調和 Bergman 空間のアトム分解に関する諸注意

大阪市立大学大学院理学研究科

田中清喜

1　単位円板上の正則関数

$L_a^2(\mathbb{D}) := \{h : \mathbb{D}$ 上正則かつ $\|h\|_2 < \infty\}$: Bergman 空間
(ここで $\|h\|_2 = (\int_{\mathbb{D}} |h|^2 dA(z))^{\frac{1}{2}}$)

このとき次が成り立つ.

- $L_a^2(\mathbb{D}) \subset L^2(\mathbb{D})$: 閉部分空間
- $\forall x \in \mathbb{D}$, $ev_x : f \in L_a^2 \to f(z) \in \mathbb{C}$: 有界
- $\forall z \in \mathbb{D}$, $\forall f \in L_a^2(\mathbb{D})$

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} K(z,w) f(w) dw$$

$$K(z,w) = \frac{1}{\pi(1 - z\bar{w})^2}\text{: Bergman 核.}$$

2　滑らかな有界領域上の調和関数

$1 \leq p < \infty$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$: **滑らかな有界領域**

$b^p(\Omega) := \{f : \Omega$**上調和かつ**$\|f\|_p < \infty\}$

調和 Bergman **空間**

(ここで $\|f\|_p := (\int_\Omega |f|^p dx)^{\frac{1}{p}}$**)**

このとき次が成り立つ.

- $b^p(\Omega) \subset L^p(\Omega)$: **閉部分空間**
- $\forall x \in \Omega$, $\forall f \in b^p(\Omega)$

$$f(x) = \int_\Omega R(x, y) f(y) dy$$

ここで $R(\cdot, \cdot)$ **を調和** Bergman **核とする**.

・具体例 $\Omega = \mathbb{B}$（単位球）のとき

$$R_B(x,y) = \frac{(n-4)|x|^4|y|^4 + (8x\cdot y - 2n - 4)|x|^2|y|^2 + n}{nV(B)((1-|x|^2)(1-|y|^2) + |x-y|^2)^{1+\frac{n}{2}}}$$

定理 （ H. Kang and H. Koo(2001) ）

Ω: **滑らかな有界領域**, α, β: **多重指数とする**.

$\exists C_{\alpha,\beta}$ s.t. $\forall x$, $\forall y \in \Omega$

$$|D_x^\alpha D_y^\beta R(x,y)| \le \frac{C_{\alpha,\beta}}{d(x,y)^{n+|\alpha|+|\beta|}}$$

$\exists C$ s.t. $\forall x \in \Omega$

$$R(x,x) \ge \frac{C}{r(x)^n}$$

ここで $d(x,y) := r(x) + r(y) + |x-y|$, $r(x) := dist(x, \partial\Omega)$

次の作用素を考える.

$$A_{p,\{\lambda_i\}}(\{a_i\})(x) := \sum_{i=1}^{\infty} a_i R(x,\lambda_i) r(\lambda_i)^{(1-\frac{1}{p})n}$$

定理１.
$1 < p < \infty$
Ω: **滑らかな有界領域とする**.
$\exists\{\lambda_i\} \subset \Omega$ s.t. $A_{p,\{\lambda_i\}} : \ell^p \to b^p$: **有界全射**

注意. $f \in b^p$ **に対して**,$\{a_i\} \in \ell^p$ **は**

$$a_i = c_i f(\lambda_i)$$

によって与えられる.

3　その他の再生核

η : $|\nabla\eta|^2 = 1 + \eta\omega$ for some $\omega \in C^\infty(\bar{\Omega})$ を満たす Ω の defining function

微分作用素

$$K_1 g := g - \frac{1}{2}\Delta(\eta^2 g)$$

とおき、

$$R_1(x,y) := K_1(R_x)(y)$$

$$P_1 f(x) := \int_\Omega R_1(x,y) f(y) dy$$

とおくと次のような性質が成り立つ.

定理　(B. R. Choe, H. Koo and H. Yi(2004))

- $\forall f \in b^1(\Omega) \quad P_1 f = f$
- $1 \le p < \infty$ **のとき** $P_1 : L^p(\Omega) \to b^p(\Omega)$ **は有界作用素**
- α: **多重指数とする**.　$\exists C_\alpha, C_1 > 0$ s.t.

$$|D_x^\alpha R_1(x,y)| \le \frac{C_\alpha r(y)}{d(x,y)^{n+1+|\alpha|}}$$

$$|D_y R_1(x,y)| \le \frac{C_1}{d(x,y)^{n+1}}$$

$$A_{1,p,\{\lambda_i\}}(\{a_i\})(x) := \sum_{i=1}^{\infty} a_i R_1(x,\lambda_i) r(\lambda_i)^{(1-\frac{1}{p})n}$$

定理 2.

