

調和ベルグマン核の境界挙動

西尾昌治 田中清喜

大阪市立大学

2015年3月23日
日本数学会2015年度年会
明治大学

ν を単位球 $\mathbb{B}$ 上の正ボレル測度とする。 ν を重みとする調和ベルグマン空間を以下で定義する：

$$b_\nu^2 = b_\nu^2(\mathbb{B}) := \text{Harm}(\mathbb{B}) \cap L^2(\mathbb{B}, d\nu)$$

ここで $\text{Harm}(\mathbb{B})$ は $\mathbb{B}$ 上調和関数全体の成す空間であり $L^2(\mathbb{B}, d\nu)$ は測度 ν に関する 2 乗可積分関数全体の成す空間である。

先行研究としては

- $d\nu(x) = dx$: ルベーグ測度
- $d\nu(x) = dV_\alpha(x) = c_\alpha(1 - |x|^2)^\alpha dx$ ($\alpha > -1$) : 重み α 付きルベーグ測度

などの設定の調和ベルグマン空間が考察されている。

ν を単位球 $\mathbb{B}$ 上の正ボレル測度とする。 ν を重みとする調和ベルグマン空間を以下で定義する：

$$b_\nu^2 = b_\nu^2(\mathbb{B}) := \text{Harm}(\mathbb{B}) \cap L^2(\mathbb{B}, d\nu)$$

ここで $\text{Harm}(\mathbb{B})$ は $\mathbb{B}$ 上調和関数全体の成す空間であり $L^2(\mathbb{B}, d\nu)$ は測度 ν に関する 2 乗可積分関数全体の成す空間である。

先行研究としては

- $d\nu(x) = dx$: ルベーグ測度
- $d\nu(x) = dV_\alpha(x) = c_\alpha(1 - |x|^2)^\alpha dx$ ($\alpha > -1$) : 重み α 付きルベーグ測度

などの設定の調和ベルグマン空間が考察されている。

回転対称な正測度を重みとする調和ベルグマン空間

$\mathcal{M}_{rad}$ を $\mathbb{B}$ 上の回転対称な有限正測度 $d\nu(x) = d\tilde{\nu}(r)d\sigma(\theta)$ であり

$$\tilde{\nu}([r, 1)) > 0 \text{ for any } r \in [0, 1)$$

を満たす（つまり台がコンパクトでない）測度全体の成す空間とする。

Proposition

ν を $\mathbb{B}$ 上の回転対称な正測度とする。このとき次の条件は同値である：

- ① b_ν^2 は再生核ヒルベルト空間である
- ② $\nu \in \mathcal{M}_{rad}$

以下、 $\nu \in \mathcal{M}_{rad}$ として再生核ヒルベルト空間 b_ν^2 についての性質を述べる。

調和ベルグマン核、直交分解

$R_\nu(x, y)$ を b_ν^2 の再生核とする。(調和ベルグマン核と呼ばれる)

Q_ν を $L^2(\mathbb{B}, d\nu)$ から b_ν^2 への直交射影とする。

直交射影 Q_ν は調和ベルグマン核 $R_\nu(x, y)$ による積分作用素によって表示できる。つまり:

$$Q_\nu f(x) = \int_{\mathbb{B}} R_\nu(x, y) f(y) d\nu(y)$$

$x \in \mathbb{B}, f \in L^2(\mathbb{B}, d\nu)$ と書ける。

Lemma (直交分解)

$$b_\nu^2 = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_m(\mathbb{B})$$

ここで $\mathcal{H}_m(\mathbb{B})$ は m 次同次調和多項式を $\mathbb{B}$ 上で制限した関数全体の空間である。

直交射影、調和ベルグマン核の表示

Q_m^ν を b_ν^2 から $\mathcal{H}_m(\mathbb{B})$ への直交射影とし、
 $Z_m^\nu(x, y)$ をその積分作用素の核とする。つまり

$$Q_m^\nu f(x) = \int_{\mathbb{B}} Z_m^\nu(x, y) f(y) d\nu(y)$$

Lemma (調和ベルグマン核の表示)

$$R_\nu(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m^\nu(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{Z_m(x, y)}{\int_{[0,1)} r^{2m} d\tilde{\nu}(r)}$$

ここで、 $Z_m(x, y)$ は *zonal harmonic* である。

直交射影、調和ベルグマン核の表示

Q_m^ν を b_ν^2 から $\mathcal{H}_m(\mathbb{B})$ への直交射影とし、
 $Z_m^\nu(x, y)$ をその積分作用素の核とする。つまり

$$Q_m^\nu f(x) = \int_{\mathbb{B}} Z_m^\nu(x, y) f(y) d\nu(y)$$

Lemma (調和ベルグマン核の表示)

$$R_\nu(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m^\nu(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{Z_m(x, y)}{\int_{[0,1)} r^{2m} d\tilde{\nu}(r)}$$

