて $[a, \infty]$ に連続に拡張されている. さて $0 < a < b < \infty$ を取り $b \nearrow \infty$ とするとき, $R(a, b) \nearrow R(a) \setminus \{\infty\}$ なので u^* の $R(a, b)$ 上の表示公式 (付 1.1.4) で $b \nearrow \infty$ とすれば, u^* の $R(a)$ 上の表示公式が求められよう. $u(ae^{i\theta})$ は $C(a)$ 上の u の Fatou 境界値とし, $u(be^{i\theta})$ は勿論 $u|_{C(b)}$ として

$$\begin{cases} u^*(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(ae^{i\theta}) d\theta, \\ u^*(b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(be^{i\theta}) d\theta \end{cases}$$

であり, 特に

$$(付 1.1.5) \quad \lim_{b \uparrow \infty} u^*(b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{b \uparrow \infty} u(be^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\infty) d\theta = u(\infty)$$

に注意する. (付.1.1.4) により $a < |z| < b$ ならば

$$\begin{aligned} u^*(z) &= u^*(a) \frac{\log |z| - \log b}{\log a - \log b} + u^*(b) \frac{\log |z| - \log a}{\log b - \log a} \\ &= u^*(a) \frac{1 - (\log |z|)/\log b}{1 - (\log a)/\log b} + u^*(b) \frac{(\log |z| - \log a)/\log b}{1 - (\log a)/\log b} \\ &\rightarrow u^*(a) \frac{1 - 0}{1 - 0} + u^*(\infty) \frac{0}{1 - 0} = u^*(a) \quad (b \nearrow \infty), \end{aligned}$$

となる. 故に求める公式としては, とても簡単な

$$(付.1.1.6) \quad u^*(z) = u^*(a) = u(\infty) \quad (z \in \overline{R(a)} = C(a) \cup R(a))$$

である. 因みに上式は

$$\frac{1}{2\pi} \int_{C(a)} u(ae^{i\theta}) d\theta = u(\infty)$$

と書ける訳である. つまり円 $R(a)$ に於いてその円周平均 ($C(a) = \partial R(a)$ 上の平均) は $R(a)$ の中心の値となるという, 所謂 Gauss の平均値の定理を円周平均法により説明したことになっている (Poisson 積分は使われていない!).

付.1.2. 円環型密度評価

同心円環 $R = R(a, b) := \{a < |z| < b\}$ ($0 < a < b < \infty$) と, その二分円 $\gamma := C(\sqrt{ab}) = \{|z| = \sqrt{ab}\}$ を考える. $w \in \gamma$ を測定点とする R の調和測度を ξ_w と記す. γ の R に関する Harnack 定数を R の modulus $\log(b/a)$ に因んで

$$A_1 = A_1\left(\frac{b}{a}\right)$$

と記すことにしたのであった (小節 5.1 参照). そして $\partial R = C(a) \cup C(b)$ 上の線素を ds とするとき, 密度 $d\xi_w/ds$ の評価式

$$(付.1.2.1) \quad \frac{d\xi_w}{ds} \leq \begin{cases} A_1\left(\frac{b}{a}\right) \frac{1}{4\pi a} & (z \in C(a)), \\ A_1\left(\frac{b}{a}\right) \frac{1}{4\pi b} & (z \in C(b)) \end{cases}$$

を本文の定理 5.1.10 の証明で利用した. ここでは上の不等式を円周平均法を用いて導こう.

上記導出過程を滞りなく示すために, 前もって用意しておくと思われる注意を, 評価式 (付.1.2.1) の証明に入る前に先ず述べる.

原点 0 中心, 半径 $0 < a < \infty$ の円周 $C(a)$ 上の半円周を越えない閉部分弧 e を取るとき, e の長さを $|e|$ と記し, また $C(a)$ 上の e の特性函数を χ_e とするとき

$$(付.1.2.2) \quad \int_0^{2\pi} \chi_e(ae^{i\theta}) d\theta = \int_{ae^{i\theta} \in e} d\theta = \frac{|e|}{a}$$

となる事を言う. 言うまでもなく自明以下の自明な事実であるが, e の弧長測度と角測度が混在して, うっかりすると, 定数に関してのミスを犯し勝ちなので, 老婆心的かつ自戒的注意書きである.

先ず原点 0 から出る 2 本の半直線 l_1 と l_2 を取る. l_1 を反時計回りに原点中心で半円周以下回転して l_2 に到るとする, そのとき l_1 と l_2 で作る角を $0 < \Theta < \pi$ とし, 閉角領域 $l_1 0 l_2$ を Δ とする. $C(r) \cap \Delta =: e(r)$ ($0 < r < \infty$) は $C(r)$ の部分閉弧をなすが, その長さを $|e(r)|$ と記す. 頂点 0 と弧 $e(r)$ で出来る扇型を $\Delta(r)$ とするとき, 伸縮変換 $z \mapsto rz : \Delta(1) \rightarrow \Delta(r)$ により

$$\Delta(1) \propto \Delta(r) \quad (\text{相似})$$

で相似比が r であるから

$$|e(r)| = r|e(1)|$$

となる. 0 から $e(r)$ を見込む角も $e(1)$ を見込む角も無論同じ Θ である. 弧度法による角の計測決定の定義により

$$|e(1)| = \Theta$$

なので, 上の 2 つの陳列式から

$$(付.1.2.3) \quad \Theta = \frac{|e(r)|}{r}$$

となる. Θ は $e(r)$ の角測度で, $|e(r)|$ は $e(r)$ の弧長測度である.

(付.1.2.2) の証明. e の中点を $ae^{i\alpha}$ とし, 原点 0 から $C(a)$ 上の e を見込む角を $0 < \Theta < \pi$ とすると, $e = \{ae^{i\theta} : \alpha - \Theta/2 \leq \theta \leq \alpha + \Theta/2\}$ であるから

$$\int_0^{2\pi} \chi_e(e^{i\theta}) d\theta = \int_{ae^{i\theta} \in e} d\theta = \int_{\alpha - \Theta/2}^{\alpha + \Theta/2} d\theta = \left(\alpha + \frac{\Theta}{2}\right) - \left(\alpha - \frac{\Theta}{2}\right) = \Theta$$

となる. (付.1.2.3) により $e = e(a)$ なので

$$\Theta = \frac{|e(a)|}{a} = \frac{|e|}{a}$$

である. これら上の 2 陳列式より, (付.1.2.2) が出る. □

(付.1.2.1) の証明. 任意に $z \in C(a)$ を選び固定する. 次に同様任意の $C(a)$ の半円弧以下の閉部分弧 e で $z \in e$ であるものを一つ選び固定する. 最終的には e の長さ $|e| \searrow 0$ とする積りであるが, 当面とにかく $z \in e \subset C(a)$ かつ原点から

e を見込む角が π 以下のものを一つ固定する訳である. そこで $\partial R = C(a) \cap C(b)$ 上の e の特性函数 χ_e を考える. だから $\chi_e|_{C(a)} = \chi_e$ かつ $\chi_e|_{C(b)} = 0$ である. χ_e を境界値に持つ R 上の Dirichlet 問題の解 u を考える:

$$u(\zeta) = H_{\chi_e}^R(\zeta) \quad (\zeta \in R).$$

すると, R 上 $0 < u < 1$ だから $u \in h\mathcal{B}(R)$ である. 更に ∂R 上では $u|_R$ の Fatou 境界値を与えて, u は \bar{R} 上に拡張して考える, 即ち, $u(\zeta) = H_{\chi_e}^R(\zeta)$ ($\zeta \in R$), $u(\zeta) = \chi_e(\zeta)$ ($\zeta \in \partial R$). R の二分円 $\gamma = C(\sqrt{ab})$ 上に計測点 $w \in \gamma$ を持つ R の調和測度 ξ_w の定義により

$$u(w) = \int_{\partial R} u(\zeta) d\xi_w(\zeta) = \int_{\partial R} \chi_e(\zeta) d\xi_w(\zeta) = \int_e d\xi_w(\zeta) = \xi_w(e)$$

だから R に関するその二分円 $\gamma = C(\sqrt{ab})$ の Harnack 定数 $A_1 = A_1(b/a)$ の定義により

$$\xi_w(e) = u(w) \leq \max_{\gamma} u \leq A_1 \min_{\gamma} u \leq A_1 u(\zeta) \quad (\zeta \in \gamma)$$

となる. つまり $\xi_w(e) \leq A_1 u(\sqrt{ab}e^{it})$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) である. この両辺の平均をとる:

$$\xi_w(e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi_w(e) dt \leq A_1 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sqrt{ab}e^{it}) dt = A_1 u^*(\sqrt{ab}),$$

即ち, 結論のみ記せば

$$(付.1.2.4) \quad \xi_w(e) \leq A_1 \left(\frac{b}{a}\right) u^*(\sqrt{ab}).$$

ここで u^* の具体形を与える公式 (付.1.1.4) を使う. そのため, 境界値 $(u^*(a), u^*(b))$ を求めたい. 先ず $u^*(a)$ については, (付.1.2.2) により

$$u^*(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(ae^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_e(ae^{it}) dt = \frac{|e|}{2\pi a},$$

そして $u^*(b)$ も同様にして

$$u^*(b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(be^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_e(be^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 0 dt = 0$$

だから, 公式 (付.1.1.4) により

$$u^*(\zeta) = \frac{|e|}{2\pi a} \cdot \frac{\log|\zeta| - \log b}{\log a - \log b} \quad (\zeta \in \bar{R})$$

となるので, $\zeta = \sqrt{ab} \in \gamma \subset R$ を代入すれば

$$u^*(\sqrt{ab}) = \frac{|e|}{2\pi a} \cdot \frac{\log \sqrt{ab} - \log b}{\log a - \log b} = \frac{|e|}{4\pi a}$$

となる. これを (付.1.2.4) に代入して $\xi_w(e) \leq A_1(b/a) \cdot (|e|/4\pi a)$ となるので

$$\frac{\xi_w(e)}{|e|} \leq A_1 \left(\frac{b}{a}\right) \frac{1}{4\pi a}$$

である. 微分公式 $\lim_{z \in e, |e| \searrow 0} \xi_w(e)/|e| = (d\xi_w/ds)(z)$ により, 上記不等式により, (付.1.2.1) の第1の不等式である $z \in C(a)$ の場合が示された. $z \in C(b)$ の場合も同様にして (付.1.2.1) の第2の不等式が出る. \square

付.1.3. 環型領域型密度評価.

$R = R(a, b; K)$ ($0 < a < b < \infty$) と記し環型領域と呼ぶ球面 $\hat{\mathbb{C}}$ の無限遠点 ∞ を含む領域を考える. ここで, (i) K は $\{b \leq |z| < \infty\}$ 内の完閉集合, (ii) $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$ は連結, (iii) K は非極 (即ち, 対数容量正), の条件を満足する. そのとき

$$R(a, b; K) := \{z \in \hat{\mathbb{C}} : a < |z|\} \setminus K$$

と定める. 上記の $R(a, b; K)$ と了解出来る限りはこれを単に R と略記する. K の内点集合を \mathring{K} と記し, $\Lambda := K \setminus \mathring{K} = \partial K$ と記せば

$$\partial R(a, b; K) = C(a) \cup \Lambda,$$

即ち, $R(a, b; K)$ は円周 $C(a)$ と Λ とで囲まれた領域なので, これを示唆して環型領域と呼ぶのである. $C(a)$ を $R(a, b; K)$ の外境界, Λ を内境界と呼ぶ. よく出現する状況は K が完全非連結の場合で, そのときは $K = \Lambda$ なので, $R(a, b; K)$ は $C(a)$ と K で囲まれる \hat{C} の部分領域として分り易い. $R(a, b; K)$ の計測点 ∞ の調和測度を μ と記す. $C(a)$ 上の調和測度 $d\mu$ と弧長測度 ds は互いに絶対連続で, 密度 $d\mu/ds$ と $ds/d\mu$ は $C(a)$ 上正値解析的で $(d\mu/ds)(ds/d\mu) = 1$ である. 本小節付.1.3 では, この密度の評価式を与える.

同心円環 $R(a, b)$ ($0 < a < b < \infty$) の二分円 $\gamma = C(\sqrt{ab})$ の $R(a, b)$ に関する Harnack 定数 $A_1 = A_1(b/a)$ (本文小節 5.1 また小節付.1.2 参照) に基づいた定数

$$A = A\left(\frac{b}{a}\right) := 2A_1^2 = 2\left(A_1\left(\frac{b}{a}\right)\right)^2$$

を使う (本文 (5.1.8) 参照). 上述の $R = R(a, b; K)$ の計測点 ∞ の調和測度を μ とし外境界 $C(a) = \{|z| = a\}$ ($\subset R(a, b; K)$) 上の線素を ds と記すことにしたが, そのときの密度 ds/μ の評価式

$$(付.1.3.1) \quad \max_{C(a)} \frac{ds}{d\mu} \leq A\left(\frac{b}{a}\right) \min_{C(a)} \frac{ds}{d\mu} \leq A\left(\frac{b}{a}\right) \frac{2\pi a}{\mu(C(a))}$$

を本文の定理 5.1.10 の証明で, (付.1.2.1) 共々, 利用した. ここでは上の評価式 (付.1.3.1) を, 前小節の不等式 (付.1.2.1) に対してしたと同様に, 円周平均法を用いて導くことにする.

評価式 (付.1.3.1) の証明. $R(a, b; K) = R$ と略記し, 円周 $C(a)$ ($\subset \partial R$) 上の二分円弧以下の部分弧 e を任意に取りその長さ $|e| > 0$ とする. R の境界値函数として ∂R 上の e の特性函数 χ_e (即ち, $\chi_e|_e = 1$, $\chi_e|(\partial R \setminus e) = 0$) を取り, それに関する R 上の Dirichlet 問題の解 $H_{\chi_e}^R = u_e$ を考える. しばらく e は固定されるから $u_e = u$ と略記する. すると $u \in h\mathcal{B}(R)$ で, 更に u は ∂R で極集合 (即ち, 対数容量零集合) を除いて境界値 χ_e を持つ. もっと詳しくは外境界 $C(a)$ では e の両端点を除いては e 上 1, $C(a) \setminus e$ 上 0 の境界値を持ち, 内境界 $\partial R \setminus C(a) = \partial K$ では極集合を除いて境界値 0 を持つ訳である. そこで先ず

$$(付.1.3.2) \quad \mu(e) = u(\infty)$$

となることを注意する. 何故ならば, 調和測度の定義により

$$\mu(e) = \int_{\partial R} \chi_e(\zeta) d\mu(\zeta) = \int_{\partial R} u(\zeta) d\mu(\zeta) = u(\infty)$$

だからである. ここで, 補助的に 2 領域

$$R_1 := \{a < |z| < b\}, \quad R_2 := \{a < |z| \leq \infty\}$$

を利用する. R_1 は R の手元部分の同心円環 $R(a, b)$ であり, R_2 は R の穴 K を埋めた ∞ 中心の円周 $C(a)$ で囲まれた円板だから

$$(付.1.3.3) \quad R_1 \subset R \subset R_2$$

であり, この 3 領域とも円周 $C(a)$ を境界成分として共有する. $u_1 \in h\mathcal{B}(R_1)$ を

$$u_1|_e = 1, \quad u_1|(\partial R_1 \setminus e) = 0$$

を境界条件とする Dirichlet 問題の R_1 上の解とし, 同様に $u_1 \in h\mathcal{B}(R_2)$ を境界条件

$$u_2|_e = 1, \quad u_2|(\partial R_2 \setminus e) = 0$$

の R_2 上の Dirichlet 問題の解とする. その上で u_1 を $u_1|(\overline{R_2} \setminus \overline{R_1}) = 0$ で R_2 全体へ連続拡張し, また u は $u|_{\partial R} = \chi_e$ 及び $u|_{\dot{K}} = 0$ (但し, $\dot{K} = K \setminus \partial K$) で $\overline{R_2}$ 全体へ拡張して考えたら, u は $\overline{R_2}$ 上極集合を除いて連続となっており, そして $\overline{R_2}$ 上

$$(付.1.3.4) \quad u_1 \leq u \leq u_2$$

となっている. これら3函数 u_1, u, u_2 夫々の R_2 上で同心円周平均 u_1^*, u^*, u_2^* を作ると, $\overline{R_2}$ 上の函数としても, $[a, \infty]$ 上の函数としても,

$$(付.1.3.5) \quad u_1^*(r) \leq u^*(r) \leq u_2^*(r) \quad (z = re^{i\theta} \in \overline{R_2}, r \in [a, \infty])$$

となる. χ_e は ∂R 上で定義したが, $\chi_e|_{C(a)}$ の意味で χ_e と記し $C(a)$ 上の e の特性函数と考えると混乱は起きないであろう. すると, $C(a)$ 上

$$u_1 = u = u_2 = \chi_e$$

なので, (付.1.2.2) により

$$u_1^*(a) = u^*(a) = u_2^*(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_e(ae^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{ae^{i\theta} \in e} d\theta = \frac{|e|}{2\pi a}$$

となる. また明らかに $u_1^*(b) = 0$ で, よって境界値 $(u_1^*(a), u_1^*(b)) = \left(\frac{|e|}{2\pi a}, 0\right)$ の公式 (付.1.1.4) を使って u_1^* を求めると

$$(付.1.3.6) \quad u_1^*(r) = \frac{|e|}{2\pi a} \frac{\log r - \log b}{\log a - \log b} \quad (a \leq r \leq b)$$

が得られ, u_2^* は公式 (付.1.1.6) を使って

$$(付.1.3.7) \quad u_2^*(r) = \frac{|e|}{2\pi a} \quad (a \leq r \leq b)$$

が得られる. そこで $r = \sqrt{ab}$ に取ると (付.1.3.6) から $u_1^*(\sqrt{ab}) = |e|/(4\pi a)$, (付.1.3.7) から $u_2^*(\sqrt{ab}) = |e|/(2\pi a)$ であるから, (付.1.3.5) により

$$\frac{|e|}{4\pi a} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sqrt{ab}e^{i\theta}) d\theta \leq \frac{|e|}{2\pi a}$$

である. よって $w \in \gamma := C(\sqrt{ab})$ を任意に取るとき, 記法 $u = u_e$ を想起しながら

$$(付.1.3.8) \quad \frac{|e|}{4\pi a} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_e(we^{i\theta}) d\theta \leq \frac{|e|}{2\pi a} \quad (w \in \gamma)$$

が結論出来る. ここで e 同様の $C(a)$ の任意の部分弧 e_1 と e_2 を任意の $0 < \varepsilon < \pi$ に対して $|e_1| = |e_2| = \varepsilon$ となる様を選ぶ (最終的には $\varepsilon \searrow 0$ とする積り). (付.1.3.8) と同じであるが,

$$(付.1.3.9) \quad \frac{\varepsilon}{4\pi a} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_{e_j}(we^{i\theta}) d\theta \leq \frac{\varepsilon}{2\pi a} \quad (w \in \gamma, j = 1, 2).$$

先ず上式 (付.1.3.9) の右側の不等式を $j = 1$ で使って

$$\begin{aligned} A_1^{-1} \max_{\gamma} u_{e_1} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(A_1^{-1} \max_{\gamma} u_{e_1} \right) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\min_{\gamma} u_{e_1} \right) d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_{e_1}(we^{i\theta}) d\theta \leq \frac{\varepsilon}{2\pi a} \quad (w \in \gamma) \end{aligned}$$

となる. だから

$$(付.1.3.10) \quad A_1^{-1} \max_{\gamma} u_{e_1} \leq \frac{\varepsilon}{2\pi a}.$$

次いで上と同様に (付.1.3.9) の左側の不等式を $j = 2$ で使って

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{4\pi a} &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_{e_2}(we^{i\theta}) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\max_{\gamma} u_{e_2} \right) d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(A_1 \min_{\gamma} u_{e_2} \right) d\theta \leq A_1 \min_{\gamma} u_{e_2} \quad (w \in \gamma) \end{aligned}$$

となる. だから

$$(付.1.3.11) \quad \frac{\varepsilon}{2\pi a} \leq 2A_1 \min_{\gamma} u_{e_2}$$

となる. (付.1.3.10) と (付.1.3.11) から

$$A_1^{-1} \max_{\gamma} u_{e_1} \leq \frac{\varepsilon}{2\pi a} \leq 2A_1 \min_{\gamma} u_{e_2}$$

だから中央項を消して整理して $\max_{\gamma} u_{e_1} \leq 2A_1^2 \min_{\gamma} u_{e_2}$ となり, 新定数 $A = A(b/a)$ を

$$A = A\left(\frac{b}{a}\right) := 2A_1^2 = 2\left(A_1\left(\frac{b}{a}\right)\right)^2$$

と定めて用いるならば

$$(付.1.3.12) \quad \max_{\gamma} u_{e_1} \leq A \min_{\gamma} u_{e_2} \quad (|e_1| = |e_2| = \varepsilon \in (0, \pi))$$

となる. 最後に今一つの補助領域

$$S := R(\sqrt{ab}, b; K) = \{\sqrt{ab} < |z| < \infty\} \setminus K$$

を考える. (付.1.3.12) により

$$u_{e_1}|\gamma \leq \max_{\gamma} u_{e_1} \leq A \min_{\gamma} u_{e_2} \leq Au_{e_2}|\gamma$$

で, 他方 K 上極集合を除外すれば $u_{e_1} = u_{e_2} = 0$ であるから, $u_{e_1}|\partial K \leq Au_{e_2}|\partial K$ が極集合を除外して成り立つ. よって ∂S 上の極集合を除いて $u_{e_1} \leq Au_{e_2}$ が成り立つから, 最大値の原理により S 上 $u_{e_1} \leq Au_{e_2}$ となり, 特に $u_{e_1}(\infty) \leq Au_{e_2}(\infty)$ であるから, (付.1.3.2) により

$$(付.1.3.13) \quad \mu(e_1) \leq A\mu(e_2) \quad (e_1, e_2 \subset C(a), |e_1| = |e_2| = \varepsilon \in (0, \pi))$$

である. これから $\mu(e_1)/|e_1| \leq A(\mu(e_2)/|e_2|)$ となる. 任意の $z_j \in C(a)$ ($j = 1, 2$) をとめ, $z_j \in e_j$ ($j = 1, 2$) で $|e_1| = |e_2| = \varepsilon$ である様に e_1 と e_2 は選ばれていたとして $\varepsilon \searrow 0$ とすると

$$\frac{\mu(e_j)}{|e_j|} \rightarrow \frac{d\mu}{ds}(z_j) \quad (|e_j| \searrow 0)$$

であるから

$$\frac{d\mu}{ds}(z_1) \leq A\left(\frac{b}{a}\right) \frac{d\mu}{ds}(z_2) \quad (z_1, z_2 \in C(a))$$

となり, (付.1.3.1) の左側の不等式の成立が示された ($\frac{d\mu}{ds} \cdot \frac{ds}{d\mu} = 1$ に注意). 次いで

$$\begin{aligned} \mu(C(a)) \min_{C(a)} \frac{ds}{d\mu} &= \left(\min_{C(a)} \frac{ds}{d\mu} \right) \int_{C(a)} d\mu = \int_{C(a)} \left(\min_{C(a)} \frac{ds}{d\mu} \right) d\mu \\ &\leq \int_{C(a)} \frac{ds}{d\mu} d\mu = \int_{C(a)} ds = s(C(a)) = 2\pi a \end{aligned}$$

であるので, 最前方と最後方の 2 項を整理すれば

$$\min_{C(a)} \frac{ds}{d\mu} \leq \frac{2\pi a}{\mu(C(a))}$$

となり, (付.1.3.1) の右側の不等式の成立も従い, (付.1.3.1) がすべて示された.