$1 \leq p < \infty$

Ω: **滑らかな有界領域とする**.

$\exists\{\lambda_i\} \subset \Omega$ s.t. $A_{1,p,\{\lambda_i\}} : \ell^p \to b^p$: **有界全射**

4　調和ブロック空間

この章では $0 \in \Omega$ **とする**.

定義 (調和ブロック空間)

$\mathcal{B} := \{f : \Omega$**上調和かつ**$\|f\|_{\mathcal{B}} < \infty\}$: **調和ブロック空間**

ここで$\|f\|_{\mathcal{B}} := \sup\{r(x)|\nabla f(x)|; x \in \Omega\}$

$\tilde{\mathcal{B}} := \{f \in \mathcal{B} : f(0) = 0\}$

- $(b^1)^* \backsimeq \mathcal{B}$
- $1 < \forall p < \infty$ **に対して** $\mathcal{B} \subset b^p$
- $b^\infty \subset \mathcal{B}$: **連続**

定理 3.
Ω: **滑らかな有界領域とする**.
$\exists\{\lambda_i\} \subset \Omega$ s.t. $\forall f \in \tilde{\mathcal{B}}$ $\exists\{a_i\} \in \ell^\infty$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \tilde{R}_1(x, \lambda_i) r(\lambda_i)^n$$

ここで $\tilde{R}_1(x, y) := R_1(x, y) - R_1(0, y)$.

5　いくつかの補題

定義 (uniformly finite intersection)
　開集合族$\{U_i\}$**が**　uniformly finite intersection with bound N
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists N$ s.t. $\forall x \in \Omega \ \#\{i \in \mathbb{N}; x \in U_i\} \leq N$

補題 1. (covering lemma)
$0 < \delta < \frac{1}{4}$ **とする**. **以下を満たすように**δ**によらない定数**N, $\{\lambda_i\} \subset \Omega$, **互いに素な**$\Omega$**の被覆**$\{E_i\}$**が存在する**.
(a)$\forall i \in \mathbb{N}$ E_i **は可測**
(b)$\exists c > 0$ s.t. $\forall i \in \mathbb{N}$ $B(\lambda_i, c\delta r(\lambda_i)) \subset E_i \subset B(\lambda_i, \delta r(\lambda_i))$
(c)$\{B(\lambda_i, 3\delta r(\lambda_i))\}$ **は** uniformly finite intersection with bound N

補題 2.

$$I_\alpha f(x) := \int_\Omega \frac{r(y)^\alpha}{d(x,y)^{n+\alpha}} f(y) dy$$

とおく.

$\alpha = 0 \Rightarrow I_\alpha : L^p \to L^p$: **有界** for $p > 1$

$\alpha > 0 \Rightarrow I_\alpha : L^p \to L^p$: **有界** for $p \geq 1$

6　証明の概要

以下の作用素について考察する.

$$A_{p,\{\lambda_i\}}(\{a_i\})(x) := \sum_{i=1}^{\infty} a_i R(x,\lambda_i) r(\lambda_i)^{(1-\frac{1}{p})n} \text{ in } b^p$$

$$S_{p,\{\lambda_i\}} f(x) := \sum_{i=1}^{\infty} R(x,\lambda_i) f(\lambda_i)|E_i| \text{ in } b^p$$

$$U_{p,\{\lambda_i\}}(f) := \{|E_i| f(\lambda_i) r(\lambda_i)^{-(1-\frac{1}{p})n}\}_i$$

示すことは$A_{p,\{\lambda_i\}} : l^p \to b^p(\Omega)$**が全射であること**.

- $A_{p,\{\lambda_i\}} \circ U_{p,\{\lambda_i\}} = S_{p,\{\lambda_i\}}$
- $S_{p,\{\lambda_i\}} : b^p \to b^p, \quad U_{p,\{\lambda_i\}} : b^p \to l^p,$

  $A_{p,\{\lambda_i\}} : l^p \to b^p$, はすべて有界作用素
- δを十分小さくとれば、$\|S_{p,\{\lambda_i\}} - I\| < 1$を満たす.

このことから$S_{p,\{\lambda_i\}} : b^p \to b^p$が全単射を示せる.

7　応用

以下、Hilbert **空間** b^2 **のみを考える**.

定義 (Toeplitz operator) $\mu \in M(\Omega)$ **に対して** Toeplitz operator T_μ with symbol μ **を次で定義する**.

$$T_\mu f(x) := \int_\Omega R(x,y) f(y) d\mu(y) \quad (x \in \Omega). \tag{1}$$

Problem

Toeplitz operator **の性質を** μ **を使って記述せよ**!

