調和ベルグマン関数のアトム分解

田中　清喜 (大阪市大)

目次.

1　単位円板上の正則関数

$1 \le p < \infty, -1 < \alpha$

$L_a^p(\mathbb{D}, dA_\alpha) := \{h : \mathbb{D}$上正則かつ$\|h\|_{p,\alpha} < \infty\}$: 重みつきベルグマン空間

$(dA_\alpha(z) = (1 - |z|^2)^\alpha dA(z), \|h\|_{p,\alpha} = (\int_{\mathbb{D}} |h|^p dA_\alpha)^{\frac{1}{p}})$

このとき次が成り立つ.

- $L_a^p(\mathbb{D}, dA_\alpha) \subset L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$: 閉部分空間
- $\forall z \in \mathbb{D}$, $\forall f \in L_a^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} K_\alpha(z, w) f(w) dA_\alpha(w)$$

$$K_\alpha(z, w) = \frac{\alpha + 1}{\pi(1 - \bar{z}w)^{2+\alpha}}\text{: ベルグマン核}$$

定理（アトムム分解）

$1 \le p < \infty$, $1 < p(\alpha+1)$ とする.

$\exists\{\lambda_i\} \subset \mathbb{D}$ s.t. $\forall f \in L^p_a(\mathbb{D})$ $\exists\{a_i\} \in l^p$

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{(1-|\lambda_i|^2)^{(1-\frac{1}{p})2+\alpha}}{(1-\bar{z}\lambda_i)^{2+\alpha}} \quad (\forall z \in \mathbb{D})$$

注意.

$\alpha = 0$ のときは$p > 1$ならば上の表記が可能.

2　滑らかな有界領域上の調和関数

$1 \le p < \infty$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$: 滑らかな有界領域

$b^p(\Omega) := \{f : \Omega$上調和かつ$\|f\|_p < \infty\}$

調和ベルグマン空間

(ここで$\|f\|_p := (\int_\Omega |f|^p dx)^{\frac{1}{p}}$)

このとき次が成り立つ.

- $b^p(\Omega) \subset L^p(\Omega)$: 閉部分空間
- $\forall x \in \Omega$, $\forall f \in b^p(\Omega)$

$$f(x) = \int_\Omega R(x, y) f(y) dy$$

ここで$R(\cdot, \cdot)$を調和ベルグマン核とする.

・具体例 $\Omega = \mathbb{B}$（単位球）のとき

$$R_B(x,y) = \frac{(n-4)|x|^4|y|^4 + (8x\cdot y - 2n - 4)|x|^2|y|^2 + n}{nV(B)((1-|x|^2)(1-|y|^2) + |x-y|^2)^{1+\frac{n}{2}}}$$

定理 （ H. Kang and H. Koo ）

Ω: 滑らかな有界領域, α, β: 多重指数とする.

$\exists C_{\alpha,\beta}$ s.t. $\forall x$, $\forall y \in \Omega$

$$|D_x^\alpha D_y^\beta R(x,y)| \leq \frac{C_{\alpha,\beta}}{d(x,y)^{n+|\alpha|+|\beta|}}$$

$\exists C$ s.t. $\forall x \in \Omega$

$$R(x,x) \geq \frac{C}{r(x)^n}$$

ここで $d(x,y) := r(x) + r(y) + |x-y|$, $r(x) := dist(x, \partial\Omega)$

定理１.
$1 < p < \infty$
Ω: 滑らかな有界領域とする.

$\exists \{\lambda_i\} \subset \Omega$ s.t. $\forall f \in b^p(\Omega)$ $\exists \{a_i\} \in l^p$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i R(x, \lambda_i) r(\lambda_i)^{(1-\frac{1}{p})n}$$

ここで $r(x) := \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ であり、右辺の収束は b^p-収束.
注意.
$\|R(\cdot, \lambda_i) r(\lambda_i)^{(1-\frac{1}{p})n}\| \approx 1$.

