授業予定（変更されたシラバス）

①力学1の確認と力学2の概要
②仕事
③運動エネルギー
④位置エネルギー　（小）
⑤力学的エネルギーとその保存則　（小）
⑥エネルギーの総合演習　（小）
⑦単振動1：定性的な理解と三角関数（＋確認試験1）
⑧単振動2：運動方程式を解く
⑨単振動3：問題演習　（小）
⑩円運動と慣性力1：基礎事項　（小）
⑪円運動と慣性力2：問題演習　（小）
⑫力のモーメント1：実験的理解と定義　（小）
⑬力のモーメント2：問題演習1　（小）
⑭問題演習2（＋確認試験2）
⑮まとめ
⑯期末試験

力学2≪学習到達目標≫

1）仕事の定義を説明できる。

2）力学的エネルギー保存則を説明できる。

3）単振動の運動方程式を解き，その運動を説明できる。

4）円運動と，慣性力としての遠心力を説明できる。

5）力のモーメントの定義を説明できる。

第7回目　単振動1:定性的な理解と三角関数

今日の授業の目的

力学1 で学んだように，力学の目的は『物体の運動を知ること』であり，その目的を達成するための最も基礎となる項目はニュートン力学の3つの基本法則（第5，6 章）である。今後3回の授業で，ニュートン力学で実際の運動を理解する具体例として，単振動を理解していく。今回の授業の目的は，単振動を理解する上で欠かせない三角関数の基本的な性質と微分を身に付けることである。

（テキスト第10章p.43 ）

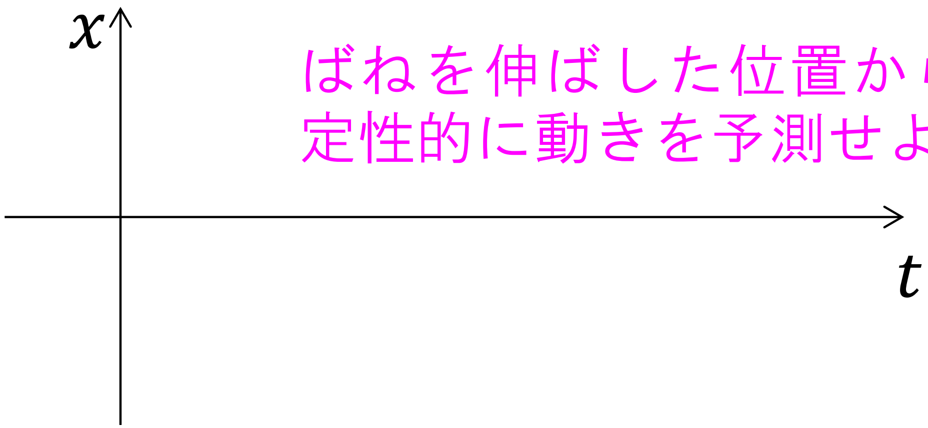
(1) 振動運動

準備演習: 単振動の状況設定として，テキスト第10章p.43の図（上側の図）を考える。

物体には，ばねの力だけが働き，摩擦などは無視できるとする。

x軸の原点は，ばねの自然長の位置である。

以上の設定で物体が単振動するときの位置 $x(t)$ を考える。
この $x(t)$ の時間変動を表す x-t グラフの予測を図に描け。
（必要なら，単振動の振幅を A，周期を Tとしてよい。