付録 2. 零族補領域を持つ環状集合の存在

本論文の目的は Hardy 空間に対する平面領域の分類図に関する Heins の問題に完全解決を与えたとして著名な Hasumi による重要な論文 [4] についての研究検討の結果のレポートを提示することであった. 論文 [4] の中心となる主張は

$$(I) \quad \Phi \text{ と } \Psi \text{ を特異対 } \langle \Phi, \Psi \rangle \text{ をなす許容凸函数とするとき} \\ \mathcal{O}_{\Psi} < \mathcal{O}_{\Phi}$$

であった. 単純包含は自明故 $\mathcal{O}_\Phi \setminus \mathcal{O}_\Psi \neq \emptyset$ を示すことが求められる. 論文 [4] においてはこれを次の

$$(II) \quad \begin{array}{l} \text{任意の環状集合 } E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle} \text{ を取るとき} \\ \hat{C} \setminus E \in \mathcal{O}_\Phi \setminus \mathcal{O}_\Psi \end{array}$$

を示すことにより (I) の証明としている. 更に具体的には, 先ず,

$$(III) \quad \begin{array}{l} \text{任意の環状集合 } E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle} \text{ に対して} \\ H^\Phi(\hat{C} \setminus E) = \mathbb{C} \end{array}$$

を示し, 従って $\hat{C} \setminus E \in \mathcal{O}_\Phi$ となり, 次いで

$$(IV) \quad \begin{array}{l} \text{任意の環状集合 } E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle} \text{ に対して} \\ 1/z \in H^\Psi(\hat{C} \setminus E) \end{array}$$

を示し, 従って $H^\Psi(\hat{C} \setminus E) \neq \mathbb{C}$ となり, よって特に $\hat{C} \setminus E \notin \mathcal{O}_\Psi$ なので

$$(III) \ \& \ (IV) \implies (II) \implies (I)$$

により (I) が確立されたと言うのが Hasumi 論文 [4] の主張である. 我々の研究の結果として, [4] では (III) は完璧に正しい美しい証明が与えられているが, (IV) に関しては, 我々としては様々な努力を尽くした積りであるが, 次に述べる以上の見解に達する以外の道を見つけれなかった:

見解 付.2. (i) Ψ が非強凸ならば, すべての環状集合 $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ に対して

$$1/z \in H^\Psi(\hat{C} \setminus E)$$

であるが; (ii) Ψ が強凸ならば, 或る環状集合 $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ に対しては

$$1/z \notin H^\Psi(\hat{C} \setminus E).$$

これによれば (IV) は一般的には間違っていると言わざるを得ない. 従って本論文の本文では, (I) は Ψ が非強凸ならば正しいが (但し [4] でも [6] においても, この証明が与えられているわけではないと思う), Ψ が強凸の場合 (I) の成否は [4] でその主張に反して決定されている状態に無いと結論付けた.

Hasumi 論文 [4] の方向で (即ち, $\mathcal{O}_\Psi < \mathcal{O}_\Phi$ を示す反例を $\hat{C} \setminus E$ ($E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$) で求める方向で) 論文 [4] の結論 (I), 従ってその証明を正当化するには, 実は, $\hat{C} \setminus E \notin \mathcal{O}_\Psi$ が欲しいだけなので, (IV) は必要以上に贅沢で, もっと控え目に,

$$(IV)' \quad \begin{array}{l} \Psi \text{ が強凸のとき, } \underline{\underline{\text{或る環状集合 } E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}}} \text{ に対して} \\ 1/z \in H^\Psi(\hat{C} \setminus E) \end{array}$$

が示されたら $\hat{C} \setminus E \notin \mathcal{O}_\Psi$ を主張するに十分なのであるが, 本文でも述べた通り, これは非常に難しく, 不成立も予想される.

今一つ考えるべきは, $1/z \in H^\Psi(\hat{C} \setminus E)$ から $\hat{C} \setminus E \notin \mathcal{O}_\Psi$ を出す点についてであるが, $1/z \notin H^\Psi(\hat{C} \setminus E)$ が $1/z \in H^\Psi(\hat{C} \setminus E)$ を否定することは無論であるが, $\hat{C} \setminus E \notin \mathcal{O}_\Psi$ を否定するものでは無い点である. $1/z \notin H^\Psi(\hat{C} \setminus E)$ だからと言って, 何か別の或る $f \in A(\hat{C} \setminus E) \setminus \mathbb{C}$ があって $f \in H^\Psi(\hat{C} \setminus E)$ となるかも知れぬ. もしそうならば, (I) の成立を支持する側の応援となるので大歓迎である.

しかし, 実の所, 状況は次の如くであると予想される:

$$(*) \quad 1/z \notin H^\Psi(\hat{C} \setminus E) \ (E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}) \text{ ならば } H^\Psi(\hat{C} \setminus E) \cap A(\hat{C} \setminus \{0\}) = \hat{C}.$$

$1/z$ は $A(\hat{C} \setminus \{0\}) \setminus \mathbb{C}$ の中で最も $z \rightarrow 0$ のとき挙動が穏やかな函数で, それが $H^\Psi(\hat{C} \setminus E)$ に入らぬなら, \mathbb{C} 以外の他に $A(\hat{C} \setminus \{0\})$ の元で $H^\Psi(\hat{C} \setminus E)$ に入るものが無いと言う意味である. ここでは, (*) よりも相対的には随分弱い形の次の結果を与える:

定理 付.2. Ψ が強凸ならば, 或る環状集合 $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ に対して

$$H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) = H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) = \mathbb{C}.$$

これは $\hat{\mathbb{C}} \setminus E \in \mathcal{O}_\Psi \subset \mathcal{O}_\Phi$ を意味するので, (I) の証明である (II) が, Ψ が強凸のとき, 完全に間違いであることを示す点においては本文よりさらに強烈で完璧な (II) 不成立を示す反例となる.

本付録 2 の目的は, 上述の定理付.2 に証明を与えることである.

付.2.1 定理 付.2 の証明.

特異対 $\langle \Phi, \Psi \rangle$ をなす 2 つの強凸な許容凸関数 Φ と Ψ に対し, $E \in \Gamma_{\langle \Phi, \Psi \rangle}$ である環状集合 E で

$$(付.2.1.1) \quad H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) = H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) = \mathbb{C}$$

となるものの存在を示すことが, 定理付.2 の証明としての以下の所論の目的である. 先ず, 上掲 Ψ に対し, 同じく強凸で Δ_2 条件* を満たし, $\lim_{t \nearrow \infty} \Xi(t)/\Psi(t) = 0$ となる, 従って, 特に $\Xi \prec \Psi$ である[†] 強凸な許容凸関数 Ξ を採ることが出来る ([6] の p.331 の補題 2.1 参照). だから

$$(付.2.1.2) \quad \Xi \prec \Psi \prec \Phi$$

である. ここで, 定理 4.2.6 を想起する. そこで登場する環状集合 $E \in \Gamma$ の外枠定数 $0 < \rho < \delta < 1$ は任意で良い. 大外枠定数列 $(b_n)_{n=0}^\infty$ は $b_0 = 1$ および $b_n < 1/n$ ($n \in \mathbb{N}$) 以外は任意の正数列で良かったのであるが, 更に $(b_n)_{n=0}^\infty$ には上の δ に対する (3.3.10) を満たすことを要求する所の所謂 $\langle \Phi, \Psi \rangle$ 大外枠定数列 (4.1 参照) となる様にする. そこで外枠定数列 $(a_n)_{n=0}^\infty$ と, 以上の外枠構造に加えての本体構造における成分集合列 $(E_n)_{n=0}^\infty$ は, 以下の諸性質を満たすとす: $0 < a_n < b_n$ ($n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$), $a_{n+1} \leq \rho a_n$ ($n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$); 各 $n = 0, 1, \dots$ に対し $E_n \subset \mathbb{C}$ は \mathcal{N}_Ξ 由来の \mathcal{N}_Φ 級零集合であると同時に対数容量正である完閉集合で

$$E_n \subset \{\delta a_n \leq |z| \leq a_n\} \quad (n \in \{0\} \cup \mathbb{N})$$

を満たし, 更に, 或る $0 < d < 1$ に対し, $d \leq \Phi(-\log(na_n)) m(E_n) \leq 1$ ($n \in \mathbb{N}$) となる, 但し \mathcal{N}_Ξ 由来の \mathcal{N}_Φ とは, とにかく各 E_n は本来 \mathcal{N}_Φ 級でなければならぬのであるが, (付.2.1.2) より $\mathcal{N}_\Xi \subset \mathcal{N}_\Psi \subset \mathcal{N}_\Phi$ なので, $E_n \in \mathcal{N}_\Xi$ に取っておくことにより $E_n \in \mathcal{N}_\Phi$ であるが, 出自は $E_n \in \mathcal{N}_\Xi$ であると言う意味である. そして最も重要な定理 4.2.6 の提供部分は

$$(付.2.1.3) \quad \Xi(-\log a_n) m_n(C(a_n)) \geq n \quad (n \in \mathbb{N})$$

の成立である. このようにして定めた本体構造

$$(付.2.1.4) \quad E := \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \right) \cup \{0\}$$

が (付.2.1.1) の環状集合 E であることを示したい. この E は定理 4.2.6 の謂う所の単なる $E \in \Gamma$ ではなく, E の外枠構造も本体構造も定理 4.2.6 を超えた上記の付帯制約の帰結として $E \in \Gamma_{\langle \Psi, \Phi \rangle}$ となることを強調する.

よって (付.2.1.3) を満たす環状集合 (付.2.1.4): $E \in \Gamma_{\langle \Psi, \Phi \rangle}$ の存在から出発する. 先ず

$$(付.2.1.5) \quad H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) \subset H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) \subset H^\Xi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) \subset A(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}),$$

を示す. 上記包含系列に現れる 3 個の包含関係中の最初の 2 個の包含については (付.2.1.2) より明らかなので, 最後の第 3 の包含関係のみを示したい故, $f \in H^\Xi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ を任意にとるとき $f \in A(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$ を言えば良い. そのため $S_0 := \{|z| > a_1\}$ および $S_n := \{a_{n+1} < |z| < \rho a_{n-1}\}$ ($n \in \mathbb{N}$) とおくならば, 各 $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ に対し $f \in H^\Xi(S_n \setminus E_n)$ であるが, $E_n \in \mathcal{N}_\Xi$ であるので

$$f \in H^\Xi(S_n \setminus E_n) = H^\Xi(S_n) \subset A(S_n) \quad (n \in \{0\} \cup \mathbb{N})$$

* 許容凸関数 X が Δ_2 条件を満たすための次に述べる必要十分条件は時には極めて有用である: X 固有の正数 $\alpha > 0$ が定まり, 任意の正数 $\beta > \alpha$ に対し, ある正数 $\gamma > 1$ が定まり, すべての $2\beta \leq t < \infty$ となる実数 t とすべての $|s| \leq \beta$ となる実数 s に対し, $\gamma^{-1} \leq X(t+s)/X(t) \leq \gamma$ となる.

[†] 2 つの許容凸関数 X と Y に対し, 或る実定数 $\alpha > 0$ と $\beta \geq 0$ があって $\alpha X(t) + \beta \geq Y(t)$ ($0 \leq t < \infty$) となるとき, $X \succ Y$, 或いは $Y \prec X$ と記す.

となる, 即ち, f は各 E_n ($n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$) まで, 従って $E \setminus \{0\}$ まで解析延長される. 故に $f \in A(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$ となり, $f(z)$ は $1/z$ の整級数で表される.

特殊判定定理 (定理 3.1.4) によれば, $1/z \in H^\Xi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ ならば

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \Xi(-\log a_n) m_n(C(a_n)) < +\infty$$

であったから, (付.2.1.4) の環状集合 E が (付.2.1.3) を満たすから

$$(付.2.1.6) \quad 1/z \notin H^\Xi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$$

となる. この一般化として, $1/z$ の 1 次多項式 $c_0 + c_1/z$ (c_0 と c_1 は \mathbb{C} の 2 定数で, 特に $c_1 \neq 0$) も $H^\Xi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ に入らぬことを示したい:

$$(付.2.1.7) \quad f := c_0 + c_1/z \notin H^\Xi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) \quad (c_0, c_1 \in \mathbb{C}, c_1 \neq 0).$$

上と同様に, 今度は一般判定定理 (定理 3.2.1) によれば, $f \in H^\Xi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E)$ ならば (3.2.3) が成り立つのだから, (3.2.3) の否定

$$(付.2.1.8) \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{C(a_n)} \Xi(\log^+ |f(z)|) dm_n(z) = +\infty$$

が成り立つなら, (付.2.1.7) が従う. よって (付.2.1.7) を示す目的で, 以下では上式, 即ち, (付.2.1.8) を導く. $f(z) = c_0 + c_1/z$ ($c_1 \neq 0$) に対して $z = a_n e^{i\theta} \in C(a_n)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) であると

$$|f(z)| = |f(a_n e^{i\theta})| = |c_1 e^{-i\theta}/a_n + c_0| \geq |c_1|/a_n - |c_0| = a_n^{-1}(|c_1| - |c_0|a_n)$$

により, $a_n \searrow 0$ ($n \nearrow \infty$) なので, 或る $n_0 \in \mathbb{N}$ に対し, $|c_1| - |c_0|a_n \geq |c_1|/2$ ($n \geq n_0$) となる. よって

$$\log |f(z)| \geq -\log a_n + \log |c_1|/2 > 0 \quad (n \geq n_1 \geq n_0)$$

となる $n_1 \in \mathbb{N}$ が定まる. これから

$$\log^+ |f(z)| = \log |f(z)| \geq -\log a_n + \log \frac{|c_1|}{2} \quad (n \geq n_1)$$

である. Ξ は Δ_2 条件を満たすから, 或る $\tau > 1$ が定まって

$$\Xi(\log^+ |f(z)|) \geq \Xi\left(-\log a_n + \log \frac{|c_1|}{2}\right) \geq \tau^{-1} \Xi(-\log a_n) \quad (z \in C(a_n), n \geq n_1)$$

となる. それ故 (付.2.1.3) を使って

$$\begin{aligned} \int_{C(a_n)} \Xi(\log^+ |f(z)|) dm_n(z) &\geq \int_{C(a_n)} \tau^{-1} \Xi(-\log a_n) dm_n(z) \\ &= \tau^{-1} \Xi(-\log a_n) m_n(C(a_n)) \geq \frac{n}{\tau} \quad (n \geq n_1) \end{aligned}$$

が得られる. これから直ちに (付.2.1.8) が出て (付.2.1.7) が結論される.

本証明の最重要な最後のステップである $H^\Xi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) = \mathbb{C}$, 即ち, $\hat{\mathbb{C}} \setminus E \in \mathcal{O}_\Xi$ の証明に入る. そのための色々な小さな仕掛けの組み立てを行う. 先ず, 外枠定数 $0 < \rho < \delta < 1$ に加えて, 今一つの定数 $\sigma := (\delta/\rho)^{1/2} \in (1, \infty)$ を導入する. $\sigma^2 a_n \leq (\delta/\rho) \cdot (\rho a_{n-1}) = \delta a_{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$) であるから, $a_n < \sigma a_n < \sigma^2 a_n \leq \delta a_{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$) となる. そこで中心 0 の同心円環 $W_n := \{a_n < |z| < \sigma^2 a_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) を考えるとき, 上述の関係から

$$(付.2.1.9) \quad W_n \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus E \quad (n \in \mathbb{N})$$

となる. W_n の内 (または, 外) 境界円周の半径 a_n (または, $\sigma^2 a_n$) の相乗平均 $(a_n \cdot \sigma^2 a_n)^{1/2} = \sigma a_n$ を \hat{a}_n と記す: $\hat{a}_n = \sigma a_n$ ($n \in \mathbb{N}$). そのとき円周 $C(\hat{a}_n)$ ($= C(\sigma a_n)$) は W_n 内の完閉集合であるが, それを W_n の二分円周と呼ぶ ($n \in \mathbb{N}$). W_n の二分円周 $C(\hat{a}_n)$ の W_n に関する Harnack 定数を $\hat{\kappa}$ と記す, 即ち,

$$(付.2.1.10) \quad \hat{\kappa} := \sup \left\{ \max_{C(\hat{a}_n)} w / \min_{C(\hat{a}_n)} w : w \in h^+(W_n) \setminus \{0\} \right\},$$

ここに $h^+(W_n)$ は W_n 上の非負調和函数全体の族とする. Harnack の不等式により $1 < \hat{\kappa} < \infty$ である ((5.1.2) 参照) が, 更に重要な注意点は, $\hat{\kappa}$ は $n \in \mathbb{N}$ に依存しない, 即ち, 任意の番号組 $1 \leq m < n$ に対し $C(\hat{a}_m)$ の W_m に関する Harnack 定数も $C(\hat{a}_n)$ の W_n に関する Harnack 定数も互いに完全に一致する, ことである. 何故なら図形群 $\{(W_n, C(\hat{a}_n)) : n \in \mathbb{N}\}$ は次の意味で等角不変だからである, 即ち, 任意の番号組 $1 \leq m < n$ に対し, $z \mapsto \phi(z) := (a_n/a_m)z$ で定まる写像 ϕ を用いると, $\phi: \overline{W}_m \rightarrow \overline{W}_n$ は等角写像で, $\phi(C(a_m)) = C(a_n)$, かつ $\{u \circ \phi^{-1} : u \in h^+(W_m)\} = h^+(W_n)$ だからである.