3　その他の再生核

η : $|\nabla\eta|^2 = 1 + \eta\omega$ for some $\omega \in C^\infty(\bar{\Omega})$ を満たす Ω の defining function

微分作用素

$$K_1 g := g - \frac{1}{2}\Delta(\eta^2 g)$$

とおき、

$$R_1(x,y) := K_1(R_x)(y)$$

$$P_1 f(x) := \int_\Omega R_1(x,y)f(y)dy$$

とおくと次のような性質が成り立つ.

定理　(B. R. Choe, H. Koo and H. Yi)

- $\forall f \in b^1(\Omega) \quad P_1 f = f$
- $1 \leq p < \infty$ のとき $P_1 : L^p(\Omega) \to b^p(\Omega)$ は有界作用素
- α: 多重指数とする.　$\exists C_\alpha > 0$ s.t.

$$|D_x^\alpha R_1(x,y)| \leq \frac{C_\alpha r(y)}{d(x,y)^{n+1+|\alpha|}}$$

$$|D_y^\alpha R_1(x,y)| \leq \frac{C_\alpha}{d(x,y)^{n+1}}$$

定理 2.

$1 \le p < \infty$

Ω: 滑らかな有界領域とする.

$\exists \{\lambda_i\} \subset \Omega$ s.t. $\forall f \in b^p(\Omega)$ $\exists \{a_i\} \in l^p$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i R_1(x, \lambda_i) r(\lambda_i)^{(1-\frac{1}{p})n}$$

ここで右辺の収束はb^p-収束.

4　調和ブロック空間

定義 (調和ブロック空間)

$\mathcal{B} := \{f : \Omega$上調和かつ$\|f\|_{\mathcal{B}} < \infty\}$: 調和ブロック空間

ここで$\|f\|_{\mathcal{B}} := \sup\{r(x)|\nabla f(x)|; x \in \Omega\}$

- $(b^1)^* \simeq \mathcal{B}$
- $1 < \forall p < \infty$ に対して $\mathcal{B} \subset b^p$
- $b^\infty \subset \mathcal{B}$: 連続

定理 3.

Ω: 滑らかな有界領域とする.

$\exists\{\lambda_i\} \subset \Omega$ s.t. $\forall f \in \mathcal{B}\ \exists\{a_i\} \in l^\infty$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i R(x, \lambda_i) r(\lambda_i)^n$$

5　いくつかの補題

定義 (uniformly finite)

開集合族$\{U_i\}$が　uniformly finite with bound N

$\overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \exists N$ s.t. $\forall x \in \Omega\ \#\{i \in \mathbb{N}; x \in U_i\} \leq N$

補題1. (covering lemma)

$0 < \delta < \frac{1}{4}$とする.

以下を満たすようにδによらない定数N, $\{\lambda_i\} \subset \Omega$, 互いに素な$\Omega$の被覆$\{E_i\}$が存在する.

(a)$\forall i \in \mathbb{N}\ E_i$ は可測

(b)$\exists c > 0$ s.t. $\forall i \in \mathbb{N}\ B(\lambda_i, c\delta r(\lambda_i)) \subset E_i \subset B(\lambda_i, \delta r(\lambda_i))$

(c)$\{B(\lambda_i, 3\delta r(\lambda_i))\}$ は uniformly finite with bound N

補題2.

$$I_\alpha f(x) := \int_\Omega \frac{r(y)^\alpha}{d(x,y)^{n+\alpha}} f(y)dy$$

とおく.