ばねを伸ばした位置から物体を放す。
定性的に動きを予測せよ。

（テキスト第10章p.43 ）

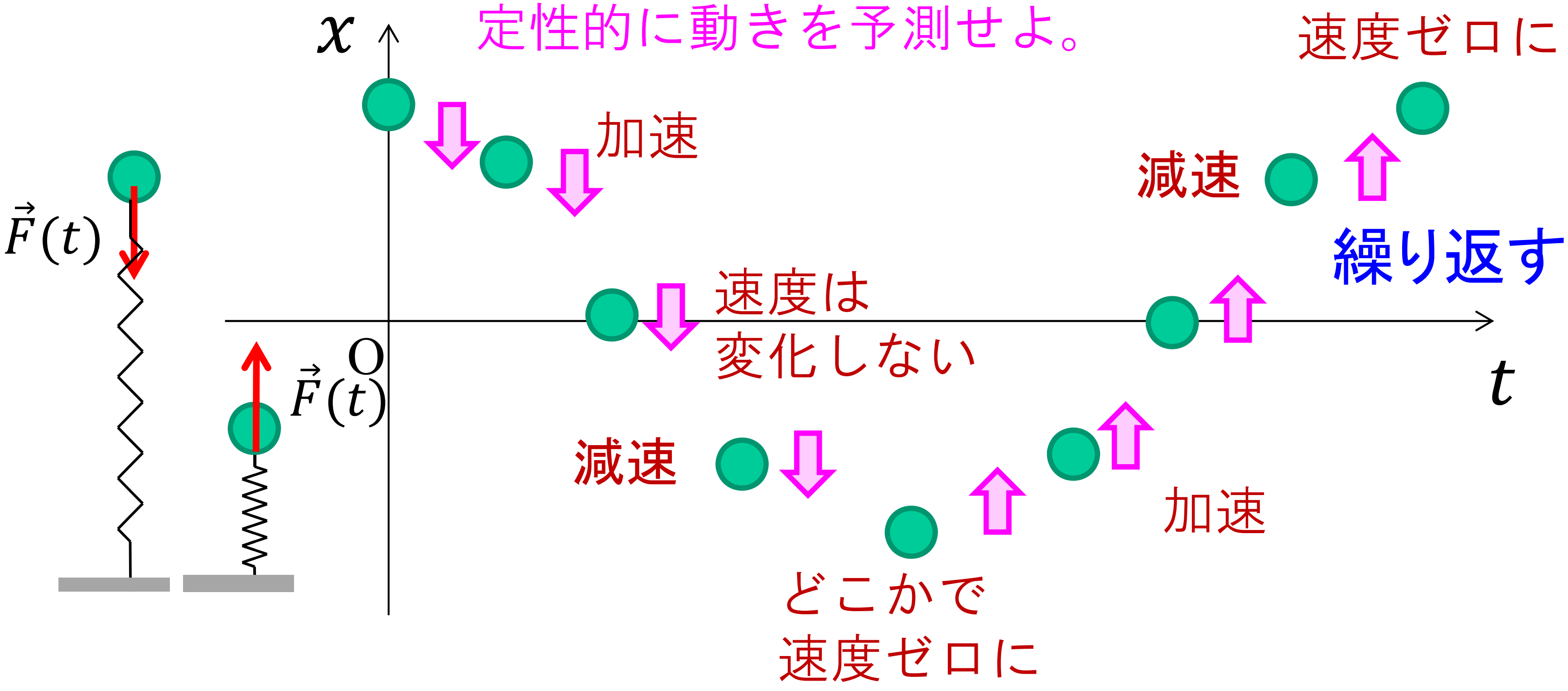
(1) 振動運動

<u>準備演習</u>: 単振動の状況設定として，テキスト第10章p.43 の図（上側の図）を考える。

この $x(t)$ の時間変動を表す x-t グラフの予測を図に描け。

（必要なら，単振動の振幅を A，周期を Tとしてよい。）

ばねを伸ばした位置から物体を放す。



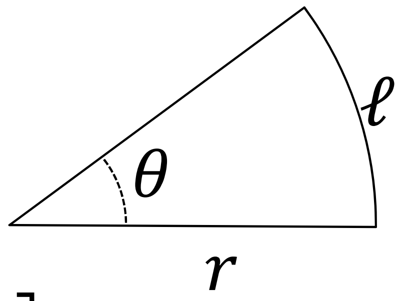
（テキスト第17章p.71 ）

(2) 弧度法・ラジアン

角 θをラジアン単位で測るとは,
（円の弧の長さに基づいて角度の値を決める方法，弧度法）

ラジアン単位の角度の定義:

$$\theta = \frac{\ell}{r} \quad [\mathrm{rad}]$$



ラジアンという単位: [rad]=[m/m]=[1]

