授業予定（変更されたシラバス）

①力学1の確認と力学2の概要
②仕事
③運動エネルギー
④位置エネルギー　（小）
⑤力学的エネルギーとその保存則　（小）
⑥エネルギーの総合演習　（小）
⑦単振動１：定性的な理解と三角関数（＋確認試験１）
⑧単振動２：運動方程式を解く
⑨単振動３：問題演習　（小）
⑩円運動と慣性力１：基礎事項　（小）
⑪円運動と慣性力２：問題演習　（小）
⑫力のモーメント１：実験的理解と定義　（小）
⑬力のモーメント２：問題演習１　（小）
⑭問題演習２（＋確認試験２）
⑮まとめ
⑯期末試験

力学2≪学習到達目標≫

1）仕事の定義を説明できる。

2）力学的エネルギー保存則を説明できる。

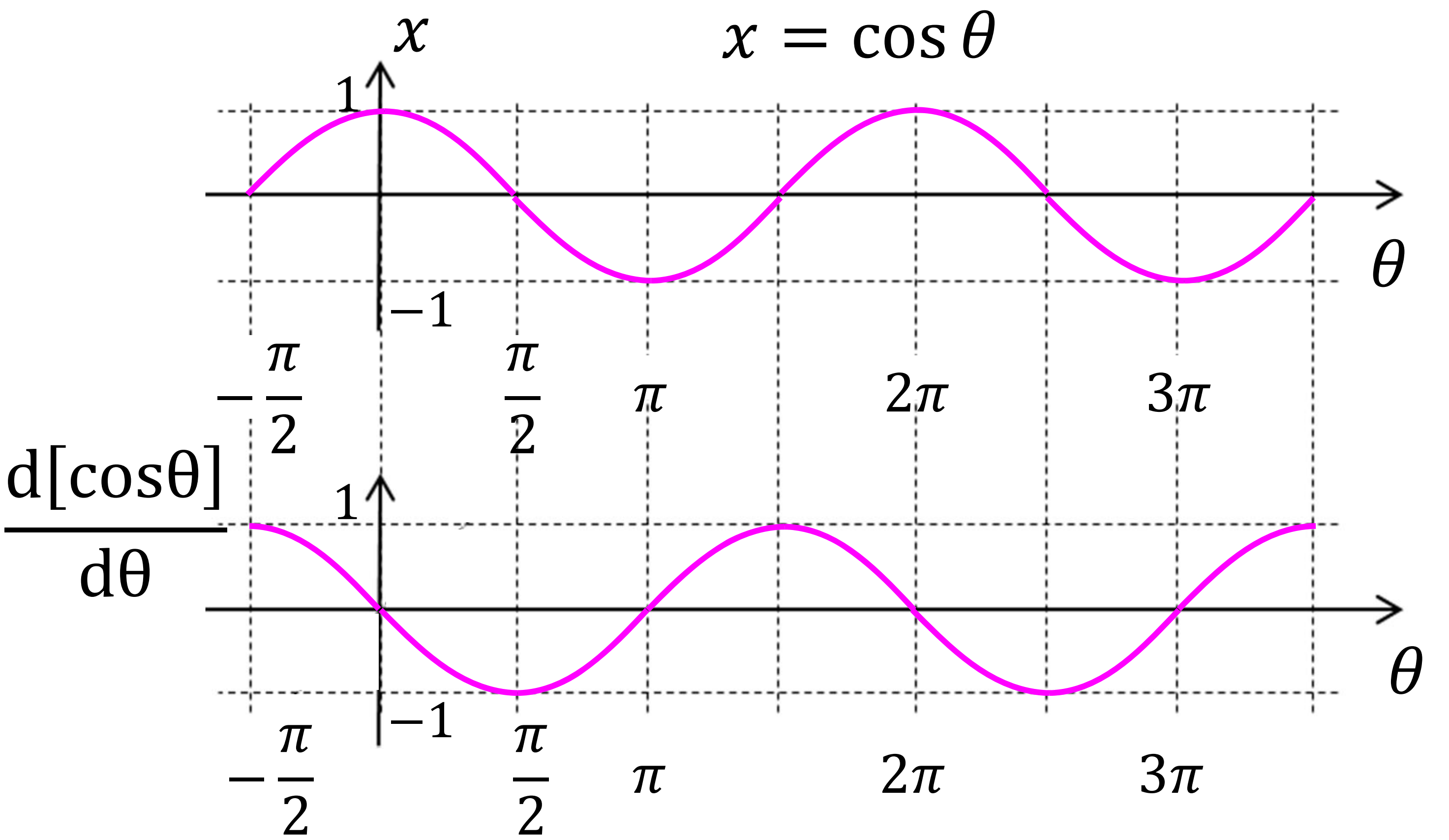
3）単振動の運動方程式を解き，その運動を説明できる。

4）円運動と，慣性力としての遠心力を説明できる。

5）力のモーメントの定義を説明できる。

（テキスト第18章p.77 ）

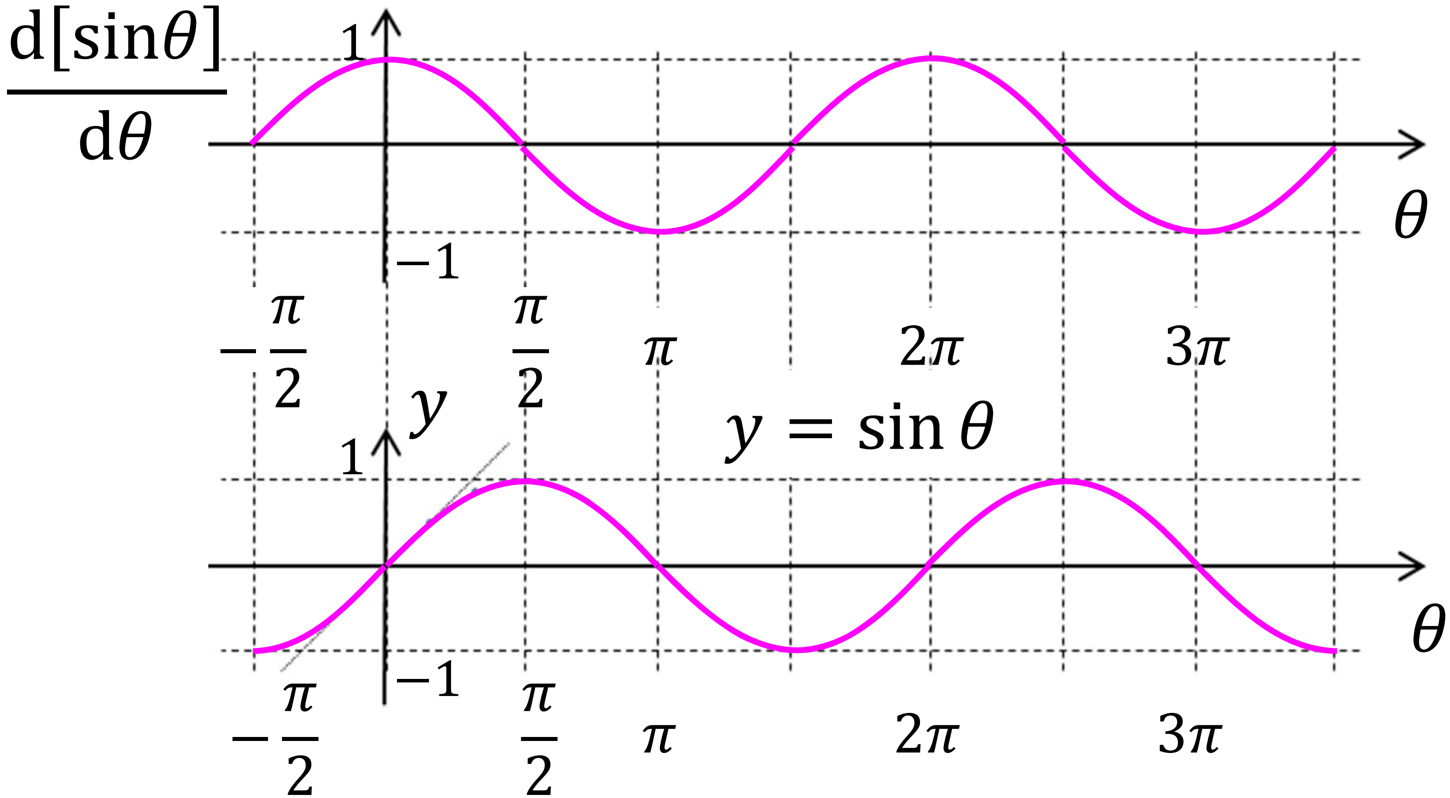
(7) 三角関数の微分



三角関数の微分:

$$\boxed{\frac{d[\cos\theta]}{d\theta} = -\sin\theta \quad , \quad \frac{d[\sin\theta]}{d\theta} = \cos\theta}$$

(7) 三角関数の微分



三角関数の微分:

$$\boxed{\frac{d[\cos\theta]}{d\theta} = -\sin\theta \quad , \quad \frac{d[\sin\theta]}{d\theta} = \cos\theta}$$

（テキスト p.86）

(8) 演習3 : 問題演習20 の問題20-9に取り組む。

(1) $f(x) = 2\sin x - \cos x$

(2) $f(x) = 3\sin x + 5\cos x$

導関数 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ と微分係数 $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ $\left.\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\frac{\pi}{3}}$

三角関数の微分 :

$$\frac{\mathrm{d}[\cos\theta]}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta \quad , \quad \frac{\mathrm{d}[\sin\theta]}{\mathrm{d}\theta} = \cos\theta$$

（テキスト p.86）

(8) 演習3：問題20-9

(1) $$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2\sin x - \cos x) \quad = 2\cos x + \sin x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2) $$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3\sin x + 5\cos x) \quad = 3\cos x - 5\sin x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 5\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}[\cos\theta]}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta \quad , \quad \frac{\mathrm{d}[\sin\theta]}{\mathrm{d}\theta} = \cos\theta$$

（テキスト p.84,86）

(9) 演習4:次の関数の微分を求めよ。

(1) $f(t) = 3\cos(9t + 7)$ 　　$\theta(t) = 9t + 7$ と置く。

(2) $g(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$ 　　$\theta(t) = \omega t + \alpha$ と置く。

(3) $h(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$ 　　$\theta(t) = \omega t + \alpha$ と置く。

（A, ω, αは定数）

合成関数の微分の公式: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(\dfrac{1}{\mathrm{d}x} \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{1} = \right) \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}$