本論文でもこれまで, 表記記号はともかく実質的には一番高い頻度で扱って来た領域は

$$R_n := \{a_n < |z| \leq \infty\} \setminus E = \{a_n < |z| \leq \infty\} \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{n-1} E_j \right) \quad (n \in \mathbb{N})$$

である. この領域 R_n の計測点 ∞ の調和測度は m_n と記して来た. これに加えて最後に今一つ R_n に類似の新領域

$$\hat{R}_n := \{\hat{a}_n < |z| \leq \infty\} \setminus E = \{\hat{a}_n < |z| \leq \infty\} \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{n-1} E_j \right) \quad (n \in \mathbb{N})$$

を導入し, R_n に m_n を随伴させたと同様, この新領域 \hat{R}_n にも計測点 ∞ の調和測度 \hat{m}_n を随伴させる. すると $(R_n)_{n=1}^\infty$ も $(\hat{R}_n)_{n=1}^\infty$ も共に $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$ の中心 0 方向への近似で

$$(付.2.1.11) \quad R_n \supset \hat{R}_n \supset R_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

の包含関係にあり, 更に関連調和測度に対しては, 次の大小関係にあることが分かる:

$$(付.2.1.12) \quad m_n(C(a_n)) < \hat{m}_n(C(\hat{a}_n)) < m_{n-1}(C(a_{n-1})) \quad (n \geq 2).$$

さて $H^\Xi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) = \mathbb{C}$ を示すのに背理法を使う, 即ち, 主張に反して $f \in H^\Xi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) \setminus \mathbb{C}$ となる f が存在すると仮定する. 先ず (付.2.1.5) によれば $f \in A(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) \setminus \mathbb{C}$ である. f に対し $M(r, f)$ を

$$M(r, f) := \sup_{|z|=r} |f(z)|$$

で定める. ここで, もし $\liminf_{n \rightarrow \infty} \hat{a}_n^2 M(\hat{a}_n, f) = 0$ とすると, f は $1/z$ の高々 1 次式となる. ところが, f が非定数であることと (付.2.1.7) よりそれは起り得ない. 従って, 次の不等式群が成り立つ: 或る番号 $n_0 \in \mathbb{N}$ が定まって

$$(付.2.1.13) \quad M(\hat{a}_n, f) > \frac{1}{\hat{a}_n} \quad (n \geq n_0).$$

とにかく $f \in H^\Xi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) \setminus \mathbb{C}$ ($\subset A(\hat{\mathbb{C}}_0)$) なので, 定義に戻れば, $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$ 上ある正值調和函数 u が存在して

$$\Xi(\log^+ |f(z)|) \leq u(z) \quad (z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus E)$$

となる. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, 領域 \hat{R}_n ($\subset \hat{\mathbb{C}} \setminus E$) 上境界条件が

$$\begin{cases} u_n|_{C(\hat{a}_n)} = u \\ u_n|_{\bigcup_{j=0}^{n-1} E_j} = 0 \end{cases}$$

である調和 Dirichlet 問題の Perron-Wiener-Brelot 解 u_n を考える. u と u_n の \hat{R}_n の境界値の比較により \hat{R}_n 上 $u \geq u_n > 0$ となるから, 特に $+\infty > u(\infty) \geq u_n(\infty)$ となる. 中でも u_n は $C(\hat{a}_n) = \partial \hat{R}_n \setminus (\bigcup_{j=0}^{n-1} E_j)$ において連続境界値 u を持つから, \hat{m}_n の定義により

$$u_n(\infty) = \int_{C(\hat{a}_n)} u_n(z) d\hat{m}_n(z) = \int_{C(\hat{a}_n)} u(z) d\hat{m}_n(z)$$

が得られる. 以上を纏め更に計算評価を進めて

$$+\infty > u(\infty) \geq u_n(\infty) = \int_{C(\hat{a}_n)} u(z) d\hat{m}_n(z) \geq \int_{C(\hat{a}_n)} \left(\min_{C(\hat{a}_n)} u \right) d\hat{m}_n(z) =: (i)$$

となる. u は W_n ($\subset \hat{\mathbb{C}} \setminus E$) 上の正値調和函数で, W_n に関する二分円周 $C(\hat{a}_n)$ の Harnack 定数 $\hat{\kappa}$ は $1 < \hat{\kappa} < \infty$ である番号 $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ から独立の定数で, $\min_{C(\hat{a}_n)} u \geq (1/\hat{\kappa}) \max_{C(\hat{a}_n)} u$ となる. よって

$$(i) \geq \int_{C(\hat{a}_n)} \left(\frac{1}{\hat{\kappa}} \max_{C(\hat{a}_n)} u \right) d\hat{m}_n(z) = \frac{1}{\hat{\kappa}} \left(\max_{C(\hat{a}_n)} u \right) \cdot \hat{m}_n(C(\hat{a}_n)) =: (ii)$$

となる. $C(\hat{a}_n)$ ($\subset \hat{\mathbb{C}} \setminus E$) 上 $u \geq \Xi(\log^+ |f|)$ であるから, 十分大である番号 $n_1 \geq n_0$ に対するすべての $n \geq n_1$ で, (付.2.1.13) を使って

$$\begin{aligned} \max_{z \in C(\hat{a}_n)} u(z) &\geq \max_{z \in C(\hat{a}_n)} \Xi(\log^+ |f(z)|) \\ &= \Xi \left(\max_{z \in C(\hat{a}_n)} \log^+ |f(z)| \right) = \Xi \left(\log^+ \left(\max_{z \in C(\hat{a}_n)} |f(z)| \right) \right) \\ &= \Xi(\log^+ M(\hat{a}_n, f)) \geq \Xi \left(\log^+ \frac{1}{\hat{a}_n} \right) = \Xi \left(\log \frac{1}{\hat{a}_n} \right) \quad (n \geq n_1) \end{aligned}$$

が導かれる. だから上の (ii) に続いて, $n \geq n_1$ であるすべての $n \in \mathbb{N}$, 即ち, 十分大なすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(ii) \geq \frac{1}{\hat{\kappa}} \Xi(-\log \hat{a}_n) \hat{m}_n(C(\hat{a}_n)) =: (iii)$$

となる. $\hat{a}_n = \sigma a_n$ より $\log \hat{a}_n = \log a_n + \log \sigma$ であるから, Ξ が Δ_2 条件を満たす故, 或る定数 $\gamma > 1$ が定まり

$$\Xi(-\log \hat{a}_n) = \Xi(-\log a_n + \log \sigma) \geq \frac{1}{\gamma} \Xi(-\log a_n)$$

が十分大なすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して成立する. また (付.2.1.12) で見る限り

$$\hat{m}_n(C(\hat{a}_n)) > m_n(C(a_n))$$

である. 更に (付.2.1.3) も想起する. これから上の (iii) について, 十分大きなすべての $n \in \mathbb{N}$ について

$$(iii) \geq \frac{1}{\hat{\kappa}\gamma} \Xi(-\log a_n) m_n(C(a_n)) \geq \frac{1}{\hat{\kappa}\gamma} n =: (iv)$$

が成り立つことが分かる. つまり上述の (i) – (iv) を総合して

$$+\infty > u(\infty) > \frac{n}{\hat{\kappa}\gamma}$$

が十分大きなすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して成立すると言う矛盾が導かれ, 我々の目指した $H^\Xi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) = \mathbb{C}$ の成立が結論出来る. (付.2.1.5) より

$$H^\Xi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) \supset H^\Psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) \supset H^\Phi(\hat{\mathbb{C}} \setminus E) \supset \mathbb{C}$$

だから, (付.2.1.1) が示されたことになり, 定理付.2 の証明が完結する. \square

参 照 文 献

- [1] L. AHLFORS AND A. BEURLING: *Conformal invariants and function theoretic null-sets*, Act. Math. **83**(1950), 101–129.
- [2] L. AHLFORS AND L. SARIO: *Riemann Surfaces*, Princeton Univ. Press, 1960.
- [3] C. CONSTANTINESCU UND A. CORNEA: *Ideale Ränder Riemannscher Flächen*, Springer, 1963.
- [4] M. HASUMI: *Hardy classes on plane domains*, Ark. Mat., **16**(1978), 213–227.
- [5] M. HASUMI: *Hardy Classes on Infinitely Connected Riemann Surfaces*, Lecture Notes in Math., Vol. **1027**, Springer, 1983.
- [6] M. HASUMI: *Hardy Classes on Riemann Surfaces — A Modern Introduction —*, Uchida Rokakuho Publishing Co., Ltd., 2010 (in Japanese).
- [7] J. HEINONEN, I. KILPELÄINEN AND O. MARTIO: *Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations*, Clarendon Press, 1993.

- [8] M. HEINS: *Hardy Classes on Riemann Surfaces*, Lecture Notes in Math., Vol. **98**, Springer, 1969.
- [9] D. A. HEJHAL: *Classification theory for Hardy classes of analytic functions*, Bull. Amer. Math. Soc., **77**(1971), 767–771.
- [10] D. A. HEJHAL: *Classification theory for Hardy classes of analytic functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **566**(1973), 1–28.
- [11] S. KOBAYASHI: *On H^p classification of plane domains*, Kodai Math. Sem. Rep., **27**(1976), 458–463.
- [12] S. KOBAYASHI: *On a classification of plane domains for Hardy classes*, Proc. Amer. Math. Soc., **68**(1978), 79–82.
- [13] M. NAKAI, J. NARITA AND S. SEGAWA: *Hardy spaces of entire functions*, Bull. Daido Univ., **52**(2016), 5–60 (in Japanese).
- [14] M. PARREAU: *Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classifications des surfaces de Riemann*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **3**(1951), 103–197.
- [15] L. SARIO AND M. NAKAI: *Classification Theory of Riemann Surfaces*, Die Grundlehrer der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band **164**, Springer, 1970.
- [16] L. SARIO, M. NAKAI, C.WANG AND L. O. CHUNG: *Classification Theory of Riemannian Manifolds*, Lecture Notes in Math., Vol. **605**, Springer, 1977.

研究成果報告書 (掲載期間 2023.11.1－2024.10.31)

学術書

- (1) 安達裕司, 岩瀬厚司, 川寄一博, 神田輝一, 田中浩司, 辻隆治, 南部紘一郎, 松原周, 水越朋之, 山本卓, 渡邊陽一: 熱処理ガイドブック改訂第5版, 第3章 熱処理を原子の次元で考える, 大河出版, 2023.
- (2) 山田靖 他: 次世代パワーデバイスに向けた高耐熱高放熱材料の開発と熱対策, 第3章第8節, 技術情報協会, 2024.
- (3) 柳原克行: 「第7章 連邦制 事例 I : カナダの連邦制－多民族連邦制の可能性」, 岩崎正洋・松尾秀哉・岩坂将光編 『よくわかる比較政治学』, ミネルヴァ書房, 2024年(第2刷) .

教科書

- (1) 横山弥生 他: 可視化の図学, 第10章, その他, 株式会社ダイテック, 2024.
- (2) 中田晋自, 松尾秀哉, 柳原克行 他編著: 『[改訂新版] 入門政治学 365日』, ナカニシヤ出版, 2024年5月10日.

翻訳、評論等

- (1) 武藤隆: 「建築を設計することと実学主義 建築学部化と新校舎・X棟の環境の中で」, JIA MAGAZINE, 426号, pp.18-19, 2024年8月.
- (2) 船橋仁奈, Luca.M.F.Fabris: DAIDO UNIVERSITY×POLITECNICO DI MILANO 2020-2022, ISBN: 978-4-9907016-3-5, 大同ライフサービス, 2024年3月.
- (3) Davide Scaglia 著, 船橋仁奈訳: 私の見た日本 Vol.224 「日本で感じた穏やかな時間と心」, 近代建築 2024年8月号, 近代建築社, pp.34-35, 2024.08.
- (4) 小島一宏: 映画「おしよりん」児玉宜久監督, 毎日新聞(愛知・岐阜・三重版)「芸術食堂」欄, 2023年.
- (5) 小島一宏: 映画「隣人 X 疑惑の彼女」熊澤尚人監督, 毎日新聞(愛知・岐阜・三重版)「芸術食堂」欄, 2023年.
- (6) 小島一宏: 映画「PARFECT DAYS」ヴィム・ヴェンダース監督, 毎日新聞(愛知・岐阜・三重版)「芸術食堂」欄, 2023年.
- (7) 小島一宏: 映画「ある閉ざされた雪の山荘で」飯塚健監督, 毎日新聞(愛知・岐阜・三重版)「芸術食堂」欄, 2024年.
- (8) 小島一宏: 映画「コット、はじまりの夏」コルム・バレード監督, 毎日新聞(愛知・岐阜・三重版)「芸術食堂」欄, 2024年.
- (9) 小島一宏: 映画「レディ加賀」雑賀俊朗監督, 毎日新聞(愛知・岐阜・三重版)「芸術食堂」欄, 2024年.
- (10) 小島一宏: 映画「落下の解剖学」ジュスティース・トリエ監督, 毎日新聞(愛知・岐阜・三重版)「芸術食堂」欄, 2024年.
- (11) 小島一宏: 映画「ゴールド・ボーイ」金子修介監督, 毎日新聞(愛知・岐阜・三重版)「芸術食堂」欄, 2024年.
- (12) 小島一宏: 映画「デューン 砂の惑星 PART2」ドゥニ・ヴィルヌーヴ監督, 毎日新聞(愛知・岐阜・三重版)「芸術食堂」欄, 2024年.
- (13) 小島一宏: 映画「プリシア」ソフィア・コッポラ監督, 毎日新聞(愛知・岐阜・三重版)「芸術食堂」欄, 2024年.
- (14) 小島一宏: 映画「リバウンド」チャン・ハンジュン監督, 毎日新聞(愛知・岐阜・三重版)「芸術食堂」欄, 2024年.
- (15) 小島一宏: 映画「青春 18×2 君へと続く道」藤井道人監督, 毎日新聞(愛知・岐阜・三重版)「芸術食堂」欄, 2024年.
- (16) 小島一宏: 映画「ミッシング」吉田恵輔監督, 毎日新聞(愛知・岐阜・三重版)「芸術食堂」欄, 2024年.
- (17) 小島一宏: 映画「かくしごと」関根光才監督, 毎日新聞(愛知・岐阜・三重版)「芸術食堂」欄, 2024年.
- (18) 小島一宏: 映画「ホールドオーバーズ 置いてけぼりのホリディ」アレクサンダー・ペイン監督, 毎日新聞(愛知・岐阜・三重版)「芸術食堂」欄, 2024年.
- (19) 小島一宏: 映画「THE MOON」キム・ヨンファ監督, 毎日新聞(愛知・岐阜・三重版)「芸術食堂」欄, 2024年.

- (20) 小島一宏：映画「化け猫あんずちゃん」山下敦弘監督，久野遥子監督，毎日新聞（愛知・岐阜・三重版）「芸術食堂」欄，2024年。
- (21) 小島一宏：映画「ラストマイル」塚原あゆ子監督，毎日新聞（愛知・岐阜・三重版）「芸術食堂」欄，2024年。
- (22) 小島一宏：映画「ぼくのお日さま」奥山大史監督，毎日新聞（愛知・岐阜・三重版）「芸術食堂」欄，2024年。
- (23) 小島一宏：映画「ぼくが生きてる、ふたつの世界」呉美保監督，毎日新聞（愛知・岐阜・三重版）「芸術食堂」欄，2024年。
- (24) 小島一宏：映画「ジョーカー フォリ・ア・ドウ」トッド・フィリップス監督，毎日新聞（愛知・岐阜・三重版）「芸術食堂」欄，2024年。
- (25) 小島一宏：映画「骨なし灯籠」木庭撫子監督，毎日新聞（愛知・岐阜・三重版）「芸術食堂」欄，2024年。
- (26) 藤井浩明：統一論題報告へのコメント，労務理論学会誌，33号，pp.51-57，2024。

審査学術論文

- (1) 中本祐汰，小沢勇貴，平澤樂人，西脇武志，葛森秀夫：曲げ加工時の曲刃のたわみとスプリングバック挙動，塑性と加工，65巻，2024，764号，pp131-136。
- (2) Kazushige Tokuno, Takayuki Yonezawa, Genichi Shigesato, Hideo Tsutamori and Masahiro Hagino: Surface Relief Formation of Cyclic-Loaded Coarse-Grained Aluminum Polycrystals with Point Defect Clusters, *Material Transactions*, vol. 65, 2024, no. 5, pp502-511.
- (3) T. Tokoroyama, M. Okashita, N. Fusetani, M. Murashima, N. Hashizume, R. Tsuboi, H. Shiomi and N. Umehara: The 1 μ m wear particles entrainment in situ observation via fluorescent staining silica particles by silane coupling with Rhodamine B, *Frontiers in Mechanical Engineering*, Vol. 10, 2024, <https://doi.org/10.3389/fmech.2024.1371948>.
- (4) T. Tokoroyama, M. Okashita, R. Zhang, M. Murashima, R. Tsuboi, T. Yoshida, H. Shiomi, N. Umehara, Y. Asada, T. Sato and T. Muramatsu: The mechanism small wear particles entrainment in friction under boundary lubrication, *Frontiers in Mechanical Engineering*, <https://doi.org/10.3389/fmech.2024.1470312>.
- (5) Qi Hu, Lorenz Maier, Takeshi Nishiwaki, Christoph Hartmann, Wolfram Volk and Jeong Whan Yoon: User friendly FE Formulation for anisotropic distortional hardening model based on non-associated flow plasticity and its application to springback prediction, *Thin-Walled Structures*, vol. 202, 2024, 112142.
- (6) Yasumasa Chino, Xinsheng Huang, Naobumi Saito, Takeshi Nishiwaki, Takeshi Mohri and Mikio Matsuda: Effects of Process Parameters on Room-Temperature Deep Drawability of AZ31B Magnesium Alloy Sheets with Suppressed Basal Texture, *Material Transactions*, vol. 65, 2024, no. 3, pp346-351.
- (7) F. Itakura, T. Yamada, Y. Maeda, A. Hasuno, Y. Mochida : Examination of Variable Tilting Speed on Flow Behavior during Ladle Pouring in Die Casting using SPH Simulation, *International Journal of Metalcasting*, 2024, Online, DOI: 10.1007/s40962-024-01378-6.
- (8) Takao Okabe and Kei Somaya : Development of a Hydrostatic Bearing in High Vacuum Using an Ionic Liquid for a Semiconductor Fabrication Device, *Advanced in Science and Technology*, 139, 2024, pp.33-40.
- (9) Kei Somaya and Takao Okabe : Numerical Investigation of Bearing Characteristics of a Hydrostatic Thrust Bearing with a Flow-Control Restrictor Using a Bending Beam, *Advanced in Science and Technology*, 139, 2024, pp.41-49.
- (10) Masahiro Hagino : Development of Machining Device with Real-Time Visualization of Boundary Surface on Tool Rake Face and Cutting Chip, *International Journal of Automation Technology*, Vol.18, 2024, No.3, pp.352-357.
- (11) Ryoto Yamada, Ryuta Kamiya, Keito Nagata, Lu Dewei, Takashi Inoue and Masahiro Hagino: Relationship between Flow Field of Cutting Edge and Chip Dispersal during CFRP Drilling, *Journal of Advances in Science and Technology*, Vol. 139, 2024, pp.25-30.
- (12) Junji Miyamoto, Masashi Yoshida : Surface modification of AISI H13 tool steel via atmospheric-pressure plasma nitriding and superheated steam treatment, *ISIJ International*, 64, 2024, 1, pp.134-141.
- (13) 山本和弘，中山稜介，井原禎貴：酸化チタン触媒によるカーボン粒子の酸化促進効果，自動車技術会論文集，55巻，2024，4号，pp.759-764。
- (14) 吉田昌史，山崎誠志，奥宮正洋，内海能重：ガス窒化によりアルミニウム表面に形成した窒化アルミニウム皮膜の

- 構造, 熱処理, 63 巻, 2023, 6 号, pp. 341-346.
- (15) 久保田久和, 山本利一, 内海能重: エアエンジン教材の開発とデジタル製造技術を活用したものづくり教育, 日本産業技術教育学会誌, 65 巻, 2023, 4 号, pp.353-362.
- (16) 久保仁, 合田一喜, 吹田和嗣: 人とロボットが共存・協働・協調できる空間の社会的価値の考察—川崎重工 Future Lab HANEDA の挑戦—, 情報処理学会論文誌デジタルプラクティス, Vol.65, May 2024, No.5, pp.d54-d74.
- (17) 小谷明, 田中淑晴, 松浦優大: 衝撃波によって発生する空気中および水中のフィルタ背後圧力の測定と流れの可視化, 実験力学, 23 巻, 2023, 4 号, pp.304-309.
- (18) Kazutake Komori, Sou Kaneko: Predicting Ductile Fracture during Torsion Testing Using Dislocation Density Tensor, Engineering Fracture Mechanics, Volume 301, 2024, 110008(22 Pages).
- (19) 小森和武: 楕円空孔モデルおよびその他モデルを使用した金属加工中の延性破壊予測, 鉄と鋼, 110 巻, 2024, 8 号, pp.569-589.
- (20) 大澤文明, 稲熊幸雄: 突極界磁によるアウターロータ型ロータリ・リニアモータの高出力化の検討, 日本 AEM 学会誌, Vol. 32, 2024, No. 4.
- (21) 加納善明, 金清裕和, 鈴木洋平: 量産対応可能なアモルファス積層コアを用いた小型 EV 駆動用モータ, 電気学会論文誌 D (産業応用部門誌), 144 巻, 2024, 7 号, pp.538-547.
- (22) 榎原英記, 川福基裕: Raspberry Pi を用いた新規無線駆動車両の設計, 計測自動制御学会中部支部教育工学論文集, 46 巻, 2023, pp. 58-60.
- (23) Yoshiyuki Hattori, Tetsu Kachi: Comparison of body diode switching characteristics of 650V power devices, IEICE(電子情報通信学会) Electronics Express, volume 21, 2024, Issue 19, pp.1-6.
- (24) Nobuyuki Hagiwara, Yugo Fujishiro: Experimental and numerical analysis of a novel structure obtained by joining two tensegrity-based units using simple construction methods, International Journal of Space Structures, Vol.39, 2024, Issue 3, pp.157-171.
- (25) 佐藤翔, 井向日向, 犬飼利嗣, 藤森繁: コンクリート表面からの深さがドリル削孔速度と物質移動抵抗性に及ぼす影響, コンクリート工学年次論文集, Vol.46, 2024, No.1, pp.1777-1782.
- (26) 堀内優大, 長田知紘, 井向日向, 犬飼利嗣, 藤森繁: 試験体表面からの深さがドリル削孔速度と削孔試験跡で測定した簡易透気速度に及ぼす影響, コンクリート構造物の補修, 補強, アップグレード論文報告集 Vol.24, 2024, pp.441-446.
- (27) Murshalin Ahmed, Yukihiko Matsumoto, Rokhyun Yoon, Susumu Takahashi, Yasushi Sanada: Accurate measurement of the bond stress between rebar and concrete in reinforced concrete using FBG sensing technology, Sci Rep 14, 2024, 2119, <https://doi.org/10.1038/s41598-024-52555-w>.
- (28) 横島潤紀, 古味由惟, 森長誠, 辻村壮平, 須田直樹, 梅崎良樹, 山崎徹: 道路交通騒音に対する住民反応の住宅種別比較, 自動車技術会論文集, 55 巻, 2024, 5 号, pp. 960-966.
- (29) Yosuke Yasuda, Seiya Nishimura, Yu Kamiya, Makoto Morinaga: Three-dimensional numerical investigation on propagation characteristics of road traffic noise from an embankment road: Construction of correction formula for the effect of side slope angle, Acoustical Science and Technology, Vol. 45, 2024, No. 4, pp. 184-194.
- (30) Takashi Morihara, Yasuhiro Murakami, Koji Shimoyama, Makoto Morinaga, Shigenori Yokoshima, Sohei Tsujimura, Yasuhiro Hiraguri, Takashi Yano: Sleep Disturbance Caused by Step Changes in Railway Noise Exposure and Earthquakes, International Journal of Environmental Research and Public Health, Vol. 21, 2024, No. 6, 783.
- (31) Junichi Mori, Makoto Morinaga, Takumi Asakura, Takenobu Tsuchiya, Ippei Yamamoto, Kentaro Nishino, Shigenori Yokoshima: Three-Dimensional Positioning for Aircraft Using IoT Devices Equipped with a Fish-Eye Camera, Sensors, Vol. 23, 2024, No. 22, 9108.
- (32) 萬羽郁子, 光田恵: においの認知度およびにおい評価の性差・年齢差の検討—においを嗅いだ経験と嗜好性に着目して—, においかおり環境学会誌, 55 巻, 2024, 第 2 号, pp.90-97.
- (33) 嶋田喜昭, 石川雄大, 三村泰広, 坪井志朗: VR を用いた自転車通行場所選択要因の検討, 交通工学論文集, 第 10 巻, 2024, 第 1 号, pp.A_107-A_112.
- (34) 村上滉一, 樋口恵一, 三村泰広, 中野克己, 伊藤純: 愛知県下における無信号交差点の実態からみた出会い頭事故

の特徴, 交通工学論文集, 10 卷, 2024, 1 号, pp.A_333-A_338.