角度の国際単位(SI)

半径rの円周の長さは $2\pi r$ なので,

円の一周分のラジアン単位の角度は $\dfrac{2\pi r}{r} = 2\pi$

一周分の角度　$360° = 2\pi$ [rad]

(3) 三角関数の定義

（テキスト第18章p.77 ）

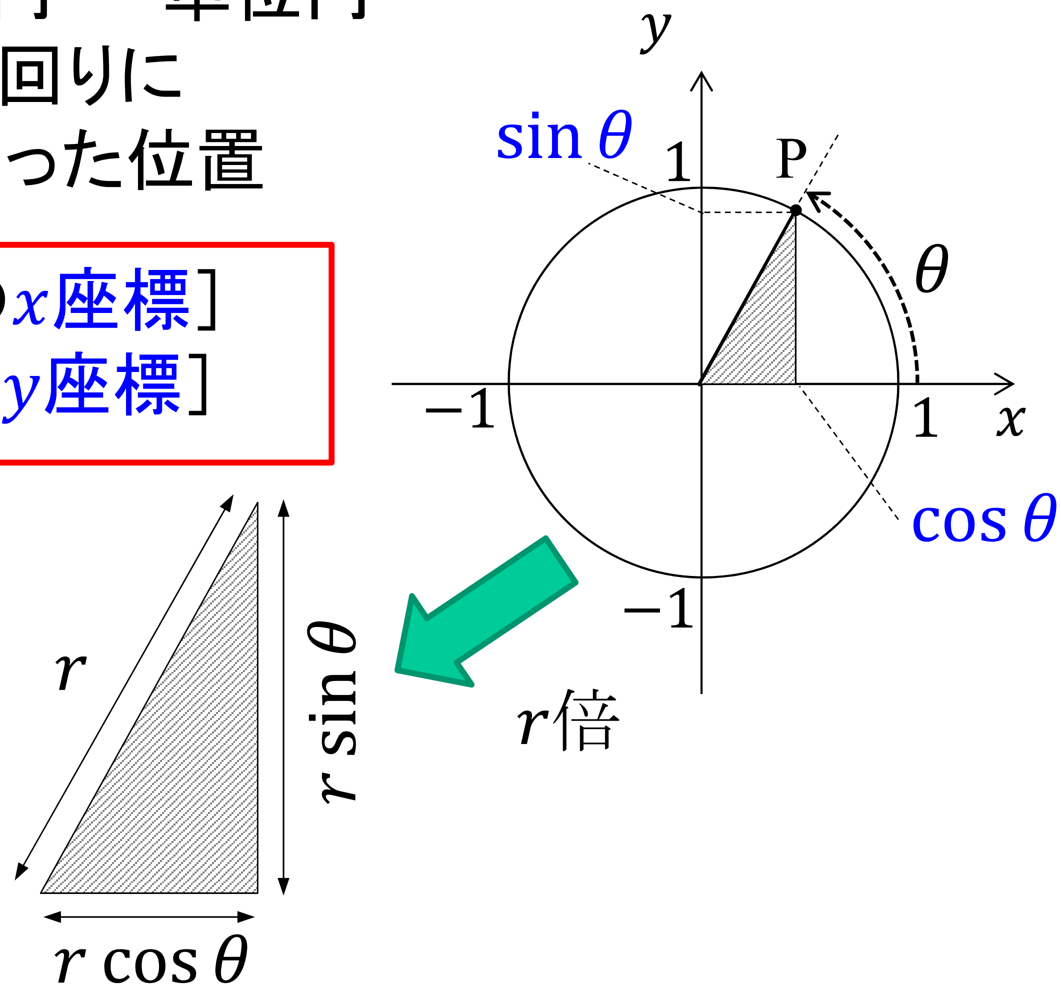
単振動の単元では角の値は全てラジアン単位で測る。

xy面上で半径1 の円・・・単位円

点P ・・・ x軸から左回りに角 θだけ周った位置

$\cos\theta$ ＝［点Pのx座標］

$\sin\theta$ ＝［点Pのy座標］



（テキスト第18章p.77 ）