合成関数:$y = y(u)$ 　$u = u(x)$ 　$y = y\big(u(x)\big) = y(x)$

例: $y = \cos u$ 　　$u = 2x + 3$ 　　$y = \cos(2x + 3)$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}(2x+3)}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}(\cos u)}{\mathrm{d}u} = \cdots$$

（テキスト p.84,86）

(9) 演習4：次の関数の微分を求めよ。

(1) $f(t) = 3\cos(9t+7)$　　$\theta(t) = 9t+7$ と置く。

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}(9t+7)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}(3\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}$$

$$= 9\cdot 3(-\sin\theta) = -27\sin(9t+7)$$

(2) $g(t) = A\cos(\omega t+\alpha)$　　$\theta(t) = \omega t+\alpha$ と置く。

$$\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}(\omega t+\alpha)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}(A\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}$$

$$= \omega\cdot A(-\sin\theta) = -\omega A\sin(\omega t+\alpha)$$

(3) $h(t) = A\sin(\omega t+\alpha)$　　$\theta(t) = \omega t+\alpha$ と置く。

$$\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}(\omega t+\alpha)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}(A\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}$$

$$= \omega\cdot A\cos\theta = \omega A\cos(\omega t+\alpha)$$

（テキスト p.43）

(10) 演習5: 上の演習の関数 $g(t)$, $h(t)$ の2階微分を計算して，次の重要な性質を導け。(A, ω, αは定数）。

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2[A\cos(\omega t+\alpha)]}{\mathrm{d}t^2} &= -\omega^2 A\cos(\omega t+\alpha)\\ \frac{\mathrm{d}^2[A\sin(\omega t+\alpha)]}{\mathrm{d}t^2} &= -\omega^2 A\sin(\omega t+\alpha)\end{aligned}}$$

（ 7.10 ）

（テキスト p.43）

(10) 演習5 : 2階微分

$$\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = g'(t) = -\omega A \sin(\omega t + \alpha) \qquad \theta(t) = \omega t + \alpha \text{ と置く。}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}g'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}g'}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}(\omega t + \alpha)}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}(-\omega A \sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}$$

$$= \omega \cdot (-\omega A)\cos\theta = -\omega^2 A \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = h'(t) = \omega A \cos(\omega t + \alpha) \qquad \theta(t) = \omega t + \alpha \text{ と置く。}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 h(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}h'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}h'}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}(\omega t + \alpha)}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}(\omega A \cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}$$

$$= \omega \cdot \omega A(-\sin\theta) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \alpha)$$

（テキスト p.43）

(10) 演習5: 上の演習の関数 $g(t)$, $h(t)$ の2階微分を計算して，次の重要な性質を導け。(A, ω, αは定数)。

三角関数cos,またはsinと，1次関数$\omega t+\alpha$の合成関数に関して，その関数を2回微分すると

元の関数×（$-\omega^2$）

になる。

$$\frac{\mathrm{d}^2[A\cos(\omega t+\alpha)]}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2 A\cos(\omega t+\alpha)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2[A\sin(\omega t+\alpha)]}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2 A\sin(\omega t+\alpha)$$

（テキスト p.43）

(11) 次回の単振動を理解する上で必要な定理: 微分の性質 (7.10) から次の定理が得られる。

定理: 変数tの未知関数$x(t)$が, 次の微分を含む関係式（微分方程式）を満たすことが分かったとする。

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -cx(t)}$$

ただし, cは正の定数（$c > 0$）

この場合, 三角関数の性質（7.10）より, 関数$x(t)$は必ず次の三角関数,

$$\boxed{x(t) = A\cos(\sqrt{c}t + \alpha)}$$

（A, αは定数）

で表すことができる。[定理終わり]

項目（10）から$c = \omega^2$として考えよ

第8回目　単振動2（運動方程式を解く）

今日の授業の目的

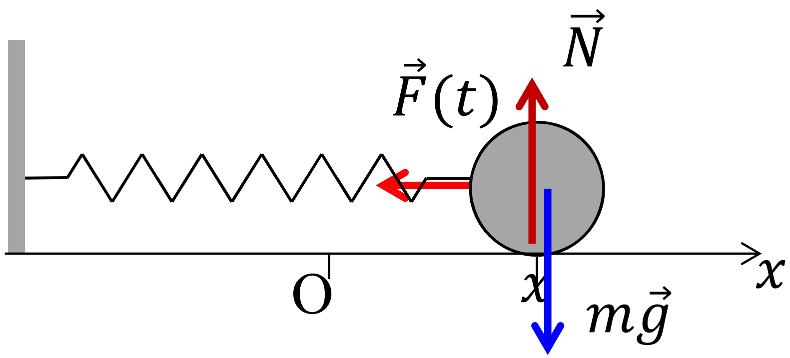
前回から始まり3回分の授業で，ニュートン力学で実際の運動を理解する具体例として，単振動を扱っている。前回には前提知識として必要な三角関数の基礎事項を学んだ。そこで今回の授業の目的は，力学の基本パターン（第6 章の手順）に従って運動方程式を解いて，物体の単振動を理解することである。

（テキスト第10章p.43 ）

(1) 状況設定:

ばねに結ばれた物体の運動

＜テキスト第9章p.43の上図と同様な図を描け＞



$$\vec{N} + m\vec{g} = \vec{0}$$

重力と垂直抗力はつり合っている。x方向の運動には影響しない。

◍ 初期条件:時刻$t = t_0$ [s] で,

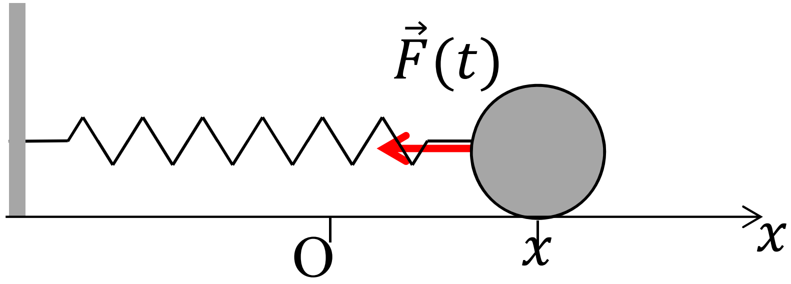
$$v(t_0) = v_0 \text{ [m/s]}, \quad x(t_0) = x_0 \text{ [m]} \qquad (8.1)$$

（時刻t_0 [s]はゼロにとることも多い。）

(2) 力学の基本パターン（第6章p.25の手順）の実行:

物体に働く力 $F(t)$（p.25 の①, ②）:

$$F(t) = \underline{-kx(t)}.$$



運動方程式（p.25 の③）:

$$\underline{ma(t) = F(t)}.$$

$$\left(a(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} \right)$$

加速度 $a(t)$（p.25 の④）:

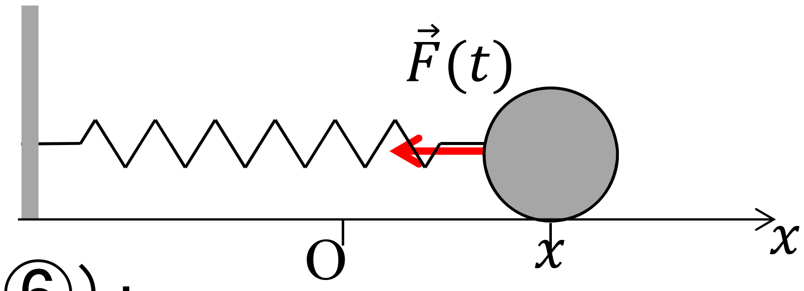
$ma(t) = F(t)$ より, $a(t) = \dfrac{F(t)}{m}$

$$(a(t) =)\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = \underline{\frac{F(t)}{m} = \frac{-kx(t)}{m} = -\frac{k}{m}x(t)}.$$

(テキスト第10章p.43,第6章p.25)

(2) 力学の基本パターン(第6章p.25の手順)の実行:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x(t)$$



速度 $v(t)$と位置$x(t)$(p.25 の⑤, ⑥):

積分計算では求まらない。ここでは, 前回プリント(11)の

定理 $\dfrac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -cx(t)$ の解は $x(t) = A\cos(\sqrt{c}t + \alpha)$

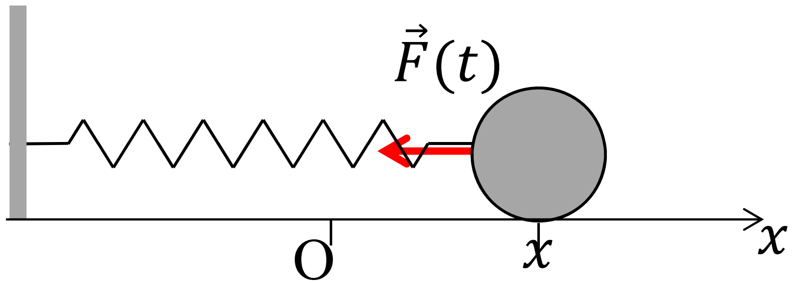
を用いて, $x(t) = A\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t + \alpha\right)$

$x(t) =$ $A\cos(\omega t + \alpha)$.

ただし, $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ かつ A, αは積分定数

(2) 力学の基本パターン（第6章p.25の手順）の実行:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$$



定数 A, αの決定:

$\theta(t) = \omega t + \alpha$ と置く。

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}(\omega t + \alpha)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}(A\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}$$

$$= \omega\cdot A(-\sin\theta) = -\omega A\sin(\omega t + \alpha)$$

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \quad -\omega A\sin(\omega t + \alpha)$$

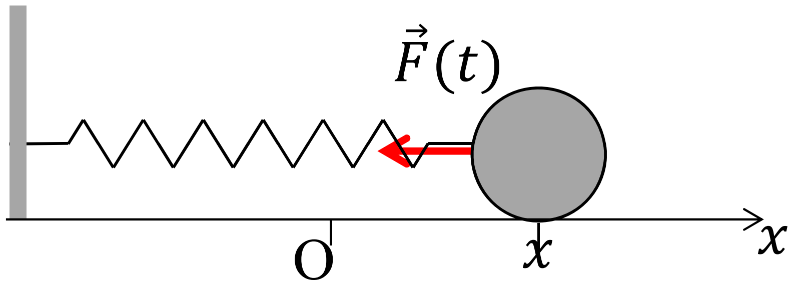
ちなみに，もう一回微分すれば，三角関数の2階微分に

関する重要な性質 $\dfrac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x(t)$ を導ける。

（テキスト第10章p.43,第6章p.25 ）

(2) 力学の基本パターン（第6章p.25の手順）の実行:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$$
$$v(t) = -\omega A\sin(\omega t + \alpha)$$