- (35) Yasuhiro Mimura, Keiichi Higuchi, Ryo Tomura, Shinji Yoshida : Effects of physical functional characteristics of older drivers on spatial cognition at unsignalized intersections, *Asian Transport Studies*, 10, 2024, 100140.
- (36) 唐澤海宏, 田村洋, 小室雅人, 宮寄靖大, 田中賢太 : SBHS500 材における繰返し弾塑性挙動のモデル化に関する検討, 鋼構造論文集, Vol.31, 2024, No.121, pp.121_27-121_42.
- (37) 中村健人, 宮寄靖大 : Cr-Ni 系ステンレス鋼製中空正方形断面柱の座屈強度評価法, 土木学会論文集, Vol.79, 2023, No.12, 23-00173.
- (38) 荻野正雄 : 非一様度が低い点集合を用いた PINN によるポアソン方程式の予測モデル性能評価, *Transaction on JSCES*, Vol. 2024, 2024, Paper No. 2024003, <https://doi.org/10.11421/jscs.2024.2024003>.
- (39) 荻野正雄 : 2 次元静磁場問題の Non-overlapping 型領域分割法に基づく PINN, *Transaction on JSCES*, Vol. 2024, 2024, Paper No. 20240009, <https://doi.org/10.11421/jscs.2024.20240009>.
- (40) 渡邊祐太, 渡辺啓太, 桑野茂 : 低速無線を用いた RTK-GNSS による高精度測位の検討, 教育工学論文集, 46, 2023 年 12 月, 22, pp.64-66.
- (41) 不破勝彦, 沖村達也 : バイアスを伴う正弦波外乱を推定する外乱オブザーバの新設計法, 電気学会論文誌 C, 144 巻, 2024, 5 号, pp.512-525.
- (42) Kenji Kita : Design of inverse filter using H^∞ control theory for sound field reproduction with shoulder-mounted wearable-speakers, *Acoustical Science and Technology*, Vol.45, 2024, No.5, pp. 298-302.
- (43) Tadashi Ito, Hideshi Sugiura, Kentaro Natsume, Sho Narahara, Yoshifumi Sugimoto, Emi Matsuzawa, Hitomi Fujita, Yuji Ito, Kazunori Yamazaki, Natsuki Shimizu, Koji Noritake, Nobuhiko Ochi: Effects of Dance Music on Motor Skills and Balance in Children: An Observational Cohort Study, *Children*, Vol.11, 2024, No.9, 1128, pp.1-10.
- (44) Kazunori Yamazaki, Yoshihito Sakai, Tadashi Ito, Jo Fukuhara, Yoshifumi Morita: Percentage of decline in individual proprioceptors in older adults, *Journal of Physical Therapy Science*, Vol.36, 2024, No.9, pp.492-497.
- (45) Yoshihito Sakai, Yoshifumi Morita, Keitaro Kawai, Jo Fukuhara, Tadashi Ito, Kazunori Yamazaki, Tsuyoshi Watanabe, Norimitsu Wakao, Hiroki Matsui: Targeted vibratory therapy as a treatment for proprioceptive dysfunction: Clinical trial in older patients with chronic low back pain, *PLoS One*, Vol.19, 2024, No.7, pp.1-15.
- (46) Tadashi Ito, Hideshi Sugiura, Yuji Ito, Sho Narahara, Kentaro Natsume, Daiki Takahashi, Koji Noritake, Kazunori Yamazaki, Yoshihito Sakai, Nobuhiko Ochi: Relationship between low-back pain and flexibility in children: A cross-sectional study, *PLoS One*, Vol.18, 2023, No.11, pp.1-12.
- (47) 日高直保 : 発達障害のある子どもの母親のライフストーリー—発見というテーマから, 日本保健医療行動科学会雑誌, 38 巻, 2023, 2 号, pp.78-89.
- (48) 日高直保 : 不妊治療に関する選択と, 治療を行わない生き方の可能性—M さんのライフストーリーから, 質的心理学研究, 23 巻, 2024, pp.243-261.
- (49) 日高直保 : 哲学対話の成り立ちとその意義—生成という視点から—, 思考と対話, 6 巻, 2024, pp.14-25.
- (50) T. Futamura, T. Shimomura : Generalized solution of the double obstacle problem for Musielak-Orlicz Dirichlet energy integral on metric measure spaces, *Hiroshima Math. J.*, Vol. 53, 2023, No.3, pp.3569-372.
- (51) T. Futamura, T. Shimomura : Generalized fractional integral operators on weak Choquet spaces over quasi-metric measure spaces, *Czechoslovak Math. J.*, Vol. 74, 2024, No.3, pp.905-913.
- (52) K. Ueno: Attraction rates for iterates of a superattracting skew product, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 539, 2024, Issue 1, Part 1.
- (53) Shoichi Hasegawa : Singular solutions of semilinear elliptic equations with supercritical growth on Riemannian manifolds, *NoDEA. Nonlinear Differential Equations and Applications*, 31, 2024, no.3, 28pp.
- (54) Shogo Nishiyama, Tomohiro Kara, Brian Thorsbro, Hiromi Saida, Yohsuke Takamori, Masaaki Takahashi, Takayuki Ohgami, Kohei Ichikawa, and Rainer Schoedel : Origin of an orbiting star around the galactic supermassive black hole, *Proceedings of the Japan Academy Series B* 100, 2024, pp.86-99.
- (55) Hiromi Saida, Sena A. Matsui, Tsutomu T. Takeuchi, Shogo Nishiyama, Rio Saitou, Yohsuke Takamori, and Masaaki Takahashi : Parametrized Post-Newtonian Test of Black Hole Spacetime for Galactic Center Massive Black Hole Sgr A* : Formulation and χ^2 Fitting, *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2024,

093E02, pp.42.

- (56) Akihito Egi, Hiromasa Tanaka, Taiji Nakamura, Kazuya Arashiba, Yoshiaki Nishibayashi, Kazunari Yoshizawa : Computational screening of PCP-type pincer ligands for Mo-catalyzed nitrogen fixation, *Bulletin of the Chemical Society of Japan*, 97 卷, 2024, 5 号, uoae41 (12 pages).
- (57) Shingo Kuriyama, Yuye Zhang, Hiromasa Tanaka, Asuka Konomi, Akihito Egi, Kazunari Yoshizawa, Yoshiaki Nishibayashi : Synthesis and reactivity of iron-oxocyclohexadienyl complexes toward proton-coupled electron transfer, *Organometallics*, 43 卷, 2024, 21 号, pp.2736-2746.
- (58) 平林健治 : 日本人上級英語学習者の習熟度の違いによる自由英作文の統語的複雑さの推移, *言語文化学会*, 2024, 61 号, 未定.
- (59) 松井かおり : 外国につながる子ども達が参加する英語授業で教える学習支援員の経験とビリーフの変化—言語教育観, 異文化理解の変化に焦点をあてて—, 片平, 2024, 59 号, pp.67-76.

学術論文

- (1) Hajime Kato, Hideaki Ikehata, Shinji Mitao, Hironori Aoyama, Kouji Tanaka, Tadashi Oshima : Effects of Ni Content on Particle Size of Secondary Phase in Cu-Based Alloys with Liquid Immiscibility by Laser-Melting, *Material Transactions*, 65, 2024, No.12, *printing*.
- (2) 蔦森秀夫 : 板成形シミュレーション用の異方性モデルの予測精度評価, *ふらすとす*, 7 卷, 2024, 79 号, pp441-445.
- (3) 大橋祐哉, 坪井涼, 鈴木正也, 水野拓哉, 福留功二, 山本誠 : FENSAP-ICE を用いた着氷条件・解析条件に対する予測性能の比較, 第 52 回日本ガスタービン学会定期講演会講演論文集, 2024, C-14.
- (4) 浦口拓也, 坪井涼, 鈴木正也, 水野拓哉, 福留功二, 山本誠 : 着氷現象における固体表面への単一液滴衝突挙動の疑似 3 次元解析, *日本流体力学会*, 年会 2024 講演論文集, 2024, 2M110-15-06.
- (5) 浦口拓也, 坪井涼, 鈴木正也, 水野拓哉, 福留功二, 山本誠 : 着氷現象における固体表面への単一液滴衝突挙動の疑似 3 次元計測, *日本機械学会*, 東海支部 第 55 回学生員卒業研究発表講演会 講演前刷集, 2024, pp.83-84.
- (6) 大橋祐哉, 坪井涼, 鈴木正也, 水野拓哉, 福留功二, 山本誠 : FENSAP-ICE を用いた異なる着氷条件に対する予測性能の検証, *日本機械学会*, 東海支部 第 55 回学生員卒業研究発表講演会 講演前刷集, 2024, pp.85-86.
- (7) 岩田曹良, 坪井涼 : 凹型・凸型テクスチャを用いた摺動表面の性能向上に関する研究, *日本機械学会*, 東海支部 第 55 回学生員卒業研究発表講演会 講演前刷集, 2024, pp.131-132.
- (8) 鈴木智也, 坪井涼, 坪田頼昌 : 気液二相流シミュレーションを用いたピストンリング付近における潤滑油の流動に関する研究, *日本機械学会*, 東海支部 第 55 回学生員卒業研究発表講演会 講演前刷集, 2024, pp.137-138.
- (9) 小松正直, 坪井涼, 橋本卓也 : 縮小モデルを用いたカヌー競技用パドルの流体特性評価, *日本機械学会*, 東海支部 第 73 期総会講演会 予稿集, 2024, p.50.
- (10) 藤生新, 藤村宗一郎, 山本誠, 福留功二, 坪井涼, 水野拓哉, 鈴木正也 : SLD 着氷におけるスプラッシュ・バウンドモデルが着氷形状に与える影響に関する数値的研究, *日本機械学会*, 関東学生会 第 63 回学生員卒業研究発表講演会 講演予稿集, 2024.
- (11) 西脇武志 : 逆解析および機械学習を用いた切欠付丸棒引張試験による流動応力の同定, *ふらすとす*, 7 卷, 2024, 77 号, pp251-256.
- (12) 内海能亜, 吉田昌史, 中島邦斗 : アルミニウム合金押し出し角管の曲げ加工における熱処理の影響, *熱処理*, 64 卷, 2024, 4 号, pp.185-186.
- (13) 桑原利彦, 内海能亜, 白寄篤, 古島剛, 森昭寿, 吉田佳典, 吉村英徳 : 部材の極限軽量化に資する偏肉鋼管加工技術, *ふえらむ*, 29 卷, 2024, 4 号, pp.225-231.
- (14) 内海能亜 : 超薄肉方形管と偏心円管の曲げにおける変形および加工特性, *FORM TECH REVIEW*, 32 卷, 2024, 33 号, pp.15-20.
- (15) 内海能亜 : 偏心管の曲げ加工における変形メカニズムとその抑制法, *天田財団助成研究成果報告書*, 36 卷, 2023, pp.191-195.
- (16) 鈴木誠, 尾形和哉 : ROS パッケージの gmapping を用いた SLAM の性能評価, 計測自動制御学会中部支部教育工学研究委員会 教育工学論文集, 46 卷, 2023, pp.40-42.
- (17) 羽田暁裕, 小里泰章 : 積極的な渦操作による角柱まわりの流れ制御の試み, *教育工学論文集*, Vol. 46, 2023, pp.70-72.

- (18) 田村繁治, 安藤昌儀, 石井拓, 東川幸嗣, 岡本洋輔, 茂里康: <総説論文>先天性色弱者の色識別能力を改善する技術開発の歩み, 和歌山医学, 74 巻, 2023, 3 号, pp.105-110.
- (19) 高橋之: 帯状の支圧応力を受けるコンクリートの圧縮強度とひずみ度分布に関する実験, 日本建築学会大会学術講演梗概集 C-2, 2024. 8, pp. 3-4.
- (20) 松永知樹, 尹ロク現, 高橋之, 真田靖士: 二次元有限要素法解析を用いた RC ピロティ架構のシミュレーション解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集 C-2, 2024. 8, pp. 225-226.
- (21) 堀越哲美, 今西貴美, 加藤里実, 近藤恵美, 土川忠浩: 生気象学環境から見た日本のリゾート地における避暑・避寒特性, 愛知産業大学造形学部 造形学研究報, 20 号, 2024, pp.7-16.
- (22) 中野結香, 中川晴賀, 嶋田喜昭, 樋口恵一, 三村泰広, 葉袋奈美子: 路面装飾デザインの違いが自動車走行速度にもたらす影響—ドライビングシミュレータの走行データ分析から—, 第 44 回交通工学研究発表会論文集, 2024, pp.288-295.
- (23) 坪井志朗, 三村泰広, 嶋田喜昭: アソシエーション分析を用いた自転車関連事故の特性分析, 第 44 回交通工学研究発表会論文集, 2024, pp.364-369.
- (24) 伊藤純, 樋口恵一, 三村泰広, 山岸未沙子, 伊藤僚, 村上滉一: カラー舗装走行時の脳活動に関する基礎的研究, 第 44 回交通工学研究発表会論文集, 2024, pp.296-299.
- (25) 村松大智, 土井彩花, 出口大悟, 栗本崇, 君山博之: パケットモニタリングにおける時刻情報精度の影響に関する評価, 信学技報, Vol.123, 2024, NS2023-213, pp.240-245.
- (26) Takayuki Nakachi, Hiroyuki Kimiyama, Mitsuru Maruyama: A Lightweight Spatio-Color Scrambled EtC System for JPEG XS Standard, Proc. of 2024 7th International Conference on Information and Computer Technologies (ICICT), 2024, pp.228-232.
- (27) 新祥大朗, 間瀬友貴, 君山博之: モバイル通信速度の位置時刻依存性計測システムの提案, マルチメディア, 分散, 協調とモバイル (DICOMO2024) シンポジウム予稿集, 2024, pp.575-580.
- (28) 不破勝彦, 古澤佑哉, 木村颯斗: リアプノフ方程式に基づく外乱抑制制御に関する一考察, 計測自動制御学会中部支部教育工学論文集, 46 巻, 2023, pp.4-6.
- (29) 喜田健司: $H\infty$ 制御理論を用いた肩掛け型ウェアラブルスピーカの逆フィルタ設計~MIMO システムへの拡張と評価~, 信学技報, Vol.123, 2024, EA-No.401, pp.321-326.
- (30) 藤井浩明, 木村牧郎: イギリス労働運動の現状と課題—労働運動再生のための戦略, 日本労働研究雑誌, 2024, 772 号, pp.77-85.
- (31) 中村裕哲, 梶浦雅己: 外国市場参入時における M&A の変遷, AGU ビジネスレビュー, 4 巻, 2024, pp.101-116.
- (32) 日高直保: 発達障害のある子どもの母親の経験と主体性—A さんの語りから, 大同大学紀要, 59 巻, 2024, pp.1-10.
- (33) 川澄誠: 生徒指導提要の改定にともなう高等学校校則の現状と今後の課題, 『東海北陸教師研究』, 2024, 第 3 6 号, pp.15-26.

学会発表

- (1) 森下沈聖, 神崎隆男: 活性炭素繊維を利用した大気浄化装置のNOx除去率評価方法の検討, 大気環境学会, 第65回年会, 2024年9月, 東京.
- (2) 若森航大, 作野飛斗, 神崎隆男: 大気境界層の乱流構造に及ぼす異なる上空速度変動の影響, 日本機械学会, 2024 年度年次大会, 2024 年 9 月, 愛媛.
- (3) 松村修一郎, 白石裕之: 二原子分子気体を伝播するLSDの周期的レーザー照射強度変化に対する数値流体解析, JAXA, 平成5年度宇宙輸送シンポジウム, 2024年1月, 神奈川.
- (4) 松岡和輝, 白石裕之: 超音波振動源の複数化による浮き上がり火炎の燃焼持続時間に与える影響, 日本音響学会, 騒音・振動研究会, 2024 年 1 月, 東京.
- (5) 三村歩夢, 白石裕之: カーボンフリー燃料を用いた超音速燃焼条件の検討, 日本機械学会, 東海学生会 第 55 回学生員卒業研究発表講演会, 2024 年 3 月, 愛知.
- (6) 松岡和輝, 白石裕之: 複数の超音波音源を印加した浮き上がり火炎の持続性と音波強度との関係, 日本音響学会, 超音波研究会, 2024 年 6 月, 石川.
- (7) 松岡和輝, 飯田大智, 山本青空, 白石裕之: 印加超音波音圧レベルに対する浮き上がり火炎特性の検討, 日本音響

学会, 2024 年日本音響学会秋季講演会, 2024 年 9 月, 大阪.

- (8) Shu-ichiro Matsumura, Hiroyuki Shiraiishi : Response of Laser-Supported Detonation Propagating through a Diatomic Gas by Periodic Laser Irradiation, プラズマ応用科学会, ADVANCES IN APPLIED PLASMA SCIENCE 2024, 2024 年 9 月, 滋賀.
- (9) 谷藤晶, 池田賢一, 三浦誠司, 高田健 : 熱処理型アルミニウム合金の時効析出がクリープ変形挙動に及ぼす影響, 軽金属学会, 秋期講演大会, 2023 年 11 月, 東京.
- (10) 都築佑翔, 高田健 : Al-Mg-Si 合金における予備時効の硬化挙動への影響, 軽金属学会, 秋期講演大会, 2023 年 11 月, 東京.
- (11) 小原拓夢, 長谷川凱土, 高田健, 荒井重勇 : Al-Mg-Si 合金における時効条件の等温析出への影響, 軽金属学会, 秋期講演大会, 2023 年 11 月, 東京.
- (12) 西館光紀, 久保則文, 高田健 : Al-Mg 合金におけるセレーションと電気抵抗率変動の対応関係, 軽金属学会, 秋期講演大会, 2023 年 11 月, 東京.
- (13) 水野和也, 佐野大和, 高田健, 渡辺海斗, 齊藤元貴, 武藤俊介, Iesari Fabio, 神谷和孝, 岡島敏浩 : DSC 測定による等温時効を施した Al-Mg-Si 合金の析出挙動の調査, 軽金属学会, 秋期講演大会, 2023 年 11 月, 東京.
- (14) 鳥越翔真, 水野和也, 佐野大和, 高田健 : 等温時効熱処理を施した Al-Mg-Si 合金における加工挙動調査, 軽金属学会, 秋期講演大会, 2023 年 11 月, 東京.
- (15) 知野見仁紀, 前田和浩, 高田健 : パラジウム中水素の存在状態が電気抵抗率・温度へおよぼす影響, 金属学会・鉄鋼協会・軽金属学会, 材料フォーラム tokai, 2023 年 11 月, 名古屋.
- (16) 鳥越翔真, 佐野大和, 水野和也, 高田健 : Al-Mg-Si 合金における析出現象と加工硬化挙動, 金属学会・鉄鋼協会・軽金属学会, 材料フォーラム tokai, 2023 年 11 月, 名古屋.
- (17) 中嶋洋介, 伊藤良太, 久保則文, 西田光紀, 荒井重勇, 池田賢一, 小川登志男, 高田健 : 画像解析を用いたアルミニウム中の転位セル形成機構の調査, 金属学会・鉄鋼協会・軽金属学会, 材料フォーラム tokai, 2023 年 11 月, 名古屋.
- (18) Ken Takata, Yosuke Nakashima, Shigeo Arai : Characterization of dislocation behavior using machine-learning analysis of TEM images, International Conference on Materials and Systems for Sustainability, ICMass2023, 2023 年 12 月, 名古屋.
- (19) Genki Saito, Kaito Watanabe, Masahiro Ohtsuka, Shunsuke Muto, Kazuya Mizuno, Yamato Sano, Ken Takata, Fabio Iesari, Toshihiro Okajima : Precipitation behavior in an Al-Mg-Si alloy during low temperature aging by STEM and DSC analysis, International Conference on Materials and Systems for Sustainability, ICMass2023, 2023 年 12 月, 名古屋.
- (20) 齊藤元貴, 渡辺海斗, 武藤俊介, 水野和也, 鳥越翔真, 高田健, 岡島敏浩 : Al-Mg-Si 合金中の時効生成物の STEM-EDS 分析, 日本顕微鏡学会, 第 80 回学術講演大会, 2024 年 6 月, 千葉.
- (21) Yusho Tsuzuki, Ken Takata : Effect of pre-aging on hardening behavior in Al-Mg-Si alloys, International Conference on Aluminum Alloys, International Conference on Aluminum Alloys, ICAA19, 2024 年 6 月, Atlanta USA.
- (22) Yosuke Nakashima, Ken Takata, Shigeo Arai : Microstructural evolution during deformation in aluminum based on image analysis of TEM micrographs, International Conference on Aluminum Alloys, ICAA19, 2024 年 6 月, Atlanta USA.
- (23) Genki Saito, Kaito Watanabe, Masahiro Ohtsuka, Shunsuke Muto, Kazuya Mizuno, Yamato Sano, Ken Takata, Fabio Iesari, Toshihiro Okajima : Formation of precipitates in Al-Mg-Si alloys during isothermal aging, International Conference on Aluminum Alloys, ICAA19, 2024 年 6 月, Atlanta USA.
- (24) 齊藤元貴, 武藤俊介, 水野和也, 鳥越翔真, 高田健, 岡島敏浩 : STEM-EDS 強度の相関図を用いた Al 合金中の微小な時効生成物の抽出, 日本金属学会, 2024 年秋期大会, 2024 年 9 月, 大阪.
- (25) 長谷川凱土, 小原拓夢, 高田健, 荒井重勇 : Al-Mg-Si 合金中の過時効析出物の形態変化, 日本金属学会, 2024 年秋期大会, 2024 年 9 月, 大阪.
- (26) 辻篤志, 田中浩司 : 選択酸化により作製した Ag-SnO₂ 接点材の Cu 系基板へのレーザ接合, 日本銅学会, 第 64 回講演大会, 2024 年 10 月, ライトキューブ宇都宮.
- (27) 福富友哉, 田中浩司 : Cr-V 鋼の累積加熱における $\gamma + \alpha$ 域加熱が炭化物析出に及ぼす影響, 日本鉄鋼協会, 第 188 回講演大会第 60 回学生ポスターセッション, 2024 年 9 月, 大阪大学.