(4)演習1（定義から分かる三角関数の基本性質）

$\cos\theta =$［点Pのx座標］
$\sin\theta =$［点Pのy座標］

(a) 線分OPの長さを考える

$|\vec{r}| = 1$ より $|\vec{r}|^2 = 1$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

(b) $\cos(-\theta) = \cos\theta$

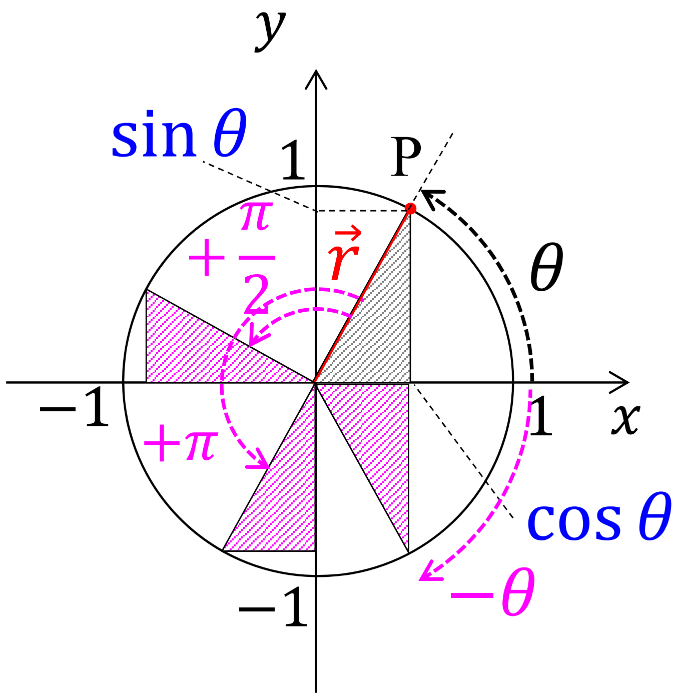
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$