$\alpha = 0 \Rightarrow I_\alpha : L^p \to L^p$: 有界 for $p > 1$

$\alpha > 0 \Rightarrow I_\alpha : L^p \to L^p$: 有界 for $p \geq 1$

6　証明の概要

以下の作用素について考察する.

$$A_{p,\{\lambda_i\}}(\{a_i\})(x) := \sum_{i=1}^{\infty} a_i R(x,\lambda_i) r(\lambda_i)^{(1-\frac{1}{p})n} \text{ in } b^p$$

$$S_{p,\{\lambda_i\}} f(x) := \sum_{i=1}^{\infty} R(x,\lambda_i) f(\lambda_i) |E_i| \text{ in } b^p$$

$$U_{p,\{\lambda_i\}}(f) := \{|E_i| f(\lambda_i) r(\lambda_i)^{-(1-\frac{1}{p})n}\}_i$$

示すことは$A_{p,\{\lambda_i\}} : l^p \to b^p(\Omega)$が全射であること.

・$A_{p,\{\lambda_i\}} \circ U_{p,\{\lambda_i\}} = S_{p,\{\lambda_i\}}$

・$S_{p,\{\lambda_i\}} : b^p \to b^p$, $\quad U_{p,\{\lambda_i\}} : b^p \to l^p$,

$A_{p,\{\lambda_i\}} : l^p \to b^p$, はすべて有界作用素

・δを十分小さくとれば、$\|S_{p,\{\lambda_i\}} - I\| < 1$を満たす.

このことから$S_{p,\{\lambda_i\}} : b^p \to b^p$が全単射を示せる.

$$
\begin{aligned}
(I-S)f(x) &= \int_\Omega f(y)R(x,y)dy - \sum_{i=1}^{\infty} R(x,\lambda_i)f(\lambda_i)|E_i| \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f(y)(R(x,y) - R(x,\lambda_i))dy =: F_1(x) \\
&+ \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} (f(y) - f(\lambda_i))R(x,\lambda_i)dy =: F_2(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|F_1(x)| &\lesssim \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} |f(y)||y-\lambda_i||\nabla_y R(x,\bar{y})|dy \\
&\lesssim \delta \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} |f(y)| r(\lambda_i) \frac{1}{d(x,\bar{y})^{n+1}} dy \\
&\lesssim \delta \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} \frac{r(y)}{d(x,y)^{n+1}} |f(y)| dy \\
&= \delta I_1 |f|(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|f(y)-f(\lambda_i)| &\leq \int_\Omega |R_1(y,z)-R_1(\lambda_i,z)||f(z)|dz \\
&\leq \int_\Omega |y-\lambda_i||\nabla_x R_1(\bar{y},z)||f(z)|dz \\
&\lesssim \delta \int_\Omega \frac{r(\lambda_i)r(z)}{d(\bar{y},z)^{n+2}}|f(z)|dz \\
&\lesssim \delta I_1|f|(y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|F_2(x)| &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} |f(y) - f(\lambda_i)||R(x, \lambda_i)|dy \\
&\lesssim \delta \int_{E_i} \frac{1}{d(x, y)^n} I_1|f|(y)dy \\
&= \delta \int_{\Omega} \frac{1}{d(x, y)^n} I_1|f|(y)dy \\
&= \delta I_0 \circ I_1|f|(x)
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] B. R. Choe, H. Koo and H. Yi, Projections for harmonic Bergman spaces and applications, J. Funct. Anal., 216 (2004) 388–421

[2] B. R. Choe, Y. J. Lee and K. Na, Toeplitz operators on harmonic Bergman spaces, Nagoya Math.J., 174 (2004), 165–186.

[3] R.R. Coifman and R. Rochberg, Representation Theorems for Holomorphic and Harmonic functions in L^p, *Astérisque* 77 (1980), 11–66

[4] H. Kang and H. Koo, Estimates of the harmonic Bergman kernel on smooth domain, J.Funct.Anal., 185 (2001), 220–239.

[5] D. H. Luecking, Trace ideal criteria for Toeplitz operators, J. Funct. Anal., 73 (1987), 345–368.

[6] V. L. Oleinik, Embedding theorems for weighted classes of harmonic and analytic functions, J. Soviet Math., 9 (1978), 228–243.

[7] K. Zhu, Operator theory in function spaces, Marcel Dekker. New York and Basel,1989.