- (28) 辻篤志, 田中浩司: Cu/Cu-Ni-Cu 複合抵抗材のレーザ造形と電気特性, 日本金属学会, 第 174 回講演大会, 2024 年 3 月, 東京理科大学.
- (29) Kouji Tanaka, Yuya Fukutomi, Shuta Nishikawa, Yuki Kodama: Change in hardness and microstructure during cumulative heating of tool steel H13, 28th IFHTSE Congress (第 28 回熱処理国際会議), 2023 年 11 月, パシフィコ横浜.
- (30) 辻篤志, 田中浩司: Cu/Cu-Ni-Cu 複合抵抗材のレーザ造形と電気特性, 日本金属学会・日本鉄鋼協会東海支部, 第 33 回材料フォーラム TOKAI, 2023 年 11 月, 名古屋工業大学.
- (31) 渡邊静, 田中浩司: Ag 系接点材/Cu 基板の共晶接合における Ni の影響, 日本金属学会・日本鉄鋼協会東海支部, 第 33 回材料フォーラム TOKAI, 2023 年 11 月 6 日, 名古屋工業大学.
- (32) 葛森秀夫, 天石敏郎, 西脇武志: 二軸穴広げ試験によるスプライン降伏関数の予測精度評価, 機械学会, 第 37 回計算力学講演会, 2024 年 10 月, 仙台.
- (33) 山田恭平, 吉田直生, 葛森秀夫, 西脇武志: 最適化手法を用いた液圧バルジ中央部の応力の算出, 日本塑性加工学会, 2024 年度春季講演会, 2024 年 5 月, 東京.
- (34) 平澤樂人, 有村琉愛, 西脇武志, 葛森秀夫: 高張力鋼板の V 曲げ成形におけるバウシinger 効果特性の影響, 日本塑性加工学会, 第 74 回塑性加工連合講演会, 2023 年 11 月, 富山市.
- (35) 安藤大貴, 西脇武志, 葛森秀夫: 砂時計型試験片を用いて同定した異方性降伏関数の精度評価, 日本塑性加工学会, 第 74 回塑性加工連合講演会, 2023 年 11 月, 富山市.
- (36) 平松智哉, 吉田直生, 山田恭平, 西脇武志, 葛森秀夫: 異方硬化を考慮した一軸引張の解析と実験の変形挙動の比較, 日本塑性加工学会, 第 74 回塑性加工連合講演会, 2023 年 11 月, 富山市.
- (37) 大橋祐哉, 坪井涼, 鈴木正也, 水野拓哉, 福留功二, 山本誠: FENSAP-ICE を用いた着氷条件・解析条件に対する予測性能の比較, 日本ガスタービン学会, 第 52 回日本ガスタービン学会定期講演会, 2024.10, 高松.
- (38) 浦口拓也, 坪井涼, 鈴木正也, 水野拓哉, 福留功二, 山本誠: 着氷現象における固体表面への単一液滴衝突挙動の疑似 3 次元解析, 日本流体力学会 年会 2024, 2024.9, 仙台.
- (39) 浦口拓也, 坪井涼, 鈴木正也, 水野拓哉, 福留功二, 山本誠: 着氷現象における固体表面への単一液滴衝突挙動の疑似 3 次元計測, 日本機械学会, 東海支部 第 55 回学生員卒業研究発表講演会 TOKAI ENGINEERING COMPLEX 2024(TEC24), 2024.3, 名古屋.
- (40) 大橋祐哉, 坪井涼, 鈴木正也, 水野拓哉, 福留功二, 山本誠: FENSAP-ICE を用いた異なる着氷条件に対する予測性能の検証, 日本機械学会, 東海支部 第 55 回学生員卒業研究発表講演会 TOKAI ENGINEERING COMPLEX 2024(TEC24), 2024.3, 名古屋.
- (41) 岩田曹良, 坪井涼: 凹型・凸型テクスチャを用いた摺動表面の性能向上に関する研究, 日本機械学会, 東海支部 第 55 回学生員卒業研究発表講演会 TOKAI ENGINEERING COMPLEX 2024(TEC24), 2024.3, 名古屋.
- (42) 鈴木智也, 坪井涼, 坪田頼昌: 気液二相流シミュレーションを用いたピストンリング付近における潤滑油の流動に関する研究, 日本機械学会, 東海支部 第 55 回学生員卒業研究発表講演会 TOKAI ENGINEERING COMPLEX 2024(TEC24), 2024.3, 名古屋.
- (43) 小松正直, 坪井涼, 橋本卓也: 縮小モデルを用いたカヌー競技用パドルの流体特性評価, 日本機械学会, 東海支部 第 73 期総会・講演会 TOKAI ENGINEERING COMPLEX 2024 (TEC24), 2024.3, 名古屋.
- (44) 藤生新, 藤村宗一郎, 山本誠, 福留功二, 坪井涼, 水野拓哉, 鈴木正也: SLD 着氷におけるスプラッシュ・バウンドモデルが着氷形状に与える影響に関する数値的研究, 日本機械学会, 関東学生会 第 63 回学生員卒業研究発表講演会, 2024.3, 東京.
- (45) 西脇武志, 大谷友希, 葛森秀夫, 谷口智: プラスチック材料における流動応力のひずみ速度依存性の機械学習による同定, 日本塑性加工学会, 2024 年度春季講演会, 2024 年 5 月, 東京.
- (46) Y. Maeda, S. Yoshida, Y. Ito, T. Hanai, H. Makino: Cooling Behavior by Water Spray and Air-Blow on Green Sand with High-Temperature, The 75th World Foundry Congress, October 2024, Deyang China.
- (47) K. Miwa, K. Taki, Y. Maeda: Calculation Model of Casting Filter in Mold Filling Simulation using Particle-based SPH Method, The 75th World Foundry Congress, October 2024, Deyang China.
- (48) H. Kato, Y. Maeda: An Attempt to Identify Heat Transfer Coefficients in Casting CAE Using Cooling Curves, The 75th World Foundry Congress, October 2024, Deyang China.
- (49) 板倉風雅, 山田徹, 前田安郭, 蓮野昭人, 持田泰: ダイカストにおけるプランジャ前進速度を可変したときのアル

- ミニウム合金のスリーブ内波動挙動, 日本鑄造工学会, 第 184 回全国講演大会, 2024 年 10 月, 富山.
- (50) 近藤史崇, 前田安郭: 粒度分布をもつ離散要素を用いたスクィーズ造型解析における近傍粒子探索による高速化, 日本鑄造工学会, 第 184 回全国講演大会, 2024 年 10 月, 富山オンライン開催.
- (51) F. Kondo, Y. Maeda : Speeding up calculation time by specifying search range in squeeze compacting analysis using discrete elements with particle size distribution, The 16th World Congress on Computational Mechanics, July 2024, Vancouver.
- (52) 三輪建翔, 滝康佑, 前田安郭: SPH 粒子法を用いた充填シミュレーションにおける鑄造用フィルタの計算モデル, 日本鑄造工学会, 第 183 回全国講演大会, 2024 年 5 月, 東京.
- (53) 近藤史崇, 船橋幹人, 前田安郭: スクィーズ圧縮で造型される生型砂試験片の動的挙動解析, 日本鑄造工学会, 第 183 回全国講演大会, 2024 年 5 月, 東京.
- (54) 糸隆千穂, 安江拓哉, 竹川麻衣子, 前田安郭, 堀亜由美: 生型砂と RCS, 生型砂のコンパクトタビリティの違いがブロー造型挙動に及ぼす影響, 日本鑄造工学会, 第 183 回全国講演大会, 2024 年 5 月, 東京.
- (55) 加藤大翔, 出口大成, 前田安郭: 鑄造 CAE の条件が鑄巣欠陥の予測に及ぼす影響, 日本鑄造工学会, 第 183 回全国講演大会, 2024 年 5 月, 東京.
- (56) Y. Maeda, M. Funahashi, T. Kume, F. Kondo : Dynamic Compacting Analysis of Green Sand Testpiece Various Squeeze Conditions using Cooper-Eaton's Equation, The 16th Asian Foundry Congress, Extended Abstract, December 2023, Muroran.
- (57) T. Deguchi, T. Yamada, K. Taki, M. Hagino, Y. Maeda : Boundary Condition and Fluidity in Mold Filling of Aluminum Alloy, The 16th Asian Foundry Congress, Extended Abstract, December 2023, Muroran.
- (58) T. Yamada, F. Itakura, Y. Maeda, A. Hasuno, Y. Mochida: Injection Speed and Wave Behavior during Plunger Advancing in Aluminum Alloy Die Casting, The 16th Asian Foundry Congress, Extended Abstract, December 2023, Muroran.
- (59) 出口大成, 滝康佑, 前田安郭: 1/4 鑄造フィルタモデルを用いたアルミニウム合金溶湯の流動シミュレーション, 日本鑄造工学会東海支部, 2022 年度「鑄造技術対談と学生ポスターセッション」, 2023 年 11 月, 名古屋.
- (60) 板倉風雅, 山田徹, 前田安郭, 蓮野昭人, 持田泰: アルミニウム合金ダイカストのラドル傾動速度の可変条件と溶湯波動の関係, 日本鑄造工学会東海支部, 2022 年度「鑄造技術対談と学生ポスターセッション」, 2023 年 11 月, 名古屋.
- (61) Shutaro Machiya, Kozo Osamura : Measurement of mechanical behavior of ^{11}B enriched MgB_2 wire using pulsed neutron source, Mechanical and Electromagnetic Properties of Composite Superconductor Workshop, 11th Workshop on Mechanical and Electromagnetic Properties of Composite Superconductors, 2024 年 6 月, スポーツケン市.
- (62) 町屋修太郎, 長村光造, 菱沼良光, ステファヌスハルヨ, 川崎卓郎: MgB_2 線材の中性子散乱によるひずみ測定, 低温工学・超電導学会, 第 106 回 低温工学・超電導学会研究発表会, 2023 年 12 月, 下関市.
- (63) 岡部貴雄, 梅下尚己, 秋元敏和, 柚谷啓: ウェハ静電チャックへの非接触給電機構を持つ高真空対応薄型回転ステージ, 日本機械学会, 第 15 回生産加工・工作機械部門講演会, 2024 年 10 月 5 日, 郡山.
- (64) 柚谷啓, 岡部貴雄, 萩野将広: 真空対応静圧軸受の静特性に関する数値的検討, 日本機械学会, 第 15 回生産加工・工作機械部門講演会, 2024 年 10 月 5 日, 郡山.
- (65) 柚谷啓, 宮本潤示, 岡部貴雄: ウェハ浮上装置におけるイオン液体の接触角, 日本設計工学会, 2024 年度秋季大会研究発表講演会, 2024 年 9 月 22 日, 北見.
- (66) Takao Okabe, Kei Somaya : High-vacuum Compatible Liquid Cooling System using an Ionic Liquid for Semiconductor Fabrication Process, *The 5th International Conference on Machining, Materials and Mechanical Technologies (IC3MT2024)*, 2024 年 9 月 12 日, Phan Thiet (Viet Nam).
- (67) Takashi Inoue, Masahiro Hagino, Kei Somaya, Yuya Aoki, Wataru Aoki : Dressing Effect of High Melting Point Type Materials on Resin-Base Grinding Wheel, *The 5th International Conference on Machining, Materials and Mechanical Technologies (IC3MT2024)*, 2024 年 9 月 12 日, Phan Thiet (Viet Nam).
- (68) Reo Hanaki, Takashi Inoue, Kei somaya, Hiroshi Usuki, Yuya Aoki, Masahiro Hagino : Effect of Cutting Temperature to Material Deformation and Residual Stress after Face Milling, *The 5th International Conference on Machining, Materials and Mechanical Technologies (IC3MT2024)*, 2024 年 9 月 12 日, Phan Thiet (Viet Nam).

- (69) 岡部貴雄, 柚谷啓, 西村勝彦, 鹿園直毅: イオン液体を用いた高真空対応液体冷却機構の開発, 日本伝熱学会, 第 61 回日本伝熱シンポジウム, 2024 年 5 月 29 日, 神戸.
- (70) 足立尚哉, 柚谷啓, 近藤文義, 内田孝紀: 大気圧観測用針型プローブの計測精度に関する研究, 日本機械学会, 東海支部第 73 期講演会, 2024 年 3 月 5 日, 名古屋.
- (71) 萩野将広, 永田恵都, 井上孝司: S55C の黒皮の被削性に関する基礎的研究-黒皮が工具摩耗に与える影響-, 日本鉄鋼協会, 第 188 回秋季講演大会, 2024 年 9 月, 大阪.
- (72) Junji Miyamoto, Koki Shibata, Ryo Tsuboi: Effect of Partial Plasma Nitriding on the Tribological Properties of the AISI H13 Tool Steel, 28th International Federation for Heat Treatment and Surface Engineering (IFHTSE) Congress in Yokohama, 2023 年 11 月, 横浜.
- (73) 柴田幸紀, 宮本潤示: 工具鋼の部分プラズマ窒化処理がトライボロジー特性に与える影響, 日本熱処理技術協会, 日本熱処理技術協会第 96 回 (2023 年秋季) 講演大会, 2023 年 12 月, 福岡.
- (74) 佐々木諒, 宮本潤示: 誘電体バリア放電を用いた大気圧プラズマ軟窒化処理法の開発, 日本熱処理技術協会中部支部, 第 14 回日本熱処理技術協会中部支部講演大会, 2024 年 4 月, 愛知.
- (75) 津田真吾, 宮本潤示: プラズマ窒化における中性窒素種の影響解明に向けたニュートラルビームの作成とその特性評価, 日本熱処理技術協会中部支部, 第 14 回日本熱処理技術協会中部支部講演大会, 2024 年 4 月, 愛知.
- (76) 平野太一, 宮本潤示: イオン液体を用いたプラズマ浸室焼入れの開発, 日本熱処理技術協会中部支部, 第 14 回日本熱処理技術協会中部支部講演大会, 2024 年 4 月, 愛知.
- (77) 高橋尚幸, 宮本潤示: 大気圧プラズマジェット軟窒化処理法が鋼の機械的特性に与える影響, 日本機械学会, (一社) 日本機械学会 2024 年度年次大会, 2024 年 9 月, 愛媛.
- (78) 佐々木諒, 宮本潤示: 誘電体バリア放電を用いた鋼の大気圧プラズマ窒化処理, 日本機械学会, (一社) 日本機械学会 2024 年度年次大会, 2024 年 9 月, 愛媛.
- (79) 中山稜介, 山本和弘, 井原稜貴: 酸化チタンによる炭素粒子の酸化促進効果, 自動車技術会, 第 34 回内燃機関シンポジウム, 2023 年 12 月, 東京.
- (80) 松原俊亮, 吉田昌史, 内海能亜: 複合処理によるチタンへの窒化アルミニウム皮膜の形成, 精密工学会秋季学術講演会, 2024 年 9 月, 岡山.
- (81) 内海能亜: 超薄肉方形管と偏心円管の曲げ加工における変形および加工特性, 公益財団法人天田財団, 先進チューブフォーミング研究成果発表講演会, 2024 年 5 月, 東京.
- (82) 松原俊亮, 吉田昌史, 内海能亜: チタン表面への窒化アルミニウム皮膜の生成, 日本熱処理技術協会中部支部講演会, 2024 年 4 月, 愛知.
- (83) 内海能亜: 偏心管の曲げ加工における肉厚の均一化, 日本鉄鋼協会, 第 187 回春季講演大会, 2024 年 3 月, 東京.
- (84) S. Matsubara, M. Yoshida, N. Utsumi: Formation of Aluminum Nitride Layer on Aluminum Surfaces Using an Electric Discharge Process, The International Federation for Heat Treatment and Surface Engineering (IFHTSE) in Yokohama, 2023, 神奈川.
- (85) 林秀行, 大嶋和彦: ボールが歯形を沿うことで減速するクラウンボール減速機, 日本機械学会東海支部, 第 73 期総会講演会, 2024 年 3 月, 大同大学.
- (86) Kazuhiko OSHIMA, Ryoto ISHIGURO, Kazuya OGATA: Development of Static Load Sensor Utilizing both Direct and Inverse Piezoelectric Effect of Piezoelectric Element, The Japanese Society of Applied Electromagnetics and Mechanics, The 10th Asia-Pacific Symposium on Applied Electromagnetics and Mechanics, 2024 年 7 月, Melaka, Malaysia.
- (87) 鈴木誠, 尾形和哉: ROS パッケージを用いた SLAM の性能評価, 日本機械学会東海支部, 第 73 期総会講演会, 2024 年 3 月, 大同大学.
- (88) 間部直也, 尾形和哉: 力覚センサを用いたメカナムホイール台車の協調制御, 計測自動制御学会中部支部, 第 176 回教育工学研究会, 2024 年 9 月, 大同大学.
- (89) 高橋明大, 尾形和哉: AR マーカーを用いた自己位置推定と車輪型倒立振子の移動制御, 計測自動制御学会中部支部, 第 176 回教育工学研究会, 2024 年 9 月, 大同大学.
- (90) 羽田暁裕, 小里泰章: 積極的な渦操作による柱状物体まわりの流れ制御の試み, 日本機械学会東海支部, 第 73 期総会講演会, 2024 年 3 月, 名古屋.
- (91) 田村文乃, 篠原主勲, 西堀賢司, 長谷川昌之: 再現性向上を目指した紙製空中ブランコロボットの開発, 日本機械

- 学会東海支部，東海支部第 73 期総会・講演会，2024 年 3 月，大同大学.
- (92) 深谷明広，篠原主勲，西堀賢司，長谷川昌之：有松・鳴海絞りにおける染色条件と染色性に関する研究，日本機械学会東海支部，東海支部第 73 期総会・講演会，2024 年 3 月，大同大学.
- (93) 神戸駿斗，篠原主勲，西堀賢司，長谷川昌之：紙製空中ブランコロボットのマルチボディダイナミクス解析，日本機械学会東海支部，東海支部第 73 期総会・講演会，2024 年 3 月，大同大学.
- (94) 石川千馬，片岡京介，篠原主勲，西堀賢司，長谷川昌之：有松鳴海絞ロボットにおける樹脂キャップ反転装置の開発，日本機械学会東海支部，第 55 回学生員卒業研究発表講演会，2024 年 3 月，大同大学.
- (95) 田村文乃，篠原主勲，西堀賢司，長谷川昌之：機械的位置エネルギーに関する教材・玩具化を目指した紙製空中ブランコロボットの開発，日本機械学会 2024 年度年次大会，2024 年 9 月，愛媛大学.
- (96) Nakabo Y., Suita K., Anada K.: Proposal for “Anshin Stop Switch” based on behavior analysis, SIAS2024, 2024 年 6 月, Finland.
- (97) Nakabo Y., Suita K., Fujimoto H., Kubo H., Goda I., Kushibiki T., Ikuma H., Matsubayashi N., Takeshima H.: Case study of Conformity Assessment based on ISO 31101 and Safety management systems of Robotic Services, SIAS2024, 2024 年 6 月, Finland.
- (98) 林哲史，土肥正男，吹田和嗣：産業用ロボットの安全を実現した基盤技術-MK1234 の紹介，日本機械学会，機械の日・機械週間関連事業, No. 24-101 特別講演会，2024 年 8 月，名古屋.
- (99) 中坊嘉宏，吹田和嗣，穴田啓樹：行動分析に基づいた安心停止スイッチの適用と評価，日本ロボット学会，第 42 回日本ロボット学会学術講演会，2024 年 9 月，大阪.
- (100) 阿部聡，大隅久，吹田和嗣：複雑かつ大型機械装置等の締結部解体用革新的システムへの合業の適用検討，第 42 回日本ロボット学会学術講演会，2024 年 9 月，大阪.
- (101) 吹田和嗣：人を中心としたロボットとの協働・協調システムとその社会実装，日本機械学会，2024 年度年次大会 特別企画 先端技術フォーラム，2024 年 9 月，松山.
- (102) Kazutake Komori : Predicting ductile fracture during torsion testing using dislocation density tensor, The International Association for Computational Mechanics, The 16th World Congress on Computational Mechanics, July 2024, Vancouver, British Columbia, Canada.
- (103) 赤池宏之，梶田一真：磁性接合障壁層に向けた Ni 薄膜作成とその特性評価，第 71 回応用物理学会春季学術講演会，2024 年 3 月，東京.
- (104) 野村伊吹，梶田一真，赤池宏之：超伝導磁性混成デバイス応用を目指したニッケル系磁性薄膜の作製と評価，令和 6 年度電気・電子・情報関係学会東海支部連合大会，2024 年 8 月，岐阜.
- (105) 赤池宏之，梶田一真，野村伊吹：磁性ジョセフソン接合障壁層のための窒化ニッケル薄膜の作製，第 85 回応用物理学会秋季学術講演会，2024 年 9 月，新潟.
- (106) 小暮輝，鈴木秀羽人，井上慎之，植田俊明：風車ブレードのダイバーストリップによる雷捕捉性能向上に関する基礎的検討，電気学会，高電圧研究会，HV-24-056，2024 年 1 月，函館.
- (107) 山崎一也，植田俊明，ウティン，王道洪：雷放電の放電経路に関する基礎研究，電気学会，東海支部連合大会，B3-1，2024 年 8 月，岐阜.
- (108) 加納善明，今井岳彦，内山翔，沈慶春，松浦透，松岡孝一，村田康介，深山義浩，森本雅之：高効率化・省資源化に向けたモータの最新動向～高性能化～，電気学会，2024 年産業応用部門大会，2024 年 8 月，水戸市.
- (109) 加納善明，日南田純平，松井信行：自動車駆動用高速・大出力モータのロータ構造に関する研究，電気学会，2024 年産業応用部門大会，2024 年 8 月，水戸市.
- (110) 日南田純平，杉山雄亮，加納善明，松井信行：自動車駆動用埋込磁石同期モータの熱減磁評価技術，電気学会，2024 年産業応用部門大会，2024 年 8 月，水戸市.
- (111) 渡邊朝功，加納善明，金清裕和：アモルファス積層コアを用いた電動オートバイ用 IPM モータの設計，電気・電子・情報関係学会，令和 6 年度東海支部連合大会，2024 年 8 月，岐阜市.
- (112) 前川幸大，奥山美弘，加納善明：クローポール型モータの磁極位置推定方式の検討，電気・電子・情報関係学会，令和 6 年度東海支部連合大会，2024 年 8 月，岐阜市.
- (113) 加納善明，大石康博，山本泰三，藤網雅己，久保田晃弘：航空機電動化向けモータ応用システムの小型軽量・高出力密度化技術の動向と展望，電気学会，令和 6 年全国大会，2024 年 3 月，徳島市.
- (114) Yoshiyuki Hattori, Tetsu Kachi : Comparison of switching characteristics of 650V GaN power device and SiC/Si