$\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$

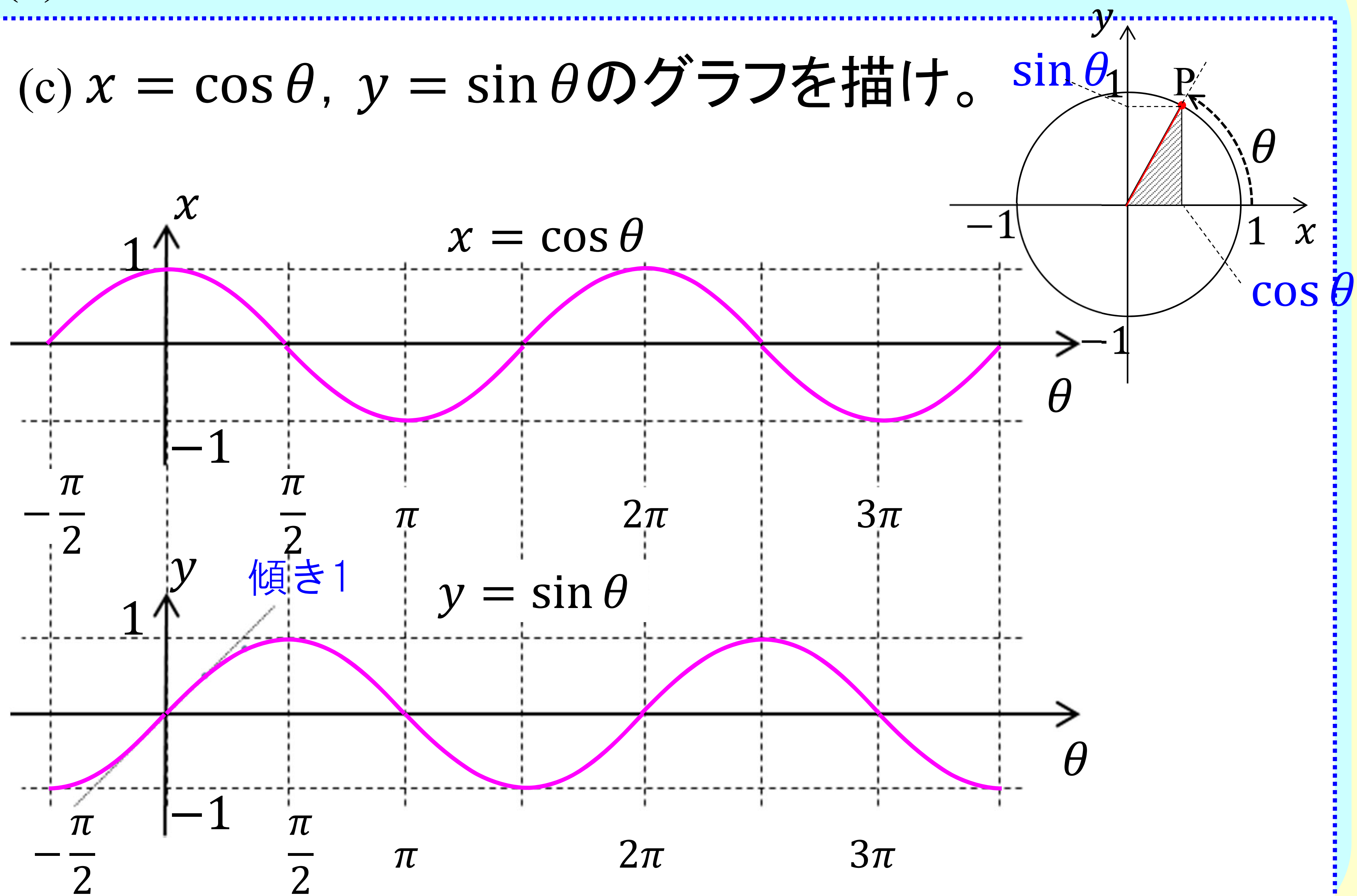
$\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$