よって，初期条件（8.1）より，

$x(t)$, $v(t)$に$t = t_0$を代入して

$$x(t_0) = A\cos(\omega t_0 + \alpha)$$
$$v(t_0) = -\omega A\sin(\omega t_0 + \alpha)$$

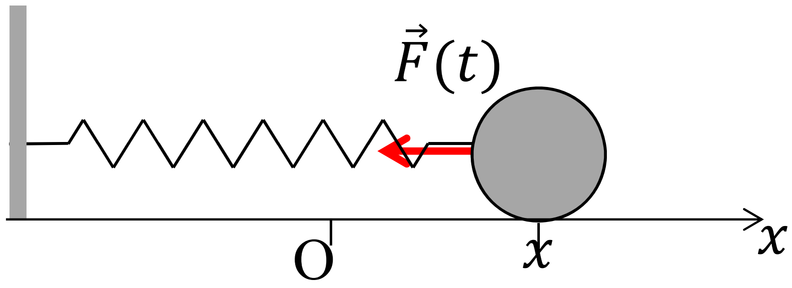
初期条件

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ v(t_0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\cos(\omega t_0 + \alpha) = x_0 \\ A\sin(\omega t_0 + \alpha) = -\dfrac{v_0}{\omega} \end{cases}$$

この連立方程式を解けば，A，αが得られる。

（テキスト第10章p.43,第6章p.25 ）

(3) 演習1 : $A(A \neq 0)$とαの連立方程式

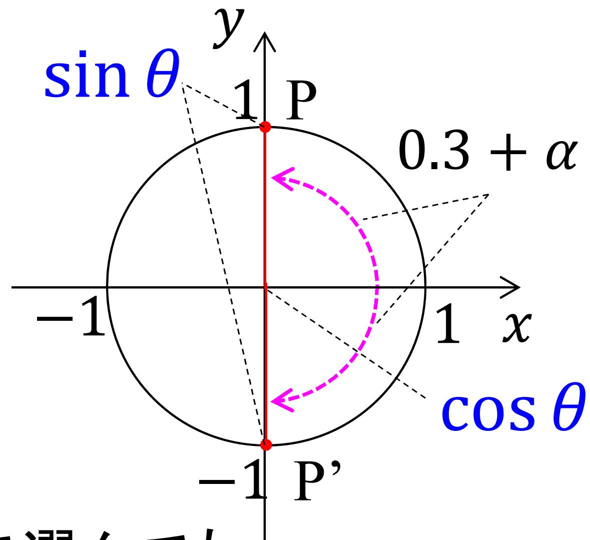


$A(A \neq 0)$とαの連立方程式

$$A\cos(0.3+\alpha)=0$$

$$A\sin(0.3+\alpha)=7$$

を解け。



$A \neq 0$であるので，両辺をAで割ると,

$$\cos(0.3+\alpha)=0 \quad \cdots ①$$

$$\sin(0.3+\alpha)=7/A \quad \cdots ②$$

①の解を単位円を作図して求める。

$0.3+\alpha=+\pi/2$ or $-\pi/2$（どちらを選んでも等価な解になる）

$$\therefore \alpha=+\frac{\pi}{2}-0.3 \ \ [\mathrm{rad}]$$

②に代入して，$\sin(\pi/2)=7/A \Rightarrow 1=7/A \ \ \therefore A=7 \ [\mathrm{m}]$

（テキスト第10章p.43 ）

(4) 単振動の特徴:

$\omega = \sqrt{k/m}$ かつ A, αを積分定数として

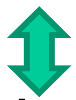
$$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha) \ \ [\mathrm{m}]$$

である。

「想像上の円運動」

半径$|A|$，回転角$\theta = \omega t + \alpha$

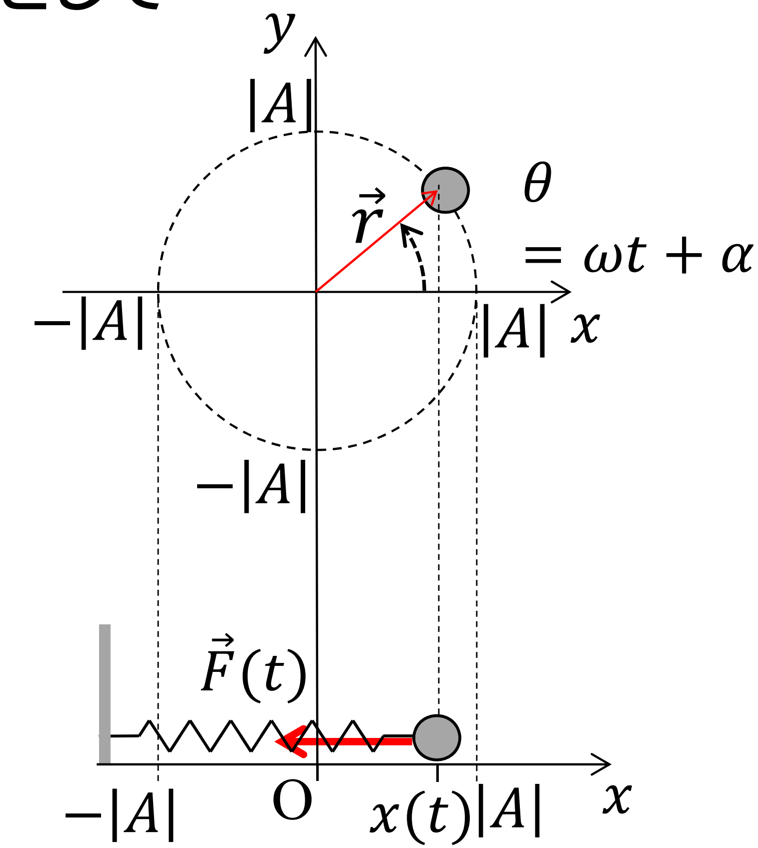
のx座標が単振動に対応



単振動では

$|A|$ [m]： 振幅

$\omega t + \alpha$ [rad]： 位相



(4) 単振動の特徴:

単振動

$$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha) \quad [\mathrm{m}]$$

「想像上の円運動」

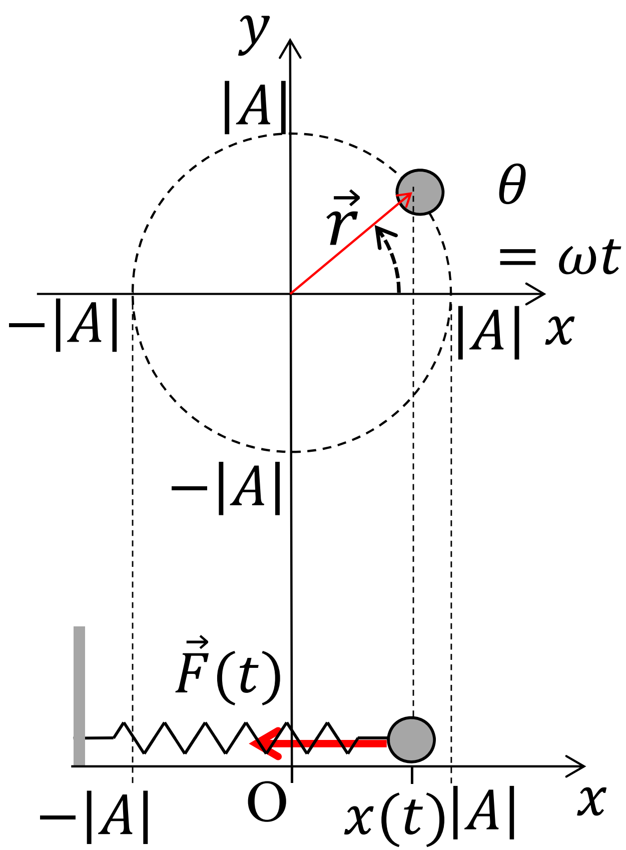
半径$|A|$，回転角$\theta = \omega t + \alpha$

ω: 角速度

単振動では

ω [rad/s]: 角振動数

$$\omega = \frac{d\theta(t)}{dt}$$



(4) 単振動の特徴:

単振動

$$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha) \ \ [\mathrm{m}]$$

「想像上の円運動」

f : 1秒間あたりの回転数

T : 1回転に必要な時間

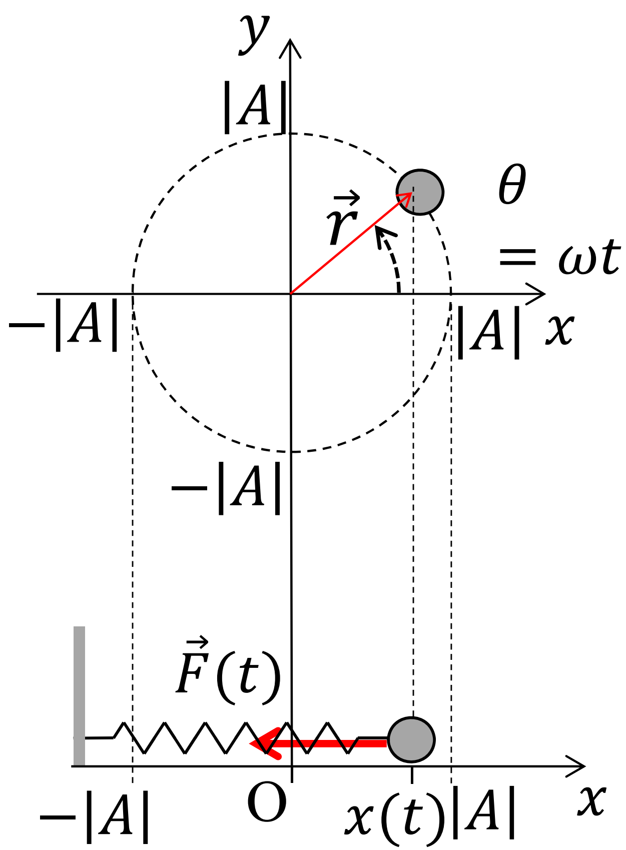
⇕

単振動では

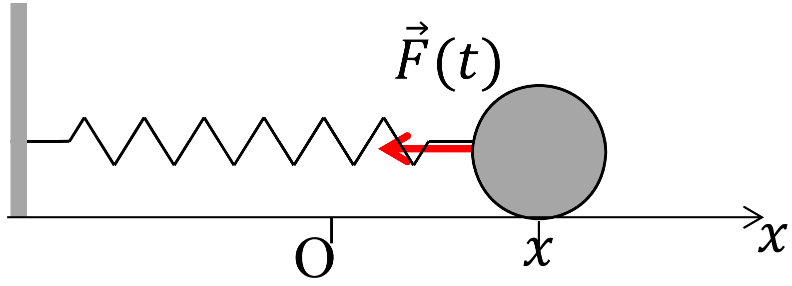
f [Hz] : 振動数

[Hz]=[1/s]