ここで、 $Z_m(x, y)$ は *zonal harmonic* である。

テプリッツ作用素

μ を $\mathbb{B}$ 上の有限正測度とする。そのとき

$$\mathcal{E}(f, g) = \int_{\mathbb{B}} f(x)g(x)d\mu(x),$$

for $f, g \in \mathcal{F} := b_{\nu}^2 \cap L^2(\mathbb{B}, d\mu)$ とする。このとき $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は閉形式となる。
つまり $\mathcal{F}$ は次のノルムについて完備となる。

$$\|f\|^2 = \mathcal{E}(f, f) + \langle f, f \rangle_{\nu}^2.$$

二次形式の一般論により，次を満たす正測度 $T_{\mu, \nu}$ が唯一つ存在する：

$$\int_{\mathbb{B}} f(x)g(x)d\mu(x) = \mathcal{E}(f, g) = \langle \sqrt{T_{\mu, \nu}}f, \sqrt{T_{\mu, \nu}}g \rangle_{\nu}$$

$f, g \in \text{Dom}(T_{\mu, \nu}) \subset \mathcal{F}$.

$T_{\mu, \nu}$ を表象を μ とするテプリッツ作用素と呼ぶ。

回転対称な表象を持つテプリッツ作用素の固有値

Theorem

$\nu \in \mathcal{M}_{rad}$ とし μ を回転対称な有限正測度とする。そのとき、
($\lambda_m, \mathcal{H}_m(\mathbb{B})$) はテプリッツ作用素 $T_{\mu, \nu}$ の固有値とその固有空間となる。
ここで

$$\lambda_m = \lambda_m(T_{\mu, \nu}) = \frac{\int_{[0,1]} r^{2m} d\tilde{\mu}(r)}{\int_{[0,1]} r^{2m} d\tilde{\nu}(r)}. \quad (1)$$

さらに, $T_{\mu, \nu}$ は

$$T_{\mu, \nu} = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m Q_m^{\nu} \quad (2)$$

と分解できる。

正でない回転対称な有限正測度 μ に対しても $\mu = \mu_+ - \mu_-$ とジョルダン分解を考えることで、テプリッツ作用素を定義することができる。

平均関数 (averaging function) $a_{\mu,\nu}(r)$ とベリジン変換 $B_{\mu,\nu}(x)$ を以下で定める。

$$a_{\mu,\nu}(r) := \frac{\mu(\mathbb{B} \setminus B_r)}{\nu(\mathbb{B} \setminus B_r)} = \frac{\tilde{\mu}([r, 1))}{\tilde{\nu}([r, 1))},$$

$$B_{\mu,\nu}(x) := \frac{\int_{\mathbb{B}} R_{\nu}(x, y)^2 d\mu(y)}{R_{\nu}(x, x)} \left(= \frac{\langle T_{\mu,\nu} R_{\nu}(x, \cdot), R_{\nu}(x, \cdot) \rangle_{\nu}}{\langle R_{\nu}(x, \cdot), R_{\nu}(x, \cdot) \rangle_{\nu}} \right),$$

ここで $B_r = \{|x| < r\}$.

主結果 1

Theorem

μ を $\mathbb{B}$ 上の回転対称な有限測度とする。このとき次の評価を得る：

$$\sup_{x \in \mathbb{B}} |B_{\mu, \nu}(x)| \leq |\lambda_m(T_{\mu, \nu})| \leq \sup_{0 \leq r < 1} |a_{\mu, \nu}(r)|,$$

$$\limsup_{|x| \rightarrow 1} |B_{\mu, \nu}(x)| \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} |\lambda_m(T_{\mu, \nu})| \leq \limsup_{r \rightarrow 1} |a_{\mu, \nu}(r)|,$$

$$\liminf_{|x| \rightarrow 1} |B_{\mu, \nu}(x)| \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} |\lambda_m(T_{\mu, \nu})|$$

Remark. 上の定理よりただちに次がわかる。

$a_{\mu, \nu}$ が $[0, 1)$ 上で有界 $\Rightarrow T_{\mu, \nu}$ は有界作用素

$\limsup_{r \rightarrow 1} a_{\mu, \nu}(r) = 0 \Rightarrow T_{\mu, \nu}$ はコンパクト作用素

主結果 1

Theorem

μ を $\mathbb{B}$ 上の回転対称な有限測度とする。このとき次の評価を得る：

$$\sup_{x \in \mathbb{B}} |B_{\mu, \nu}(x)| \leq |\lambda_m(T_{\mu, \nu})| \leq \sup_{0 \leq r < 1} |a_{\mu, \nu}(r)|,$$

$$\limsup_{|x| \rightarrow 1} |B_{\mu, \nu}(x)| \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} |\lambda_m(T_{\mu, \nu})| \leq \limsup_{r \rightarrow 1} |a_{\mu, \nu}(r)|,$$

$$\liminf_{|x| \rightarrow 1} |B_{\mu, \nu}(x)| \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} |\lambda_m(T_{\mu, \nu})|$$