（テキスト第18章p.77 ）

(4)演習1（定義から分かる三角関数の基本性質）

(c) $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$のグラフを描け。



（テキスト第18章p.77 ）

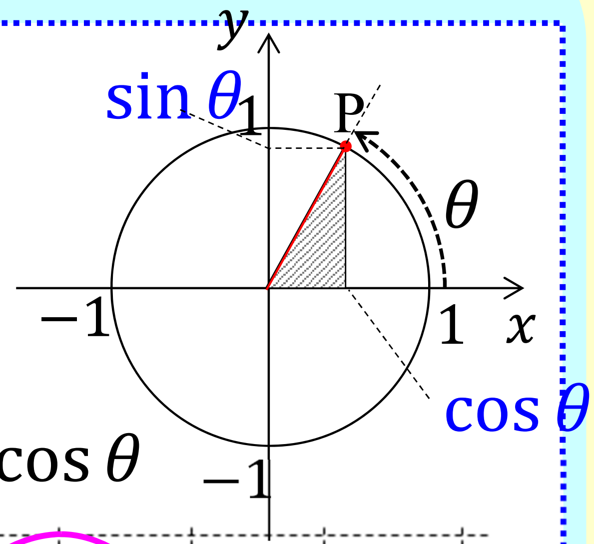
(5)三角関数の周期性

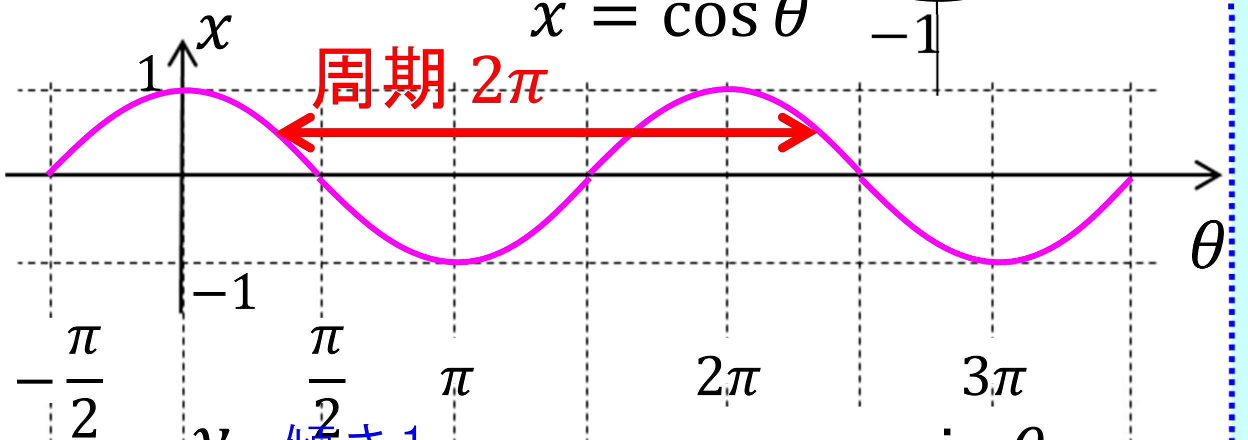
$$\cos(\theta \pm 2\pi n) = \cos\theta$$

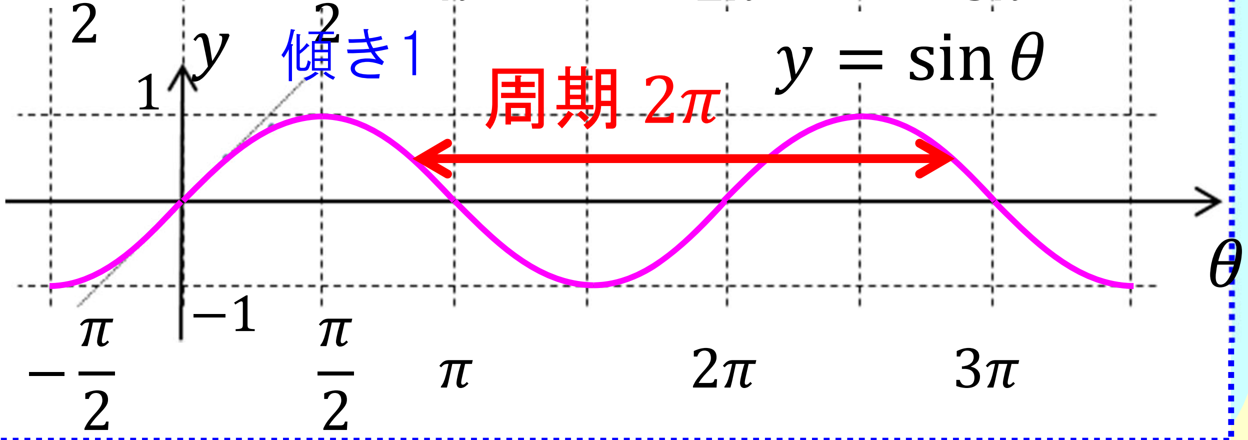
$$\sin(\theta \pm 2\pi n) = \sin\theta$$