T [s] : 周期



(4) 単振動の特徴:



単振動の基本的な関係式:

「想像上の円運動」の

1周＝2π[rad]

1秒あたりの回転角ω[rad/s]に1周する時間T [s]を掛けると，1周分の回転角に等しい。

$$\omega T = 2\pi$$

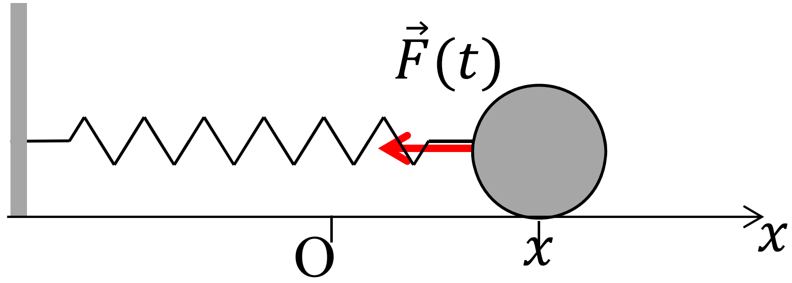
1秒あたりの振動回数である振動数fは，「想像上の円運動」の1秒あたりの回転角ω[rad/s]が何周分に相当するか（ 2πの何倍か），に等しい。

$$f = \frac{\omega}{2\pi}\left(= \frac{1}{T}\right) \quad \text{または} \quad \omega = 2\pi f\left(= \frac{2\pi}{T}\right)$$

（テキスト第10章p.43,第6章p.25 ）

(5) 演習2:

$$x(t) = 2\cos(3\pi t + 0.2\pi)\ [\mathrm{m}]$$

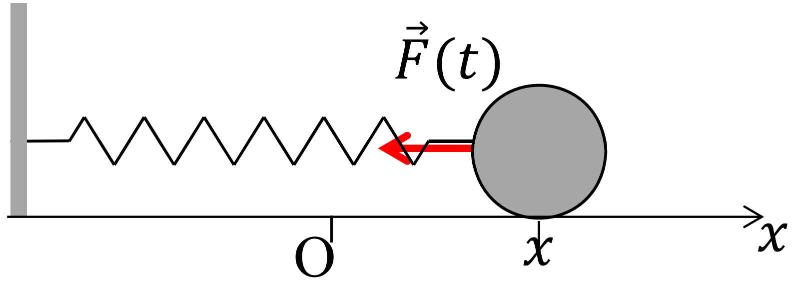


この単振動の，位相$\theta(t)$，振幅$|A|$，角振動数ω，振動数 f，周期 Tを求めよ。

さらに時間があれば，この単振動の速度$v(t)$と加速度$a(t)$を求めよ。

(5) 演習2:

$$x(t) = 2\cos(3\pi t + 0.2\pi)\ [\mathrm{m}]$$



位相 $\theta(t) = 3\pi t + 0.2\pi\ [\mathrm{rad}]$,
振幅 $|A| = |2|\ [\mathrm{m}] = 2\ [\mathrm{m}]$,
角振動数 $\omega = 3\pi\ [\mathrm{rad/s}]$,

周期は ( ) の中が2π変化する条件 $\omega T = 2\pi$ から,

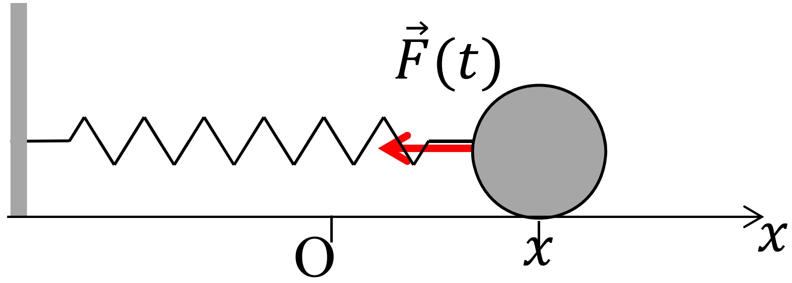
振動数 $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{3\pi}{2\pi} = 1.5\ [\mathrm{Hz}]$,

周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{3\pi} = 0.67\ [\mathrm{s}]$

速度$v(t)$と加速度$a(t)$については省略。

（テキスト第10章p.43,第6章p.25 ）

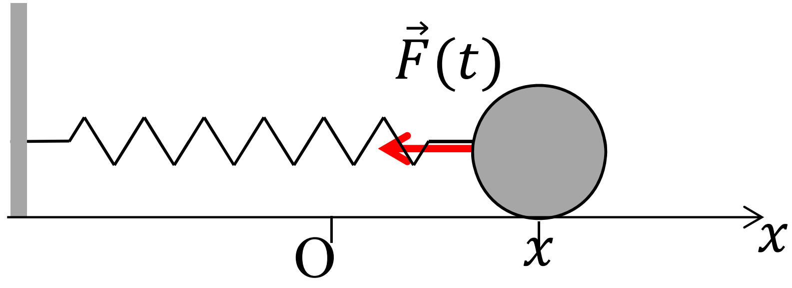
(6) 演習3:



$x(t) = 3\cos(4t)$

この単振動のx-tグラフを描け。（振幅と周期が分かると描きやすい。）

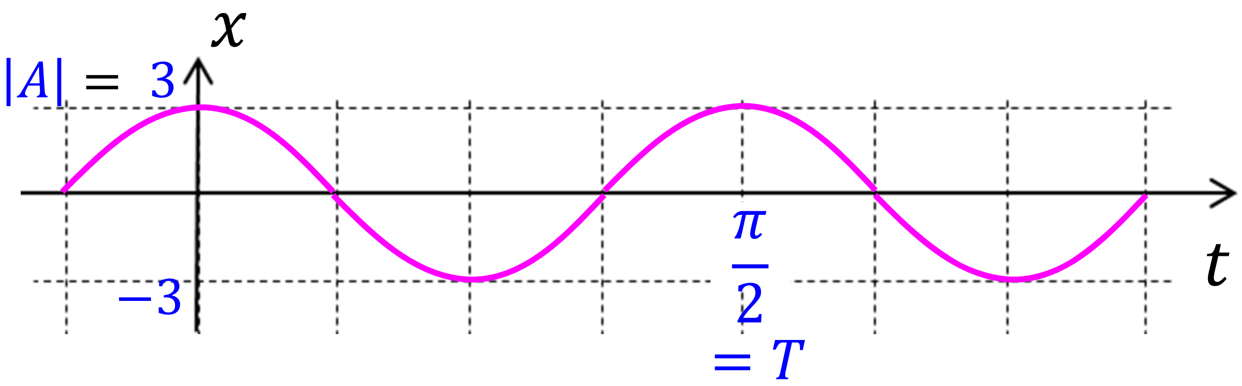
(6) 演習3:



$$x(t) = 3\cos(4t)$$

振幅 $|A| = |3|\ [\mathrm{m}] = 3\ [\mathrm{m}]$,

周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}\ [\mathrm{s}]$



第8回授業　レポート課題

問１ 次の三角関数の1階微分と2階微分を求めよ。

(1) $f(x) = 3\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$　　(2) $x(t) = 5\cos\left(3t - \dfrac{2\pi}{3}\right)$

問２ 水平なx軸に沿ったばね（ばね定数10 [N/m]）に物体（質量5.0 [kg]）が結ばれている。ばねの自然長の位置で$x = 0$，バネが伸びたとき$x > 0$，縮んだとき$x < 0$とする。物体の運動は常にx軸に沿った方向なので，ベクトルは全てx成分だけ考えればよい。
時刻t [s]での位置（ベクトルのx成分）を$x(t)$，速度（のx成分）を$v(t)$とする。
初期条件は，時刻$t = 0$ [s]で　位置$x(0) = 0$ [m] , 速度$v(0) = 8.0$ [m/s] とする。摩擦力，空気抵抗は無視できる。

(a) 時刻t [s]で物体に作用する力（のx成分）$F(t)$を$x(t)$で表せ。

(b) 時刻t [s]での物体の加速度（のx成分）$a(t)$ $\left(= \dfrac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} \right)$を$x(t)$で表せ。

第8回授業　レポート課題

(c) $x(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$[m]　（$A$，$\omega$，$\alpha$は定数）として，下の三角関数の2階微分の重要な性質を導け。

$$\frac{\mathrm{d}^2\{A\sin(\omega t + \alpha)\}}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \alpha) \text{ すなわち } \frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x(t)$$

(d) 問(b)の結果と問(c)三角関数の2階微分の性質を比べると，$x(t)$は三角関数sinを使って次のようになる:

$$x(t) = A\sin\left([\qquad\qquad]\, t + \alpha\right)[\mathrm{m}] \text{（A，αは積分定数）}$$

d-1) 上の式のカッコの中の値を計算し，解答用紙のカッコに代入せよ。

d-2) A，αを含んだままで，物体の速度$v(t)$を単位を付けて求めよ。（計算は問(c)を導く過程よりでもよい。）

(e) 問(d) と初期条件より，次の連立方程式が得られる:

$$A\sin\alpha = ([\qquad\qquad]$$
$$A\cos\alpha = ([\qquad\qquad]$$

e-1) 上の連立方程式のカッコの中の値を求め，解答用紙のカッコに代入せよ。

第8回授業　レポート課題

e-2) 連立方程式を解いて，A，αの値を求めよ。
前回学んだ三角関数の定義で示したような半径1 の円周上の点を適切に作図して，その図を使って三角関数を考えること。

e-3) 以上のように求められた$x(t)$を単位を付けて書け。

(f) 物体の振動の周期Tを求めよ。

(g) 物体の位置$x(t)$のx-tグラフを描け。ただし，グラフの特徴的な点（t, x軸を通る点，グラフの山や谷の位置）も分かるよう作図せよ。

注意1：計算式だけでなく，説明文（必要なら適切な図も）を加えて答案を作成すること。
答案作成力も見る。

注意2：最初はこの問題がよく解けなかったとしても構わない。しかし，次の確認テストまでに何度も復習し，適切な答案を作れるようにすることを強く勧める。

提出〆切：答案用紙を，今週の金曜日（13：00）までに提出

提出場所：D0308（原科）研究室前のレポート提出用の木箱

注意事項：自分の答案をノートに記入するか，コピーをとって，次の授業に持ってくる。

・次週の授業プリント

（これに今週のレポート課題も記してある。）

を必ず持って帰ること