- power devices, 14th International Conference on Nitride Semiconductors, 2023年11月, 福岡.
- (115) Takuma Yamaguchi, Katsuya Nomura, Yoshiyuki Hattori : Topology Optimization of Junction Termination Extension in Vertical GaN Power Device, 14th International Conference on Nitride Semiconductors, 2023年11月, 福岡.
- (116) 服部佳晋, 加地徹 : 耐圧 650V 系パワーデバイスのボディダイオードのスイッチング特性比較, 電気学会産業応用部門大会, 2024年8月, 水戸市.
- (117) K. Hidaka, A. Imai, S. Suzuki, J. Matsui, T. Sawamura, Y. Koga, Y. Yamada, S. Yasaka, H. Habuka : Power Module Evaluation Using High Heat Dissipation and High Heat Resistance Resin Sheet Containing Boron Nitride Filler, PCIM Europe 2024, 2024年6月, Germany.
- (118) 山田靖 : パワー半導体実装用接合技術と高温動作モジュール, よこはま高度実装技術コンソーシアム, 第57回実装技術 세미나, 2024年8月, オンライン開催.
- (119) 山田靖 : パワー半導体実装用接合技術と高温動作モジュール, エレクトロニクス実装学会, 第38回春季講演大会, 2024年3月, 千葉.
- (120) 佐藤翔, 辻奈那美, 福田沙弥花, 犬飼利嗣, 藤森繁 : コンクリート表面から深さ方向の距離がドリル削孔速度と物質移動抵抗性に及ぼす影響 その1 : 実験概要および表面から深さ方向の距離が含水率とドリル削孔速度に及ぼす影響, 日本建築学会, 2024年度大会, 2024年8月, 東京.
- (121) 福田沙弥花, 佐藤翔, 辻奈那美, 犬飼利嗣, 藤森繁 : コンクリート表面から深さ方向の距離がドリル削孔速度と物質移動抵抗性に及ぼす影響 その2 : 表面から深さ方向の距離がドリル削孔速度と吸水性状の関係に及ぼす影響, 日本建築学会, 2024年度大会, 2024年8月, 東京.
- (122) 辻奈那美, 佐藤翔, 福田沙弥花, 犬飼利嗣, 藤森繁 : コンクリート表面から深さ方向の距離がドリル削孔速度と物質移動抵抗性に及ぼす影響 その3 : 表面から深さ方向の距離がドリル削孔速度と空気流入量の関係に及ぼす影響, 日本建築学会, 2024年度大会, 2024年8月, 東京.
- (123) 松永知樹, 尹ロク現, 高橋之, 真田靖士 : ピロティ架構を有する RC 造建物の有限要素法解析 : 構造実験のシミュレーション解析, 第16回日本地震工学会シンポジウム, 2023年11月, 神奈川.
- (124) Susumu Takahashi : Experiment on space and capacity of dowel bars embedded in concrete, 18th World Conference on Earthquake Engineering, July 2024, Milan.
- (125) Susumu Takahashi: A strategy on seismic retrofit for RC structures based on cost-effectiveness, The 9th Korea-China-Japan Workshop on Structural Assessment and Health Monitoring, July 2024, Shizuoka.
- (126) 小田切彩夏, 米村美紀, 森長誠, 坂本慎一 : 環境騒音の空間性とうるささ評価の関係に関する実験的検討, 日本音響学会騒音・振動研究会, 2024年10月, 新潟.
- (127) 横島潤紀, 森長誠, 山崎徹 : 道路交通騒音の曝露と睡眠妨害反応との関係の経年変化, 日本音響学会秋季研究発表会, 2024年9月, 大阪.
- (128) 藪内和真, 横島潤紀, 森長誠, 牧野康一, 横山栄, 土肥哲也, 小林知尋, 山崎徹 : 自動車交通騒音に対する主観評価における低周波数成分の影響, 日本音響学会秋季研究発表会, 2024年9月, 大阪.
- (129) 小田切彩夏, 米村美紀, 森長誠, 坂本慎一 : 騒音の到来方向がうるささ評価に及ぼす影響に関する主観評価実験, 日本音響学会秋季研究発表会, 2024年9月, 大阪.
- (130) 小泊楓奈, 森淳一, 土屋健伸, 森長誠, 山元一平, 野澤竜祐, 花香和之, 川瀬康彰 : 航空機騒音に対する他の騒音の重畳判定 : CNN の学習データに含まれる機種の違いに伴う精度の差, 日本音響学会秋季研究発表会, 2024年9月, 大阪.
- (131) Junichi MORI, Funa KODOMARI, Takenobu TSUCHIYA, Makoto MORINAGA, Ipei YAMAMOTO: Accuracy for aircraft noise identification model generalized by applying swarm learning, 53rd International Congress & Exposition on Noise Control Engineering, 2024. 8, Nantes, France.
- (132) Makoto MORINAGA, Shigenori YOKOSHIMA, Sohei TSUJIMURA, Naoki SUDA, Yoshiki UMEZAKI, Toru YAMAZAKI: A case study on the exposure-response relationship of sleep disturbance due to road traffic noise - As a case in Japan in the 2020s, 53rd International Congress & Exposition on Noise Control Engineering, 2024. 8, Nantes, France.
- (133) Shigenori YOKOSHIMA, Makoto MORINAGA, Sohei TSUJIMURA, Naoki SUDA, Yoshiki UMEZAKI, Toru YAMAZAKI: Comparison of community response to road traffic noise by housing category, 53rd International Congress & Exposition on Noise Control Engineering, 2024. 8, Nantes, France.

- (134) T.T.H.N. NGUYEN, B.L. TRIEU, T.L. NGUYEN, M. MORINAGA, T. MORIHARA, Y. HIRAGURI, T. YANO, Y. SASAZAWA, P.N. T. DO, T.N. D. NGUYEN, Q. V. TRAN, D. T. BUI, H. H. TRAN: Assessment of sleep effects at a hospital near Tan Son Nhat Airport, Vietnam, 53rd International Congress & Exposition on Noise Control Engineering, 2024. 8, Nantes, France.
- (135) B.L. TRIEU, T.T.H.N. NGUYEN, T.L. NGUYEN, M. MORINAGA, Y. HIRAGURI, T. MORIHARA, T. YANO, Y. SASAZAWA, Q. V. TRAN, D. T. BUI, H. H. TRAN, T.N. D. NGUYEN, P.N. T. DO: The impact of confounding factors on moderating short-term responses to noise: A follow-up study conducted at a hospital near Tan Son Nhat Airport, 53rd International Congress & Exposition on Noise Control Engineering, 2024. 8, Nantes, France.
- (136) 森長誠, 小林知尋, 花香和之, 下山晃司, 篠原直明: 航空機騒音の音質および特異音に関する印象評価, 日本音響学会騒音・振動研究会, 2024年6月, 千葉.
- (137) 鬼頭雅之, 山内勝也, 森長誠: 高騒音車両の通過によって時間的に大きく変動する道路交通騒音のうるささに関する検討 -音源が異なる場合の検討-, 自動車技術会春季大会, 2024年5月, 神奈川.
- (138) 横島潤紀, 森長誠, 山崎徹: 道路交通騒音に対する住民反応の経年変化, 日本音響学会春季研究発表会, 2024年3月, 東京.
- (139) 古味由惟, 横島潤紀, 森長誠, 辻村壮平, 須田直樹, 梅崎良樹, 山崎徹: 新たな視点に基づく道路交通騒音に対する住民反応の評価構造の構築, 日本音響学会春季研究発表会, 2024年3月, 東京.
- (140) 小泊楓奈, 森淳一, 土屋健伸, 森長誠, 山元一平, 野澤竜祐, 花香和之, 川瀬康彰: 航空機騒音の AI 識別: 妨害音重量判定の分析手順に関する一検討, 日本音響学会春季研究発表会, 2024年3月, 東京.
- (141) 古味由惟, 横島潤紀, 森長誠, 辻村壮平, 須田直樹, 梅崎良樹, 山崎徹: 居住者視点に基づき構築した道路交通騒音に対する住民反応の評価構造について, 日本音響学会騒音・振動研究会, 2023年12月, 香川.
- (142) 小泊楓奈, 森淳一, 森長誠, 土屋健伸, 山元一平, 野澤竜祐, 花香和之, 川瀬康彰: 航空機騒音の AI 識別: 妨害音を考慮したモデル検討と Swarm Learning の応用の試み, 日本騒音制御工学会秋季研究発表会, 2023年11月, 山梨.
- (143) 森淳一, 森長誠, 土屋健伸, 高橋莉紗, 山元一平: コンピュータグラフィックと立体投影技術を応用した航空機測位カメラの校正試験の試み, 日本騒音制御工学会秋季研究発表会, 2023年11月, 山梨.
- (144) 古味由惟, 横島潤紀, 森長誠, 須田直樹, 梅崎良樹, 山崎徹: 道路交通騒音に対する住民反応の分析—居住者視点に基づき新たに抽出された項目に着目して—, 日本騒音制御工学会秋季研究発表会, 2023年11月, 山梨.
- (145) 森長誠, 小林知尋, 下山晃司, 中澤宗康, 篠原直明, 花香和之: 航空機騒音の低騒音化変遷に伴う音質の印象評価実験, 日本騒音制御工学会秋季研究発表会, 2023年11月, 山梨.
- (146) 下山晃司, 中澤宗康, 篠原直明, 花香和之, 森長誠, 小林知尋: 航空機騒音の低騒音化変遷に伴う音質評価の検討, 日本騒音制御工学会秋季研究発表会, 2023年11月, 山梨.
- (147) 堀越哲美, 加藤里実, 土川忠浩, 近藤恵美, 小松義典, 石松丈佳, 今西貴美: 気温の年次変動と長期的変化傾向から見た日本の年暑熱化—5 対隣接都市における階級別の気温諸値の傾向把握と比較—, 人間生活環境系学会, 第 47 回人間—生活環境系シンポジウム, 2023年11月, 福岡.
- (148) 大下颯真, 宮本征一, 近藤恵美, 桃井良尚: 気流を知覚し始める風速の閾値に関する研究 その 1 異なる風速下での青年男性の前腕を対象とした場合, 人間生活環境系学会, 第 47 回人間—生活環境系シンポジウム, 2023年11月, 福岡.
- (149) 赤井音央, 近藤恵美, 宮本征一: 気流を知覚し始める風速の閾値に関する研究 その 2 環境温と風温が異なる場合の検討, 人間生活環境系学会, 第 47 回人間—生活環境系シンポジウム, 2023年11月, 福岡.
- (150) 林憧子, 棚村壽三, 光田恵: 閾値測定におけるにおい袋内の湿度影響, 人間—生活環境系学会, 第 47 回人間—生活環境系シンポジウム (福岡), 2023年11月, 福岡.
- (151) 皆川史織, 鈴木琴音, 光田恵, 棚村壽三, 萬羽郁子: 介護環境臭における不快臭気成分の検討, 人間—生活環境系学会, 第 47 回人間—生活環境系シンポジウム (福岡), 2023年11月, 福岡.
- (152) 近江陽向, 棚村壽三, 光田恵: 複合集における官能評価と半導体ガスセンサによる測定の比較, 人間—生活環境系学会, 第 47 回人間—生活環境系シンポジウム (福岡), 2023年11月, 福岡.
- (153) 林憧子, 棚村壽三, 光田恵: におい評価への温度・湿度の影響—被験者室とにおい袋内の湿度の差の影響の検討—, 空気調和・衛生工学会, 令和 5 年度第 25 回空気調和・衛生工学会中部支部学術研究発表会, 2024年3月, 愛知.
- (154) 鈴木琴音, 皆川史織, 光田恵, 棚村壽三: 高齢者介護環境臭における感覚的消臭の検討, 空気調和・衛生工学会, 令和 5 年度第 25 回空気調和・衛生工学会中部支部学術研究発表会, 2024年3月, 愛知.

- (155) 萬羽郁子, 光田恵: 生活環境中のにおいに対する居住者意識, 一般社団法人日本建築学会, 2024 年度日本建築学会大会 (関東) 学術講演会, 2024 年 8 月, 東京.
- (156) 近江陽向, 光田恵, 岩井幸一郎, 早川和美, 幸田勝典: 精油の香りに対する印象評価に関する研究, 公益社団法人におい・かおり環境協会, 令和 6 年度第 37 回におい・かおり環境学会, 2024 年 8 月, 東京.
- (157) 宮部朔, 三村泰広, 坪井志朗, 嶋田喜昭: 特例特定小型原動付自転車における占有幅の検討, 日本都市計画学会中部支部, 第 35 回研究発表会, 2024 年 10 月, 名古屋.
- (158) 鷺見哲也, 嘉屋尚樹, 石川真平: 矢作川下流部に造成されたワンド・ヨシ原の物理環境形成に関する調査, 土木学会, 全国大会第 79 回年次学術講演会, 2024 年 9 月, 仙台.
- (159) 仁科豪夫, 古田淳士, 大洞輝雄, 嶋本直人, 棚橋秀行, 大島裕之: 気泡状界面活性剤及び食用油を用いた機械油汚染地盤の原位置浄化, 一般社団法人廃棄物資源循環学会, 第 29 回地下水・土壌汚染とその防止対策に関する研究集会, 2024 年 6 月, 山形.
- (160) 伊藤純, 朝岡暖心, 樋口恵一: 水災害ハザード地域における避難支援マッチングアプリの導入環境評価～地域企業との連携に着目して～, 日本技術士会中部本部, 第 15 回中部本部修習技術者研究業績発表会, 2024 年 2 月, オンライン開催.
- (161) 樋口恵一, 山崎基浩, 荒谷太郎, 間島隆博, 河瀬理貴, 川本義海, 大窪和明, 畑山満則: 緊急支援物資輸送の実態把握, 土木学会, 令和 6 年能登半島地震対応特別プロジェクト報告会, 2024 年 5 月, 北海道.
- (162) 長岡芽晟, 小室雅人, 田村洋, 宮寄靖大, 田中賢太: SBHS を用いた円形鋼製橋脚の繰返し弾塑性挙動に関する数値解析的研究, 令和 5 年度土木学会北海道支部年次技術研究発表会, A-44, 2024 年 2 月, 札幌.
- (163) 正延徹也, 渡邊俊輔, 五十嵐友旗, 山崎諒介, 宮下剛, 宮寄靖大, 澤田守, 小野潔: SUS323L を用いた自由突出板の耐荷力特性に関する実験的研究, 第 27 回橋梁等の耐震設計シンポジウム, 2024 年 7 月, 東京.
- (164) 渡邊俊輔, 正延徹也, 山崎諒介, 五十嵐友旗, 宮下剛, 宮寄靖大, 澤田守, 小野潔: SUS323L を用いた十字断面短柱の圧縮試験および再現解析, 第 44 回地震工学研究発表会, 2024 年 9 月, 金沢.
- (165) 清水大暉, 宮寄靖大, 佐藤勝太, 小沼浩之: SS400 への CFRP 接着工法適用に関する長期耐久性の検証, 令和 6 年度土木学会全国大会第 79 回年次学術講演会, I-68, 2024 年 9 月, 仙台.
- (166) 長岡芽晟, 小室雅人, 田村洋, 宮寄靖大, 田中賢太: SBHS 材を用いた円形断面鋼製橋脚の漸増繰返し弾塑性解析, 令和 6 年度土木学会全国大会第 79 回年次学術講演会, I-226, 2024 年 9 月, 仙台.
- (167) 正延徹也, 五十嵐友旗, 山崎諒介, 渡邊俊輔, 宮下剛, 宮寄靖大, 小野潔: SUS323L を用いた自由突出板の耐荷力特性に関する実験的研究, 令和 6 年度土木学会全国大会第 79 回年次学術講演会, I-245, 2024 年 9 月, 仙台.
- (168) 平川巧都, 杉本悠真, 小野健太, 宮寄靖大: 横荷重を受ける鋼板桁端対傾構部を対象とした 3 次元 FEM 解析の部材モデル化方法が耐力・剛性評価に与える影響, 令和 6 年度土木学会全国大会第 79 回年次学術講演会, I-371, 2024 年 9 月, 仙台.
- (169) 朝倉宏一: 大同大学のデータサイエンス教育について, 教育システム情報学会, 教育システム情報学会東海支部研究会, 2024 年 5 月, 名古屋.
- (170) 荻野正雄: 古典的領域分割法に基づく Physical-Informed Neural Networks, 第 7 回大規模電磁界数値解析手法に関する研究シンポジウム, 2024 年 2 月, 石垣市.
- (171) Masao OGINO: PINN-based Domain Decomposition Method in Linear Magnetostatic Analysis, ECCOMAS 2024, June 2024, Lisbon.
- (172) 荻野正雄, 小川哲平, 北川光介, 杉本陸: 計算工学技術者の情報教育で用いられる Python コードの実用性評価, 第 29 回計算工学講演会, 2024 年 6 月, 神戸市.
- (173) 荻野正雄: 【キーノート講演】古典的領域分割法に対する PINN の適用に関する検討, 第 29 回計算工学講演会, 2024 年 6 月, 神戸市.
- (174) 荻野正雄: 反復型領域分割法による PINN の並列計算, 第 37 回日本機械学会計算力学部門講演会, 2024 年 10 月, 仙台市.
- (175) 村松大智, 土井彩花, 出口大悟, 栗本崇, 君山博之: パケットモニタリングにおける時刻情報精度の影響に関する評価, 電子情報通信学会, NS 研究会, 2024 年 2 月, 沖縄県宜野湾市.
- (176) Takayuki Nakachi, Hiroyuki Kimiyama, Mitsuru Maruyama: A Lightweight Spatio-Color Scrambled EtC System for JPEG XS Standard, IEEE, 2024 7th International Conference on Information and Computer Technologies (ICICT), 2024 年 3 月, Honolulu Hawaii USA.