定義 (averaging function, Berezin transform)

$\mu \geq 0$, $\delta \in (0,1)$ **に対して** averaging functon $\hat{\mu}_\delta$ **を次で定義する**.

$$\hat{\mu}_\delta(x) := \frac{\mu(B(x,\delta r(x)))}{V(B(x,\delta r(x)))} \quad (x \in \Omega). \tag{2}$$

さらに $1 < p < \infty$ **に対して** Ω **の** Berezin p-transform $\tilde{\mu}_p$ **を次で定義する**.

$$\tilde{\mu}_p(x) := \frac{\int_\Omega |R(x,y)|^p d\mu(y)}{\|R(x,\cdot)\|_{b^p}^p} \quad (x \in \Omega). \tag{3}$$

定義 (Schatten class operator) X をHilbert空間としTを compact作用素とする. T がSchatten p-class 作用素 $(0 < p)$ とは次を満たすことをいう

$$\|T\|_{S_p(X)} := \left(\sum_{m=1}^{\infty} |s_m(T)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

ここで$s_m(T)$ はT のsingular value 数列である [5].

先の補助関数を使ってToeplitz operatorがp-Schatten族に属する必要十分条件を述べた結果がある.

定理 (B. R. Choe, Y. J. Lee and K. Na(2004)) $1 \le p < \infty$, $\delta \in (0,1)$ **とする**. $\mu \ge 0$ **に対し**, **次の条件は同値**:

(a) $T_\mu \in S_p$

(b) $\tilde{\mu} \in L^p(\lambda)$

(c) $\hat{\mu}_\delta \in L^p(\lambda)$

(d) $\sum_{j=1}^{\infty} \hat{\mu}_\delta(\lambda_j)^p < \infty$

ここで $d\lambda(x) := R(x,x)dx$.

定理 4.
$\frac{2(n-1)}{n+2} < p < 1$ **とする**. **もし** $\sum_{j=1}^{\infty} \hat{\mu}_\delta(\lambda_j)^p < \infty$ **ならば**, **そのとき** $T_\mu \in S_p$ **である**.

証明の概要

補題 3.

T をHilbert空間 H 上のcompact作用素とし $0 < p \leq 2$ とする．そのとき H の任意の正規直交基 $\{e_n\}$ に対して次が成り立つ．

$$\|T\|_{S_p(X)}^p \leq \sum_n \sum_k |\langle Te_n, e_k \rangle|^p. \tag{4}$$

この補題を用いて、$\|T_\mu A\|_{S_p(X)}^p < \infty$ を示す．ここで A は定理 2．にて b^2 に対して得られる全射有界写像．そこから $\|T_\mu\|_{S_p(X)} < \infty$ を得る．

まず $\langle A^* T_\mu A e_i, e_j \rangle$ を計算する．

$$Ae_i(x) = R_1(x, \lambda_i) r(\lambda_i)^{\frac{n}{2}}$$

であり

$$T_\mu Ae_i(x) = r(\lambda_i)^{\frac{n}{2}} \int_\Omega R_1(x, y) R_1(y, \lambda_i) d\mu(y).$$

となる．よって，

$$\langle A^* T_\mu Ae_i, e_j \rangle = r(\lambda_i)^{\frac{n}{2}} r(\lambda_j)^{\frac{n}{2}} \int_\Omega R_1(y, \lambda_i) R_1(y, \lambda_j) d\mu(y).$$

をえる．さらに計算して

$$\sum_i \sum_j |\langle A^* T_\mu A e_i, e_j\rangle|^p$$

$$= \sum_i \sum_j \left| r(\lambda_i)^{\frac{n}{2}} r(\lambda_j)^{\frac{n}{2}} \int_\Omega R_1(x,\lambda_i) R_1(x,\lambda_j) d\mu(x)\right|^p$$

$$\lesssim \sum_i \sum_j r(\lambda_i)^{\frac{np}{2}} r(\lambda_j)^{\frac{np}{2}} \Big(\sum_k \int_{B(\lambda_k,\delta r(\lambda_k))} \frac{r(\lambda_i)}{d(x,\lambda_i)^{n+1}} \frac{r(\lambda_j)}{d(x,\lambda_j)^{n+1}} d|\mu|(x)\Big)^p$$

$$\lesssim \sum_j r(\lambda_i)^{\frac{np}{2}} r(\lambda_j)^{\frac{np}{2}} \Big(\sum_k |\mu|(B(\lambda_k,\delta r(\lambda_k))) \frac{r(\lambda_i)}{d(\lambda_k,\lambda_i)^{n+1}} \frac{r(\lambda_j)}{d(\lambda_k,\lambda_j)^{n+1}}\Big)^p$$