ただし, $n = 1,2,3,\cdots$

2πの周期関数







(6) 演習2

(d) 変数xの方程式 $\cos(x) = 1/2$ を解け。

まず一周分$-\pi \le x < \pi$(または $0 \le x < 2\pi$)で考える。
図より

$$x = \pm\frac{\pi}{3}$$

2πの周期があるから

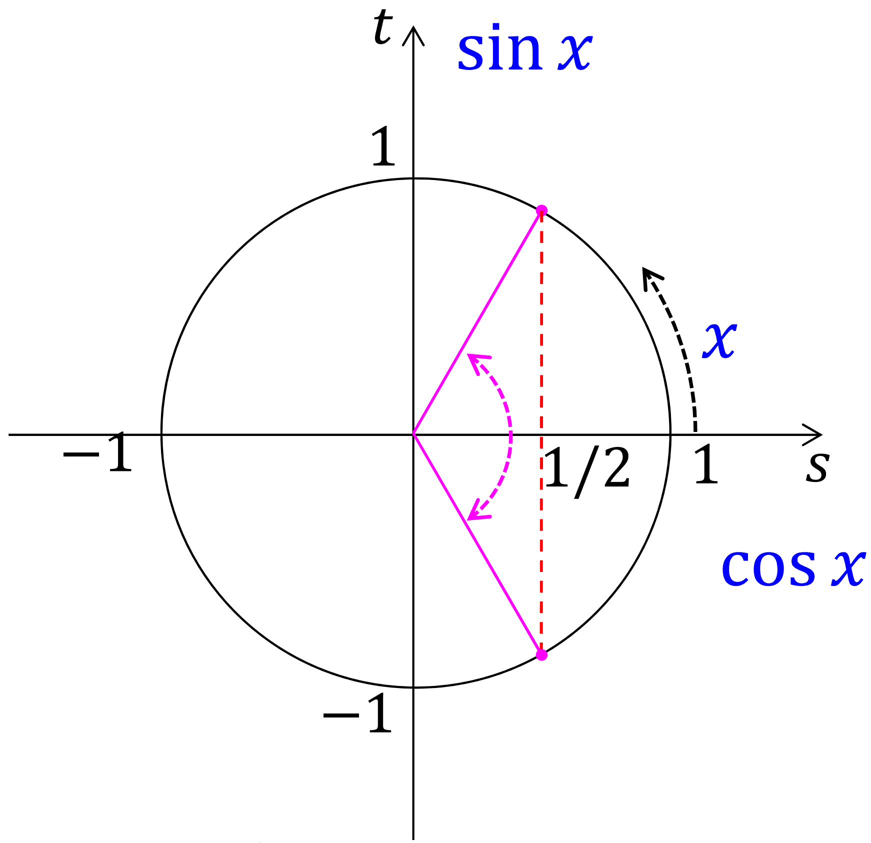
$$x = \pm\frac{\pi}{3} \pm 2\pi n$$

$$(n = 1,2,3,\cdots)$$

も解である。合わせると,

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m$$

$$(m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots)$$



（テキスト第18章p.77 ）

(6) 演習2

(e) 関数 $f(x)=3\cos(9x+7)$ の
「変数xに関する周期」を求めよ。

$\theta(x)=9x+7$とすると，$f(x)=3\cos\theta(x)$ である。
さらに，求める「変数 x に関する周期」を p とすると，
$f(x+p)=f(x)$ でなければならない。
よって（項目(5) より），