- (177) 新祥大朗, 間瀬友貴, 君山博之: モバイル通信速度の位置時刻依存性計測システムの提案, 情報処理学会, マルチメディア, 分散, 協調とモバイル (DICOMO2024) シンポジウム, 2024年7月, 岩手県花巻市.
- (178) Yoshinori Takeuchi and Kengo Suzuki: Expiration Date Recognition System Using Spatial Transformer Network for Visually Impaired, International Conference on Computer Helping People with Special Needs, 2024年7月, Austria.
- (179) 竹内雅貴, 竹内義則: 加速度センサを用いた卓球ボールのバウンド位置の推定, 情報処理学会, 第86回全国大会, 2024年3月, 神奈川.
- (180) Shaoxiang Dang, Tetsuya Matsumoto, Yoshinori Takeuchi, Takashi Tsuboi, Yasuhiro Tanaka, Daisuke Nakatsubo, Satoshi Maesawa, Ryuta Saito, Masahisa Katsuno, Hiroaki Kudo: Developing vocal system impaired patient-aimed voice quality assessment approach using ASR representation-included multiple features, Interspeech 2024, 2024年9月, Greece.
- (181) Shaoxiang Dang, Tetsuya Matsumoto, Yoshinori Takeuchi, Takashi Tsuboi, Yasuhiro Tanaka, Daisuke Nakatsubo, Satoshi Maesawa, Ryuta Saito, Masahisa Katsuno, Hiroaki Kudo: A Separation Priority Pipeline for Single-Channel Speech Separation in Noisy Environments, IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2024年4月, Korea.
- (182) 宮原光彦, 松本哲也, 竹内義則, 工藤博章: 物体検出とキーポイント検出によるヨットにおけるメインセールの形状の可視化, 電子情報通信学会, イメージ・メディア・クオリティ研究会, 2024年7月, 北海道.
- (183) 菅正輝, 松本哲也, 竹内義則, 工藤博章: 小節間の周期性を考慮したドラム自動採譜, 電子情報通信学会, イメージ・メディア・クオリティ研究会, 2024年3月, 沖縄.
- (184) 大塚文雄, 不破勝彦: 気象変化が人間に与える影響に関する一考察, 電気学会, 令和6年度電気・電子・情報関係学会東海支部連合大会, 2024年8月29日, 岐阜.
- (185) 不破勝彦, 沖村達也: ステップ外乱を推定する同一次元状態推定器の一考察, 電気学会, 令和6年度電気・電子・情報関係学会東海支部連合大会, 2024年8月29日, 岐阜.
- (186) Chiyomi Miyajima, Yuki Sugiyama, Sho Kobayashi: Analyzing the effect of turn signal sounds on driver alertness and comfort, The 7th International Symposium on Future Active Safety Technology toward zero traffic accidents (FAST-zero' 23), 2023年11月, Kanazawa, Japan.
- (187) 原田悠馬, 宮島千代美: 車載カメラ映像の物体検出に基づく道路混雑状況の可視化, 2024年電子情報通信学会ソサイエティ大会, 2024年9月11日, 埼玉県.
- (188) Yoshifumi Morita, Yu Chokki, Ryo Takato, Kazuya Toshima, Masakazu Nomura, Masaki Uchida, Kazunori Yamazaki: Development of Smart iWakka Healthcare System, 2023 Japan-Poland International Workshop on Technologies supporting rehabilitation and medical services, 2023.12, Poland.
- (189) 山崎一徳, 田中雅章, 奥原俊: 生成 AI による学生向け評価とコメントの限界, 第8回 国際 ICT 利用研究学会 全国大会 (IIARS2023), 2023年12月, 愛知.
- (190) 田中雅章, 鷺尾徹, 山崎一徳: Google Form を活用した授業改善, 第15回 国際 ICT 利用研究学会 研究会, 2024年3月, オンライン開催.
- (191) 打田正樹, 一寸木佑, 高戸了, 山崎一徳, 森田良文: 手指触覚刺激デバイス "Touch Wakka" の試作と性能評価, 日本機械学会ロボティクス・メカトロニクス講演会'24 講演論文集, 2024年5月, 栃木.
- (192) 打田正樹, 高戸了, 山崎一徳, 森田良文: 手指触覚刺激デバイス "Touch Wakka" の性能評価と操作アプリケーションの制作, 令和六年度 電気・電子・情報関係学会 東海支部連合大会, 2024年8月, 岐阜.
- (193) Yoshifumi Morita, Yu Chokki, Ryo Takato, Kazuya Toshima, Masakazu Nomura, Masaki Uchida, Kazunori Yamazaki: Development of Smart iWakka Healthcare System, 2024 International Convention on Rehabilitation Engineering and Assistive Technology (i-CREATE2024), 2024.8, Shanghai, China.
- (194) Misako Imono, Seiji Tsuchiya, Hirokazu Watabe: Room Generation System on VR Space by Selecting Furniture According to User's Sensitivity, World Congress in Computer Science, Computer Engineering, & Applied Computing, ICAI' 24, 2024年7月, オンライン開催.
- (195) 藤井浩明, 西尾功: 要員合理化をめぐる労使協議の規制力: 鉄鋼業 A 社の職場決定型労使協議の事例研究, 社会政策学会第148回大会, 自由論題報告, 2024年5月, 慶応義塾大学.
- (196) 立松壮真, 中村裕哲: 災害時の水の確保と ICT を活用した情報提供, 情報文化学会, 第12回中部支部研究会, 2023

年 12 月, 名古屋.

- (197) 中村裕哲: ソニーの国際戦略提携とクロスボーダーM&A の変遷, 日本貿易学会, 第 63 回全国大会, 2024 年 5 月, 兵庫.
- (198) 日高直保: 死産を経た母親が里親となる経験—A さんの語りから—, 臨床実践の現象学会, 第 166 回臨床実践の現象学研究会, 2024 年 9 月, オンライン開催.
- (199) 岡康之: Results of existence and uniqueness for the Cauchy problem of semilinear heat equations on stratified Lie groups, 岐阜数理学セミナー, 2023 年 12 月 15 日, 岐阜市生涯学習センター・小研修室 4.
- (200) K. Ueno: Newton polygons and Böttcher coordinates for skew products: superattracting case and polynomial case, RIMS 研究集会 力学系の理論と応用, 2024 年 6 月 3 日, 京都大学.
- (201) 長谷川翔一: Singular solutions of semilinear elliptic equations on spherically symmetric Riemannian manifolds, 第 828 回応用解析研究会, 2024 年 6 月 1 日, 早稲田大学.
- (202) 長谷川翔一: Singular solutions of semilinear elliptic equations on spherically symmetric Riemannian manifolds, 第 5 回大同若手セミナー in 釧路, 2024 年 8 月 30 日, 釧路工業高等専門学校.
- (203) 長谷川翔一: Singular solutions of semilinear elliptic equations on spherically symmetric Riemannian manifolds, 第 128 回岐阜数理学セミナー, 2024 年 10 月 25 日, 岐阜市生涯学習センター.
- (204) 斉田浩見, 西山正吾, すばる望遠鏡観測計画メンバー: On a PPN test of BH metric with the massive BH at our galactic center, The 32nd Workshop on General Relativity and Gravitation in Japan (国際研究会), 2023 年 11 月 27 日~12 月 1 日, 名古屋大学.
- (205) 斉田浩見: Toward measuring a classical physical counterpart of the Hawking's quantum radiation emitted from black hole horizon, Black Hole Astrophysics with VLBI 2024 (国際研究会), 2024 年 2 月 14~15 日, 国立天文台.
- (206) 斉田浩見: ホーキング輻射の古典対応を Sgr A* / M87* + BH Explore で測りたい, ブラックホール磁気圏研究会 2024, 2024 年 3 月 26~28 日, 苫小牧市文化会館.
- (207) 斉田浩見: Classical Physical Counterpart of the Hawking's Quantum Radiation Emitted from Black Hole Horizon, Black Hole Explore Japan Workshop (国際研究会), 2024 年 6 月 24~25 日, 国立天文台.
- (208) 斉田浩見: Thermal Power Region around Black Hole, 理論で迫るブラックホール宇宙と時空特異点, 2024 年 8 月 16~18 日, 琵琶湖コンファレンスセンター.
- (209) 斉田浩見: BH 探査の新たな方法の提案~重力赤方偏移によるパワースペクトル~, 銀河系中心研究会 2024, 2024 年 8 月 26~27 日, 奈良女子大学.
- (210) 斉田浩見: Thermal Power Region around Black Hole, 第 25 回特異点研究会, 2024 年 9 月 4~6 日, 明治大学.
- (211) 斉田浩見: Thermal Power Region around Black Hole, 日本物理学会 第 79 回, 2024 年 9 月 16~19 日, 北海道大学.
- (212) 小西章典: 劇場巨大化時代のマクベス——J・P・ケンブルの記憶と忘却, 東北ロマン主義文学・文化研究会, 第 20 回大会 (シンポジウム「After Garrick: 18 世紀末の英国劇場文化を読み解く」), 2024 年 7 月, 東北大学.
- (213) 小西章典: ハムレットとウィッグ——デイヴィッド・ギャリックのアート/ネイチャー, 日本シェイクスピア協会, 第 62 回シェイクスピア学会, 2024 年 10 月, 熊本大学.
- (214) 松井かおり, 石田喜美, 半沢千絵美: 当事者の経験の省察を促す共同的会話—「クロスロード: 外国につながる子ども達の支援員編 (仮)」制作・プレイ過程と類似ゲームのプレイ過程の比較から—, 言語文化教育研究会, 第 10 回年次大会, 2024 年 3 月, 茨城大学.
- (215) 松井かおり: 外国につながる子ども達のアイデンティティ変容を促すアート・パフォーマンスの共同的会話, ICJLE 日本語教育国際研究大会, 2024 年 8 月, ウィスコンシン大学.
- (216) 松井かおり: ゲーム製作でつくるわたしのことば, わたしたちのことば (シンポジウム話題提供), 日本質的心理学会, 第 21 回大会, 2024 年 10 月, 成城大学.
- (217) N. Koya, T. Kitamura: Physical strength factors could predict the competitive level for Japanese male tennis players, 29th Annual Congress of the European College of Sports Science, July 2024, Glasgow.

作品

- (1) 大嶋和彦, 宇佐美颯, 大久保晴友: 自作スピーカー「ブルートルネード」, 第1回 MJ オーディオラボ・ヤマハと創るスピーカー自作&試聴イベント, 2024年10月, 東京.
- (2) 中島貴光: 照明装置「あかりアート2024」, 第31回美濃和紙あかりアート展, 2024年10月.
- (3) 船橋仁奈/NI&Co. Architects 一級建築士事務所: DEFRAGMENTATION, 国際建築展「TIME SPACE EXISTENCE」, 2023.05.20~2023.11.26, イタリア ヴェネチア.
- (4) 船橋仁奈/NI&Co. Architects 一級建築士事務所: (仮称) U 社新社屋新築工事, 実施設計, 2024.10, 岐阜県岐阜市.
- (5) 上岡和弘: HOPES PosterDesignWorks2022, 南区いきいき支援センターHP 及び区内各所, 2024年4月~.
- (6) 上岡和弘: AQPR2023 企業 PV「アサヒゼミ」, 愛知県産業振興課愛知ブランド HP 内, 2024年4月~.
- (7) 上岡和弘: AQPR2023 企業 PV「KTX 株式会社 謝罪会見」, 愛知県産業振興課愛知ブランド HP 内, 2024年4月~.
- (8) 小島一宏: 「C.A.M.P. BASKET」, 東海ラジオ放送, 日曜 17:00~19:00 生放送, 計 50 本.
- (9) 小島一宏: 「世間遺産」 常滑市・常滑焼祭りの旅 (前編), 知多半島ケーブルネットワーク, 2023年11月放送.
- (10) 小島一宏: 「世間遺産」 常滑市・常滑焼祭りの旅 (後編), 知多半島ケーブルネットワーク, 2023年11月放送.
- (11) 小島一宏: 「世間遺産」 武豊町・武豊インター周辺の旅 (前編), 知多半島ケーブルネットワーク, 2023年12月放送.
- (12) 小島一宏: 「世間遺産」 武豊町・武豊インター周辺の旅 (後編), 知多半島ケーブルネットワーク, 2023年12月放送.
- (13) 小島一宏: 「世間遺産」 南知多町・豊浜の旅④ (前編), 知多半島ケーブルネットワーク, 2024年1月放送.
- (14) 小島一宏: 「世間遺産」 南知多町・豊浜の旅④ (後編), 知多半島ケーブルネットワーク, 2024年1月放送.
- (15) 小島一宏: 「世間遺産」 常滑市・明和町の旅 (前編), 知多半島ケーブルネットワーク, 2024年2月放送.
- (16) 小島一宏: 「世間遺産」 常滑市・明和町の旅 (後編), 知多半島ケーブルネットワーク, 2024年2月放送.
- (17) 小島一宏: 「世間遺産」 美浜町・美浜インター周辺の旅 (前編), 知多半島ケーブルネットワーク, 2024年3月放送.
- (18) 小島一宏: 「世間遺産」 美浜町・美浜インター周辺の旅 (後編), 知多半島ケーブルネットワーク, 2024年3月放送.
- (19) 小島一宏: 「世間遺産」 武豊町・里中の旅② (前編), 知多半島ケーブルネットワーク, 2024年4月放送.
- (20) 小島一宏: 「世間遺産」 武豊町・里中の旅② (後編), 知多半島ケーブルネットワーク, 2024年4月放送.
- (21) 小島一宏: 「世間遺産」 常滑地区・祭礼の旅 (前編), 知多半島ケーブルネットワーク, 2024年5月放送.
- (22) 小島一宏: 「世間遺産」 常滑地区・祭礼の旅 (後編), 知多半島ケーブルネットワーク, 2024年5月放送.
- (23) 小島一宏: 「世間遺産」 南知多町・片名の旅③ (前編), 知多半島ケーブルネットワーク, 2024年6月放送.
- (24) 小島一宏: 「世間遺産」 南知多町・片名の旅③ (後編), 知多半島ケーブルネットワーク, 2024年6月放送.
- (25) 小島一宏: 「世間遺産」 常滑市・苅屋町の旅 (前編), 知多半島ケーブルネットワーク, 2024年7月放送.
- (26) 小島一宏: 「世間遺産」 常滑市・苅屋町の旅 (後編), 知多半島ケーブルネットワーク, 2024年7月放送.
- (27) 小島一宏: 「世間遺産」 南知多町・日間賀島の旅④ (前編), 知多半島ケーブルネットワーク, 2024年8月放送.
- (28) 小島一宏: 「世間遺産」 南知多町・日間賀島の旅④ (後編), 知多半島ケーブルネットワーク, 2024年8月放送.
- (29) 小島一宏: 「世間遺産」 常滑市・セントレアの旅② (前編), 知多半島ケーブルネットワーク, 2024年9月放送.
- (30) 小島一宏: 「世間遺産」 常滑市・セントレアの旅② (後編), 知多半島ケーブルネットワーク, 2024年9月放送.
- (31) 小島一宏: 「世間遺産」 武豊町・壱町田周辺の旅 (前編), 知多半島ケーブルネットワーク, 2024年10月放送.
- (32) 小島一宏: 「世間遺産」 武豊町・壱町田周辺の旅 (後編), 知多半島ケーブルネットワーク, 2024年10月放送.
- (33) 小島一宏: 「第45回ヨコハマ映画祭」授賞式 構成および MC ゲストトーク, 2024年2月4日.
- (34) 小島一宏: 「三鷹の森アニメフェスタ 2024」第二部 構成および対談 MC, 「カラミティ」上映とライムスター宇多丸さん特別トークショー, 2024年3月2日.
- (35) 富永慎一, 富永研究室: ねらいの的確な映像化~卒業研究制作作品上映~, 上映およびオンライン掲載, 2024年2月22日, 名古屋シネマスコール・Youtube.
- (36) 富永慎一: 2023年度大同大学学位記授与式収録, オンライン掲載, 2024年3月, 大同大学ホームページ・Youtube.
- (37) 富永慎一: 2024年度大同大学入学式収録, オンライン掲載, 2024年4月, 大同大学ホームページ・Youtube.
- (38) 富永慎一, 富永研究室: 大同大学プロモーションビデオ制作, オンライン掲載, 2024年6月, 大同大学ホームページ・Youtube.

- (39) 横山弥生：PRINTS ON B' DWAY, 「Amapola」, 展覧会, Gallery Max New York, 2023 年 12 月.
- (40) 横山弥生：Société du Salon d'Automne2023, 「Dalhia」, 展覧会, La Grande Halle de La Villette Paris, 2024 年 1 月.
- (41) 横山弥生：Le Salon des Artistes France 2024, 「EGOIST#1」, 展覧会, Grand Palais Ephemere Paris, 2024 年 2 月.
- (42) 横山弥生：個展 DAYDREAM, 「EGOIST#1」, 「EGOIST#2」, 「Ballade」, 「BossaNova#1」, 「BossaNova#2」, 「BossaNova#3」, 「BossaNova#4」, 「BossaNova#5」, 「BossaNova#6」, 「BossaNova#7」, 「BossaNova#8」, 「BossaNova#9」, 「BossaNova#10」, 「Breathtaking#1」, 「Dalhia」, 「Days gone by#3」, 「Dulcet」, 「PHASE#1」, 「PHASE#2」, 「PHASE#3」, 「PHASE#4」, 「PHASE#5」, 「PHASE#6」, 「PHASE#7」, 「PHASE#8」, 「PHASE#9」, 「PHASE#10」, 「PHASE#11」, 「ROSA」, 「Vivienne」, 「EGOIST#1」(umbrella), 「EGOIST#2」(umbrella), 展覧会, Gallery Max New York, 2024 年 3 月.
- (43) 横山弥生：第 37 回パリ国際サロン, 「Lily」, 「Bellflower」, 展覧会, Galeria du Marais Paris, 2024 年 3 月.
- (44) 横山弥生：個展 INNOCENCE, 「Innocent Red#1」, 「Innocent Red#2」, 「Innocent Red#3」, 「Bloom#1」, 「Bloom#2」, 「Bloom#3」, 「Wave#1」, 「Wave#2」, 展覧会, INTERNATIONAL CENTER OF CCCS New York, 2024 年 4 月.
- (45) 横山弥生：PEACE2024, 「Grace#1」, 「Grace#2」, 展覧会, Gallery Max New York, 2024 年 8 月.
- (46) 横山弥生：第 25 回日本・フランス現代美術世界展, 「Ensemble」, 「EGOIST#1」, 展覧会, 国立新美術館, 2024 年 8 月.
- (47) 横山弥生：Société du Salon d'Automne2024, 「Amapola」, 展覧会, La Grande Halle de La Villette Paris, 2024 年 10 月.
- (48) 押山晶子：ミュージカル作編曲「想像しい家」, BamBoo Jr. The 3rd Original Musical, 2024 年 3 月, 昭和 cultura 小劇場.
- (49) 押山晶子：オーケストラ編曲「輝く未来～塔の上のラプンツェルより」新妻聖子・森崎ウィン, 公益財団法人 岡田文化財団設立 45 周年記念 未来へつなぐコンサート, 三ツ橋敬子(指揮)セントラル愛知交響楽団, 2024 年 5 月, 四日市文化会館第一ホール.
- (50) 押山晶子：電子音響音楽「Form(2024)」, ミッドジャパン音の芸術祭, 電子音 x 電子音響の戯れと創作, 2024 年 9 月, 名古屋市立大学芸術工学研究科 北千種キャンパス 音響デザイン室.
- (51) 桐山岳寛：認定特定非営利法人日本国際ポスター美術館「2024 年度全国高校生ポスターコンクール」：作品募集ポスターデザイン(2024 年 3 月), 展覧会告知ポスターデザイン(2024 年 3 月), 作品募集フライヤーデザイン(2024 年 3 月), 募集要項用紙デザイン(2024 年 3 月), 賞状デザイン(2024 年 8 月), 受賞作品集デザイン(2024 年 8 月).
- (52) 桐山岳寛：大同大学「X4 DESIGN」VI リニューアル計画(大同大学建築学科, 情報デザイン学科)(2023 年 6 月～12 月).
- (53) 原田昌明：地域連携パフォーミングアーツ実行委員会主催第 18 回公演こどもオペラ「オペレッタ狐御殿」舞台映像, 上演, 2024 年 3 月, 常滑市民文化会館ホール.

受賞

- (1) 田中浩司：2023 年度日本熱処理技術協会技術賞(粉生賞), 業績「鉄鋼の相変態および炭化物成長のモデリングと組織制御への応用」, 2024 年 5 月.
- (2) 千野靖正, 黄新胜, 斎藤尚文, 西脇武志, 毛利猛, 松田幹雄：2024 年度日本塑性加工学会賞 論文賞, 論文「底面集合組織の形成を抑制した AZ31B マグネシウム合金板材の室温深絞り成形性に及ぼすプロセス因子の影響」, 2024 年 5 月.
- (3) 糸隆千穂, 安江拓哉, 竹川麻衣子, 前田安郭, 堀亜由美：論文賞, 生型砂と RCS, 生型砂のコンパクトビリティの違いがブロー造型挙動に及ぼす影響(鑄造工学, 第 95 巻掲載), 2024 年 5 月.
- (4) 平野太一, 宮本潤示：日本熱処理技術協会第 14 回中部支部講演大会 Most Impressive Poster 賞, 2024 年 4 月.
- (5) 宮本潤示：日本熱処理技術協会技術精励賞, 2024 年 5 月.
- (6) 森長誠：日本音響学会 学会活動貢献賞, 2024 年 3 月.

- (7) 山崎一徳, 田中雅章, 奥原俊: 第 8 回 国際 ICT 利用研究会全国大会(IIARS2023)優秀論文賞, 生成 AI による学生向け評価とコメントの限界, 2024 年 2 月.
- (8) 横山弥生: 第 37 回パリ国際サロン ギャラリー・デュ・マレ賞, 「Lily」, 2024 年 3 月.
- (9) 横山弥生: 第 25 回日本・フランス現代美術世界展, 優秀賞(ミクストメディア), 「Ensemble」, 2024 年 8 月.
- (10) 桐山岳寛: 2023 American Graphic Design Award, Posters 部門, 日本国際ポスター美術館「2023 年度全国高校生ポスターコンクール」作品募集ポスター・展覧会告知ポスター, 2023 年 11 月.
- (11) 舟橋慶祐: 17th シヤチハタ・ニュー・プロダクト・デザイン・コンペティション 原賞, 陰影折紙, 2024 年 10 月.

特 許

- (1) 加納善明, 藪見崇生: 永久磁石回転子および回転電気機械、永久磁石回転子の製造方法, 特許第 7542815 号, 2020 年 3 月 23 日出願.
- (2) 加納善明, 佐藤浩介, 永溝喜也, 袴田眞一郎, 芝原大智: 筒型リニアモータ, 特許第 7482480 号, 2020 年 7 月 1 日出願.
- (3) 加納善明, 佐藤浩介, 袴田眞一郎, 芝原大智: 筒型リニアモータ, 特許第 7569534 号, 2021 年 3 月 5 日出願.
- (4) 小島崇, 鈴木聖也, 高橋篤弘, 野村勝也, 水野健太郎, 杉田昌行: ノイズフィルタ, 特許第 7564730 号, 2021 年 2 月 18 日.
- (5) 秋田義文, 勝呂知弘, 高橋篤弘, 小島崇: ノイズフィルタ, 特許第 7440280 号, 2020 年 1 月 31 日.
- (6) 近藤肇, 笠井豪, 奥村暁, 光田恵: ゴム臭気の変調剤、ゴム臭気の変調方法、及びゴム臭気の変調装置, 特許第 7406201 号, 2020 年 2 月 13 日.