$$\lesssim \sum_k \hat{\mu}_\delta(\lambda_k)^p r(\lambda_k)^{np} \Big(\sum_i \frac{r(\lambda_i)^{\frac{np}{2}+p}}{d(\lambda_k,\lambda_i)^{(n+1)p}}\Big)^2$$

$$= \sum_k \hat{\mu}_\delta(\lambda_k)^p \Big(\sum_i \frac{r(\lambda_k)^{\frac{np}{2}} r(\lambda_i)^{\frac{np}{2}+p}}{d(\lambda_k,\lambda_i)^{(n+1)p}}\Big)^2$$

よってiについての和に注目すると次を得る.

$$
\begin{aligned}
\sum_i \frac{r(\lambda_k)^{\frac{np}{2}} r(\lambda_i)^{\frac{np}{2}+p}}{d(\lambda_k,\lambda_i)^{(n+1)p}} &\lesssim \sum_i \int_{B(\lambda_i,\delta\lambda_i)} \frac{r(\lambda_k)^{\frac{np}{2}} r(\lambda_i)^{\frac{np}{2}+p-n}}{d(\lambda_k,\lambda_i)^{n+(n+1)p-n}} dy \\
&\lesssim \int_\Omega \frac{r(\lambda_k)^{\frac{np}{2}} r(y)^{\frac{np}{2}+p-n}}{d(\lambda_k,y)^{n+(n+1)p-n}} dy \lesssim 1.
\end{aligned}
$$

仮定 $\frac{2(n-1)}{n+2} < p < 1$ **は可積分条件として必要**.

$$
\begin{aligned}
(I-S)f(x) &= \int_\Omega f(y)R(x,y)dy - \sum_{i=1}^\infty R(x,\lambda_i)f(\lambda_i)|E_i| \\
&= \sum_{i=1}^\infty \int_{E_i} f(y)(R(x,y)-R(x,\lambda_i))dy =: F_1(x) \\
&+ \sum_{i=1}^\infty \int_{E_i} (f(y)-f(\lambda_i))R(x,\lambda_i)dy =: F_2(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|F_1(x)| &\lesssim \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} |f(y)||y-\lambda_i||\nabla_y R(x,\bar{y})|dy \\
&\lesssim \delta \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} |f(y)| r(\lambda_i) \frac{1}{d(x,\bar{y})^{n+1}} dy \\
&\lesssim \delta \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} \frac{r(y)}{d(x,y)^{n+1}} |f(y)| dy \\
&= \delta I_1 |f|(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|f(y) - f(\lambda_i)| &\leq \int_\Omega |R_1(y,z) - R_1(\lambda_i, z)||f(z)|dz \\
&\leq \int_\Omega |y - \lambda_i||\nabla_x R_1(\bar{y}, z)||f(z)|dz \\
&\lesssim \delta \int_\Omega \frac{r(\lambda_i) r(z)}{d(\bar{y}, z)^{n+2}} |f(z)|dz \\
&\lesssim \delta I_1 |f|(y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|F_2(x)| &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} |f(y) - f(\lambda_i)||R(x, \lambda_i)|dy \\
&\lesssim \delta \int_{E_i} \frac{1}{d(x,y)^n} I_1|f|(y)dy \\
&= \delta \int_{\Omega} \frac{1}{d(x,y)^n} I_1|f|(y)dy \\
&= \delta I_0 \circ I_1|f|(x)
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] B. R. Choe, H. Koo and H. Yi, Projections for harmonic Bergman spaces and applications, J. Funct. Anal., 216 (2004) 388–421

[2] B. R. Choe, Y. J. Lee and K. Na, Toeplitz operators on harmonic Bergman spaces, Nagoya Math.J., 174 (2004), 165–186.

[3] R.R. Coifman and R. Rochberg, Representation Theorems for Holomorphic and Harmonic functions in L^p, *Astérisque* 77 (1980), 11–66

[4] H. Kang and H. Koo, Estimates of the harmonic Bergman kernel on smooth domain, J.Funct.Anal., 185 (2001), 220–239.

[5] D. H. Luecking, Trace ideal criteria for Toeplitz operators, J. Funct. Anal., 73 (1987), 345–368.

[6] V. L. Oleinik, Embedding theorems for weighted classes of harmonic and analytic functions, J. Soviet Math., 9 (1978), 228–243.

[7] K. Zhu, Operator theory in function spaces, Marcel Dekker. New York and Basel,1989.