Remark. 上の定理よりただちに次がわかる。

$a_{\mu, \nu}$ が $[0, 1)$ 上で有界 $\Rightarrow T_{\mu, \nu}$ は有界作用素

$\limsup_{r \rightarrow 1} a_{\mu, \nu}(r) = 0 \Rightarrow T_{\mu, \nu}$ はコンパクト作用素

Theorem

$\mu, \nu \in \mathcal{M}_{rad}$ とする。そのとき次の評価を得る。

$$\frac{R_\nu(x, x)}{R_\mu(x, x)} \leq B_{\mu, \nu}(x)$$

for $x \in \mathbb{B}$. さらに、もし極限 $\lim_{r \rightarrow 1} a_{\mu, \nu}(r)$ が存在するならば、

$$\lim_{|x| \rightarrow 1} \frac{R_\nu(x, x)}{R_\mu(x, x)} = \lim_{|x| \rightarrow 1} B_{\mu, \nu}(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m = \lim_{r \rightarrow 1} a_{\mu, \nu}(r).$$

が成り立つ。

調和ベルグマン核の境界挙動についての例

ν として $d\tilde{\nu} = nr^{n-1}dr$ となるものを取り、
 μ として

$$\tilde{\mu} = \frac{6n}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \delta_{s_k},$$

とする。ここで δ_{s_k} 点 s_k におけるディラック測度とし、 $\{s_k\} \subset [0, 1)$ を

$$s_k := \frac{6}{\pi^2} \sum_{l=1}^k \frac{1}{l^2}$$

とする。そのとき

$$\lim_{|x| \rightarrow 1} \frac{R_{\nu}(x, x)}{R_{\mu}(x, x)} = 1.$$

を得る。

μ, ν の回転対称性から、定理に見られる各種の量はそれぞれ

$$R_\nu(x, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h_m |x|^{2m}}{\int_{[0,1)} r^{2m} d\tilde{\nu}(r)}$$

$$\lambda_m(T_{\mu,\nu}) = \frac{\int_{[0,1)} \tilde{\mu}([t^{\frac{1}{2m}}, 1)) dt}{\int_{[0,1)} \tilde{\nu}([t^{\frac{1}{2m}}, 1)) dt},$$

$$B_{\mu,\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h_m |x|^{2m}}{\int_{[0,1)} r^{2m} d\tilde{\nu}(r)} \lambda_m / \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h_m |x|^{2m}}{\int_{[0,1)} r^{2m} d\tilde{\nu}(r)}$$

と計算できる。ここで h_m は $\mathcal{H}_m(\mathbb{B})$ の次元。

Concluding remark

測度 μ, ν を回転対称な有限測度であるとき、平均関数 $a_{\mu, \nu}$ 、ベレジン変換 $B_{\mu, \nu}$ を用いて

- ① テプリッツ作用素の固有値の評価
(結果として $a_{\mu, \nu}$ が有界 $\Rightarrow T_{\mu, \nu}$ が有界 を得た)

- ② $R_\nu(x, x)$ の評価
を得た。

これからの課題としては

- ① $a_{\mu, \nu}$ が有界 $\Leftarrow T_{\mu, \nu}$ が有界?
- ② $R_\nu(x, y)$ の評価
- ③ 回転対称でない測度についての考察
が挙げられる。

Concluding remark

測度 μ, ν を回転対称な有限測度であるとき、平均関数 $a_{\mu, \nu}$ 、ベレジン変換 $B_{\mu, \nu}$ を用いて

- ① テプリッツ作用素の固有値の評価
(結果として $a_{\mu, \nu}$ が有界 $\Rightarrow T_{\mu, \nu}$ が有界 を得た)

- ② $R_\nu(x, x)$ の評価
を得た。

これからの課題としては

- ① $a_{\mu, \nu}$ が有界 $\Leftarrow T_{\mu, \nu}$ が有界?
- ② $R_\nu(x, y)$ の評価
- ③ 回転対称でない測度についての考察
が挙げられる。

- [1] T. Le, *Toeplitz operators on radially weighted harmonic Bergman spaces*, J. Math. Anal. Appl. **396** (2012), 164–172.
- [2] J. Miao, *Toeplitz operators on harmonic Bergman spaces*, Integr. equ. oper. theory **27** (1997), 426–438.
- [3] T. Nakazi and M. Yamada, *Riesz's functions in weighted Hardy and Bergman spaces*, Can. J. Math., **48** (1996), 930–945.
- [4] T. Nakazi and R. Yoneda, *Compact Toeplitz operators with continuous symbols on weighted Bergman spaces*, Glasgow Math. J., **42** (2000), 31–35.
- [5] M. Nishio and K. Tanaka, *Harmonic Bergman spaces with radial measure weight on the ball*, submitted.
- [6] K. Stroethoff, *Compact Toeplitz operators on weighted harmonic Bergman spaces*, J. Austral. Math. Soc., **64** (1998), 136–148.