科研費採択

- (1) 高田健: 22K04676, 基盤研究(C), 電気抵抗率測定を用いた微細組織の動的挙動観察手法の構築, 2022 年～.
- (2) 坪井涼: 23K03680, 基盤研究(C), SLD 着氷における液滴の衝突・飛散メカニズムの解明およびモデル開発, 2023～.
- (3) 宮本潤示, 坪井涼: 23K03650, 基盤研究(C), 鋼のプラズマ窒化を用いたヘテロ構造表面の創出によるトライボロジー特性の向上, 2023～.
- (4) 西脇武志: 24K07242, 基盤研究(C), 金属板材の降伏関数の妥当性を評価する試験法の開発, 2024.
- (5) 前田安郭: 24K08129, 基盤研究(C), 鋳型砂特性の離散要素モデリングと粒度分布を考慮した圧密化解析, 2024 年～2026 年.
- (6) 田中淑晴, 綿崎将大, 山口康太, 原野智哉: 24K07281, 基盤研究(C), 超電導磁石による非接触動力伝達での高加減速と高精度を両立させた位置決め装置の開発, 2024.
- (7) 赤池宏之: 22K04226, 基盤研究(C), 超伝導スピントロニクスメモリ素子を用いたプログラマブル論理回路の研究, 2022～.
- (8) 大澤文明: 23K03736, 基盤研究(C), 可動子界磁巻線を有する平面アクチュエータの 6 自由度電流制御技術, 2023～.
- (9) 服部佳晋, 野村勝也, 加地徹: 24K07597, 基盤研究(C), トポロジー最適化を用いた縦型 GaN パワーデバイスの構造設計技術, 2024.
- (10) 森原崇, 森長誠, 辻村壮平, 平栗靖浩: 24K07799, 基盤研究(C), 北陸新幹線延伸に伴う沿線住民の騒音に対する社会反応に及ぼす影響要因の検証研究, 2024～2027.
- (11) 森淳一, 朝倉巧, 森長誠, 辻村壮平: 23K17778, 挑戦的研究(萌芽), 先端環境観測技術を応用した長期音響暴露反応に基づく動物の行動管理法の構築, 2023～2026.
- (12) 森長誠, 横島潤紀, 山崎徹: 22K04437, 基盤研究(C), 低周波数成分を含む環境騒音の評価指標の確立, 2022～2025.
- (13) 小山由美, 豊谷純, 森長誠: 21K10288, 基盤研究(C), 医療施設における環境音の新規測定技術の安全精度と有効性の検証, 2021～2025.
- (14) 棚橋秀行: 24K00982, 基盤研究(B), 地盤内連続再発泡法を用いた新しい環境修復技術の開発, 2024.
- (15) 岸祐介, 宮寄靖大: 24K07643, 基盤研究(C), 鋼橋上部工に用いられる H 形断面部材における圧縮強度評価法の高精度化, 2024～.
- (16) 山崎一徳: 21K17538, 若手研究, 発達障害児の歩行における視覚の働きの定量的な解明, 2021.4～2024.3.

- (17) 織田千賀子, 中村小百合, 瀬戸孝一, 山崎一徳: 20K10674, 基盤研究(C), 看護実践力を高める輸液管理の教育プログラムの開発と効果の検討, 2020.4~2024.3.
- (18) 岡康之: 21K03333, 基盤研究 (C), Lie 群構造をもつ非線形発展方程式の可解性の解明, 2021年4月1日~2025年3月31日.
- (19) 山内昇: 24K03953, 基盤研究(C), 談話文法理論に基づく speaking of 構文の成立過程に関する研究, 2024~.

学外競争的研究資金獲得

- (1) 田中浩司: 公益財団法人天田財団, 2023年度助成プログラム: レーザプロセッシング一般研究開発助成, Cu-酸化物混合融体のダイナミクスにもとづく電磁気特性の改質プロセッシング, 2023~.
- (2) 坪井涼: 自動車用内燃機関技術研究組合 (AICE) からの再委託: NEDO グリーンイノベーション基金事業/CO2等を用いた燃料製造技術開発プロジェクト, 乗用車および重量車の合成燃料利用効率の向上とその背反事象の改善に関する技術開発, 2022~.
- (3) 西脇武志: 公益財団法人天田財団, 塑性加工 一般研究開発助成, 砂時計型試験片を用いたアルミニウム合金板の降伏関数のパラメータの同定, 2023~.
- (4) 西脇武志: 公益財団法人日比科学技術振興財団, 一般研究課題, せん断試験によるアルミニウム合金板の降伏関数の決定と精度検証, 2024.
- (5) 西脇武志: 公益財団法人軽金属奨学会, 教育研究資金, せん断試験によるアルミニウム合金板の降伏関数の検証, 2024.
- (6) 鳥羽工産株式会社 傍島聖雄, 前田安郭: 令和6年度中小企業政策推進事業費補助金, 成長型中小企業等研究開発支援事業, 全方位の車種展開と多様なデザイン車両生産効率化に貢献し低環境負荷の亜鉛系高強度・高耐久金型の開発, 2024.
- (7) 柚谷啓, 岡部貴雄: 公益財団法人 NSK メカトロニクス技術高度化財団, 研究助成, 直動スライダ用高真空用イオン液体循環ポンプの開発, 2024年.
- (8) 宮本潤示: 公益財団法人谷川熱技術振興基金, 令和6年度研究助成, イオン液体を用いたプラズマ浸室焼入れ法, 2024年.
- (9) 宮本潤示: 公益財団法人スズキ財団, 研究者海外研修助成金, 2024年.
- (10) 内海能重: 公益財団法人天田財団, 一般研究開発助成, 偏心管の曲げ加工に及ぼす管外径と肉厚の影響, 2024.
- (11) 吹田和嗣: 経済産業省補助事業, 令和6年度革新的ロボット研究開発等基盤構築事業, RFA 規格に基づくロボット・建物設備連携と標準化の推進, 2024.
- (12) 田中淑晴: 公益財団法人日比科学技術振興財団, 研究開発助成 (一般課題), 磁気力伝達での非接触液体攪拌のためのフロート位置推定による回転制御, 2024.
- (13) 吉田昌史: 三五ものづくり基金 研究開発助成, 表面活性化法によるアルミニウム表面への高品質窒化アルミニウム皮膜形成技術の開発, 2024.
- (14) 藤森繁: 公益財団法人日比科学技術振興財団, 令和6年度研究助成 (一般研究課題), コンクリート表層部の深さ方向への連続的品質評価方法の確立, 2024.
- (15) 森長誠: 日比科学技術振興財団, 令和6年度研究開発助成, 低周波音による圧迫感・振動感がアノイアンスに及ぼす影響の定量的評価, 2024~2025.
- (16) 山崎徹, 森長誠, 安田洋介, 栗原海, 横島潤紀, 白橋良宏, 須田直樹: 神奈川大学 2022年度分野横断型研究推進事業, 道路交通騒音の長期曝露による影響評価のための縦断的調査手法の開発, 2022~2025.
- (17) 鷺見哲也, 樋口恵一, 松木孝文: 公益財団法人河川財団, 令和5年度河川基金助成事業, 「わたしの川づくり」に向けた河川情報のローカル化, 2023年.
- (18) 樋口恵一: 一般社団法人中部地域づくり協会, 令和6年度研究助成, 避難支援マッチングアプリの実装にむけた実証的検討, 2024年.
- (19) 宮下剛, 小野潔, 宮寄靖大: 一般社団法人日本鉄鋼連盟, 2024年度鋼構造研究・教育助成事業, 鋼桁ガセット部の耐荷力評価法とステンレス鋼の適用による腐食耐久性向上に関する研究, 2024.
- (20) 宮寄靖大, 岸祐介: 一般社団法人日本鉄鋼連盟, 2024年度鋼構造研究・教育助成事業, SBHS 製 I 形断面部材に関する初期不整の変動が終局強度に及ぼす影響, 2024.

- (21) 酒井義人, 渡邊剛, 若尾典充, 松井寛樹, 今釜史郎, 関泰輔, 森田良文, 山崎一徳, 伊藤定之, 室谷健太: 国立長寿医療研究センター, 長寿医療研究開発費, 高齢者運動器疾患における老化を基盤とした包括的診療体系の共創, 2021.4~2024.3.
- (22) 酒井義人, 渡邊剛, 松井寛樹, 若尾典充, 森田良文, 山崎一徳, 今釜史郎, 山本美知郎, 伊藤定之, 関泰輔: 国立長寿医療研究センター, 長寿医療研究開発費, 運動器の老化に関する機序解明と予防に資する縦断研究, 2024.4~.

その他

- (1) 萩野将広: 日本鉄鋼協会, 研究会 I, 炭素鋼における切削現象の系統的再解明, 幹事, 2022~.
- (2) 林秀行, 大嶋和彦, 尾形和哉: 「日本機械学会学術誌 (和文) 年間アクセス数トップ 10」における 2 位, 対象論文: サイクロイダル遊星歯車減速機の開発, 日本機械学会論文集, 89 巻, 2023 年, 919 号, p.22-00340, 日本機械学会誌, 127 巻, 2024 年, 1267 号, p.46-47.
- (3) 吹田和嗣: 一般財団法人日本規格協会, ISO/TC299/WG3 (産業用ロボット) Expert, 2021 年~.
- (4) 吹田和嗣: 一般財団法人日本規格協会, ISO/TC299/WG7 (サービスロボット運用) Expert, 2024 年.
- (5) 吹田和嗣: 一般財団法人日本ロボット工業会, サービスロボット安全性ワーキンググループ, 委員, 2024 年.
- (6) 吹田和嗣: 一般財団法人日本ロボット工業会, サービスロボット安全運用マネジメントワーキンググループ, 委員, 2024 年.
- (7) 吹田和嗣: 一般財団法人日本ロボット工業会, 産業用ロボット安全性ワーキンググループ, 委員, 2024 年.
- (8) 吹田和嗣: ロボット革命・産業 IoT イニシアティブ協議会, ロボットイノベーション WG, 委員, 2024 年.
- (9) 吹田和嗣: ロボット革命・産業 IoT イニシアティブ協議会, 有識者, 2024 年.
- (10) 吹田和嗣: 一般財団法人製造科学技術センター, メガ労働生産性システム研究会, 2021 年~.
- (11) 吹田和嗣: 一般財団法人製造科学技術センター, 賛助会員 (学術), 2024 年.
- (12) 吹田和嗣: 一般財団法人セーフティグローバル推進機構, 理事, 2024 年.
- (13) 田中淑晴: リニアモーション機器の Q&A⑳~㉓, ベアリング新聞, 2023 年 11 月~2024 年 9 月.
- (14) 小谷明, 田中淑晴, 原野智哉, 綿崎将大: 液面追従機能を有するフロート式非接触型磁気駆動攪拌装置, 国際展示会 FOOMA JAPAN, 2024 年 6 月.
- (15) 田中淑晴: フロントコラム, 月刊トライボロジー, 2024 年 2 月.
- (16) 服部佳晋: 車載システム EMC コンソーシアム(名古屋工業大学産学官金連携コンソーシアム), パワーエレクトロニクスワーキング リーダー, 2024 年 6 月.
- (17) 中島貴光: 「世界劇場会議名古屋国際フォーラム 2024」副実行委員長, 長久手市文化の家, 2024 年 2 月.
- (18) 武藤隆: 第 4 回『中部商空間賞』学生部門審査員, 2024 年.
- (19) 武藤隆: 第 19 回公共建築賞中部地区審査員, 2024 年.
- (20) 船橋仁奈: 令和 6 年度 長久手市景観審議会委員, 愛知県長久手市.
- (21) 船橋仁奈: 令和 6 年度 第 3 1 回愛知まちなみ建築賞選考委員, 愛知県.
- (22) 船橋仁奈: 令和 6 年度 愛知県建築士審査会委員, 愛知県.
- (23) 船橋仁奈: 令和 6 年度 愛知県屋外広告物審議会委員, 愛知県.
- (24) 光田恵: キャンパス発 研究室めぐり, 読売新聞, 2024 年 1 月.
- (25) 棚橋秀行: 地盤工学会中部支部・「地盤調査ボーリング見学会」を、セミナ部会長として中部土質試験協同組合と共同運営, 2024 年 4 月.
- (26) 棚橋秀行: 地盤工学会中部支部・「土質試験体験実習」を、セミナ部会長として中部土質試験協同組合と共同運営, 2024 年 6 月.
- (27) 棚橋秀行: 地盤工学会中部支部・地盤工学セミナ「実務・最近の話題に関するセミナー第 1 回」をセミナ部会長として企画・運営, 2024 年 7 月.
- (28) 棚橋秀行: 地盤工学会中部支部・地盤工学セミナ「実務・最近の話題に関するセミナー第 2 回」をセミナ部会長として企画・運営, 2024 年 9 月.
- (29) 樋口恵一: 講演, おでかけ手段の整え方, 東濃東部・東濃西部交通圏タクシー準特定地域協議会, 2023 年 11 月.
- (30) 樋口恵一: 講演, 「安全・安心にまちで暮らす」を考える, 南生涯学習センター連携講座, 2023 年 11 月.
- (31) 樋口恵一: 講演, これからの交通と持続可能なまちづくり, 知多半島 5 市 5 町脱炭素に関する勉強会, 2024 年 3 月.

- (32) 樋口恵一：講演，能登半島地震における支援物資の実態と課題，豊田まちと交通勉強会，2024年9月。
- (33) 樋口恵一：地域公共交通コーディネーター・プロデューサー養成プロジェクト講師，国土交通省地域公共交通共創モデル実証プロジェクト（代表：加藤博和），2024年。
- (34) 荻野正雄：学会活動，日本計算工学会，理事，2022年～現在。
- (35) 荻野正雄：学会活動，日本機械学会，計算力学部門・幹事，2024年～現在。
- (36) 荻野正雄：学会活動，日本機械学会，会員部会・委員，2024年～現在。
- (37) 荻野正雄：学会活動，日本機械学会，学術誌編修委員（CM カテゴリー），2020年～現在。
- (38) 荻野正雄：学会活動，第67回理論応用力学講演会，実行委員，2023年～現在。
- (39) 荻野正雄：学会活動，大規模電磁界数値解析手法に関する研究シンポジウム，実行委員，2018年～現在。
- (40) 荻野正雄：学会活動，国際会議 IWACOM-IV，Organizing Committee (Finance Chair)，2023年～現在。
- (41) 荻野正雄：学会活動，国際会議 ICCM2024，International Scientific Advisory Committee。
- (42) 宮島千代美：FAST-zero'23 調査報告，IEEE ITS Society Nagoya Chapter，2023年第2回講演会，2023年12月23日，名古屋市。
- (43) 宮島千代美：自動車技術会アクティブセイフティ部門委員会幹事，2019年4月～継続。
- (44) 宮島千代美：IEEE ITS Society Nagoya Chapter Technical Committee member，2021年1月～継続。
- (45) 宮島千代美：FAST-zero'25 International Scientific Committee member，2024年7月～。
- (46) 上岡和弘：愛知県産業振興課 愛知ブランド選定委員会委員長，愛知ブランド申請企業の選定，2021～。
- (47) 上岡和弘：愛知県産業振興課 愛知ブランドイノベーションアワード選定委員会委員長，コンテスト審査，2022～。
- (48) 上岡和弘：名古屋市社会福祉協議会 広報アドバイザー，広報戦略立案及び執行全般のアドバイザー，2017～。
- (49) 岡田心：公益財団法人名古屋産業振興公社，名古屋市工業研究所主催ものづくりデザインプラットフォームワークショップ「DesignDaysSchool」にて講演，2023年12月、2024年1月、2月。
- (50) 岡田心：NIPPON MONODZUKURI DESIGN AWARD 2024 主催実行委員，審査員，2024年4月。
- (51) 岡田心：名古屋市中小企業グリーン・イノベーション構築推進事業「中小企業グリーンイノベーション創出協議会協議委員，2024年6月～2025年3月。
- (52) 岡田心：公益財団法人名古屋産業振興公社，デザイン活用によるサステナブルビジネス展開支援事業「サスティンナゴヤ」にて講演，2024年7月。
- (53) 岡田心，桐山岳寛，情報デザイン学科生16名（足立菖，加藤碧，木本光希，杉浦せら，鐸木涼我，田代大地，立松由大，田中翔，田中翔大，中川陽由，福手彩希，松井朱日里，松尾俊輔，松田天音，山口真由，山田陽菜美）：新型の門型洗濯機のデザイン開発，産学連携事業／タケウチビューター株式会社，2024年～。
- (54) 桐山岳寛，足立菖，西尾光翔，安田聖香：展示会「シュウカツ! Pocket Adventure」の企画・広報・展示デザイン，大同大学展示室／産学連携事業／吉田建設株式会社，2024年。
- (55) 桐山岳寛：大同大学発行印刷物デザインプロデュース（情報デザイン学科生との企画・制作）。
- ・大同大学学内報「Daido Campus」109号表紙（入試・広報室，デザイン：山本晴翔）（2023年12月）。
 - ・オープンキャンパス用ガチャガチャコーナー設置企画・デザイン（入試・広報室，デザイン：秋田詩織，齋藤ひかり，内山紗希，笥はる，青山真也，佐野有咲）（2023年12月～2024年10月）。
 - ・「卒業パーティ」案内ポスター・フライヤー（学生室，デザイン：佐野有咲）（2024年1月）。
 - ・「資格講座案内2024」表紙（キャリアセンター，デザイン：今井拓実）（2024年2月）。
 - ・「X4 DESIGN」vol.12 展覧会告知ポスター・フライヤー・会場案内パネルほか（建築学科・情報デザイン学科，デザイン：齋藤ひかり）（2024年1月）。
 - ・「X4 DESIGN」vol.12 「サウンドアートコンサート」告知フライヤー，ポスター，プログラムリーフレット（情報デザイン学科，デザイン：長谷川太一）（2024年1月）。
 - ・「X4 DESIGN」vol.12 「小島研究室シナリオ集」ブックデザイン（情報デザイン学科，デザイン：伊藤百葉）（2024年2月）。
 - ・「訪問企業向け手土産パッケージ」デザイン企画（キャリアセンター，デザイン：加藤聖来，丹羽陽舜）（2024年8月）。
 - ・「奨学金案内」案内フライヤー（入試・広報室，デザイン：丹羽陽舜）（2024年5月）。
 - ・「入学金減免」案内フライヤー（入試・広報室，デザイン：加藤聖来）（2024年5月）。
 - ・「教育開発学習支援センター」案内フライヤー（入試・広報室，デザイン：内山紗希）（2024年5月）。

- ・「2024 年入試試験募集要項」表紙（入試・広報室，デザイン：笥はる）（2024 年 5 月）。
 - ・「2024 年度 保護者のための教育懇談会」案内冊子表紙（総務室，デザイン：笥はる）（2024 年 9 月）。
 - ・大同大学学内報「Daido Campus」110 号表紙（入試・広報室，デザイン：河村真生）（2024 年 7 月）。
 - ・大同大学・名古屋市「なごや健康カレッジ」案内冊子デザイン（研究・社会連携推進室・名古屋市，デザイン：品村征哉）（2024 年 8 月）。
 - ・「求人のための大学案内」冊子表紙デザイン（キャリアセンター，デザイン：丹羽陽舜）（2024 年 10 月）。
- (56) 桐山岳寛：認定特定非営利法人日本国際ポスター美術館「2024 年度全国高校生ポスターコンクール」：審査員（2024 年 7 月）。
- (57) 舟橋慶祐，金井亮磨，白山太一，神田直季，加藤碧，木村日菜美，工藤清流，小宮佑斗，杉明香里，竹本有沙，羽田翔：X 棟インフォメーションボードのデザインおよび製作（学生室），2024 年 9 月。
- (58) 舟橋慶祐，梶井康生，小嶋啓太，小宮佑斗，服部福丸：オープンキャンパス秋「大同大学キャラクター人気投票」来場者向けノベルティグッズのデザイン（入試・広報室），2024 年 10 月。
- (59) 藤井浩明 他，法政大学大原社会問題研究所：2024 年版日本労働年鑑第 94 集，pp.218-222，旬報社，2024。
- (60) 岡康之：第 5 回大同大学若手微分方程式セミナー世話人代表。
- (61) 齊田浩見：愛知教育大学天文台一般公開 天文ミニ講座，重力・ブラックホール・銀河系中心・・・研究者が楽しんでいること，2024 年 7 月 20 日。

複写される方へ

本誌に掲載された著作物を複写したい方は、公益社団法人 日本複製権センターと包括複写許諾契約を締結されている企業の従業員以外は、図書館も著作権者から複写権等の行使の委託を受けている次の団体から許諾を受けて下さい。著作物の転載・翻訳のような複写以外の許諾は、直接本会へご連絡下さい。

〒107-0052 東京都港区赤坂9-6-41 乃木坂ビル2階 一般社団法人 学術著作権協会
TEL : 03-3475-5618 E-mail:info@jaacc.jp

アメリカ合衆国における複写については、次に連絡して下さい。

Copyright Clearance Center, Inc.

222 Rosewood Drive, Danvers, MA 01923 USA

Phone: (978)750-8400 E-mail:info@copyright.com

Notice about photocopying

In order to photocopy any work from this publication, you or your organization must obtain permission from the following organization which has been delegated for copyright for clearance by the copyright owner of this publication.

Except in the USA

Japan Academic Association For Copyright Clearance (JAC)

6-41 Akasaka 9-chome, Minato-ku, Tokyo 107-0052 Japan

TEL: 81-3-3475-5618 E-mail:info@jaacc.jp

In the USA

Copyright Clearane Center, Inc.

222 Rosewood Drive, Danvers, MA 01923 USA

Phone: (978)750-8400 E-mail:info@copyright.com

大同大学紀要 第60巻

2025年3月 印刷

2025年3月 発行

編集兼発行者 大同大学
研究・社会連携推進センター

〒457-8530 名古屋市南区滝春町10-3

代表者 渡邊 慎一

印刷所 (株)コームラ

代表者 鴻村 健司

BULLETIN OF DAIDO UNIVERSITY

Vol.60 March 2025

CONTENTS

Hironori NAKAMURA

Changes in Cross-Border Strategic Alliances and Mergers and Acquisitions (M&As)
during the COVID-19 Pandemic 1

Mitsuru Nakai, Junichiro Narita, Shigeo Segawa

Various aspects with the existence of harmonic majorants 11