$$f(x+p)=f(x) \ \Rightarrow \ \theta(x+p)=\theta(x)+2\pi$$

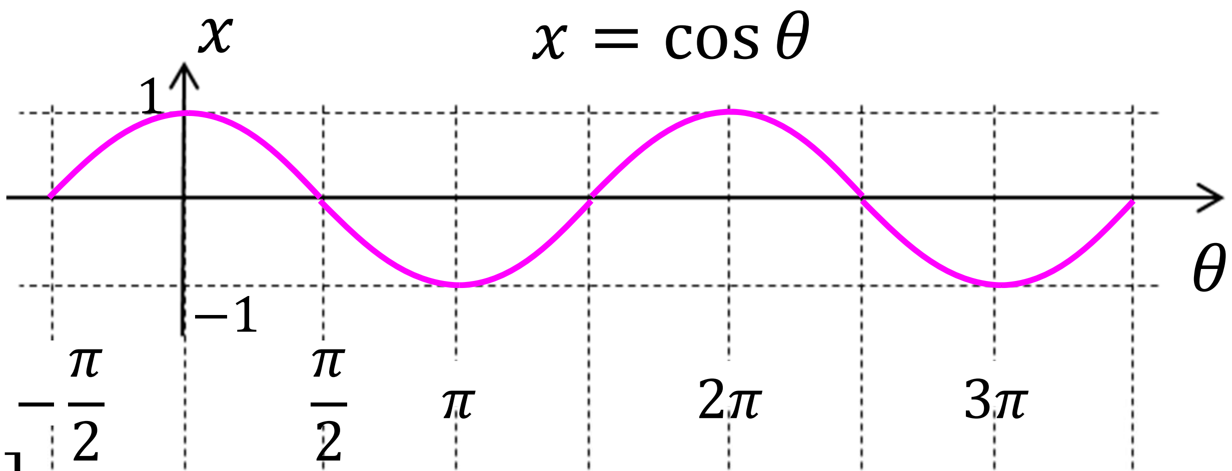
だと分かる。

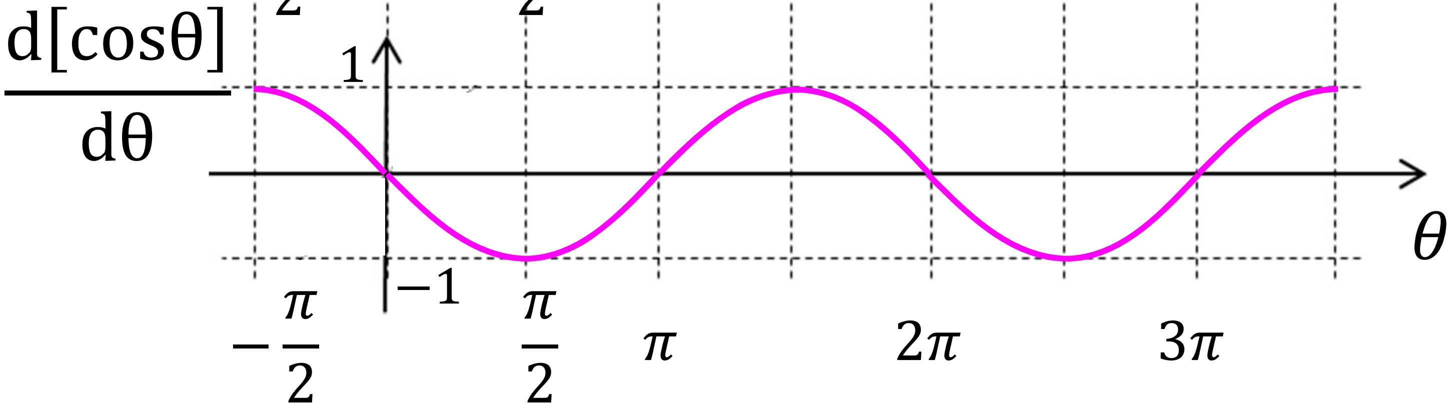
$$\begin{aligned}\theta(x+p)&=9(x+p)+7=9x+9p+7\\&=\theta(x)+9p\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ 9p=2\pi \qquad \therefore\ p=\frac{2\pi}{9}$$

（テキスト第18章p.77 ）

(7) 三角関数の微分



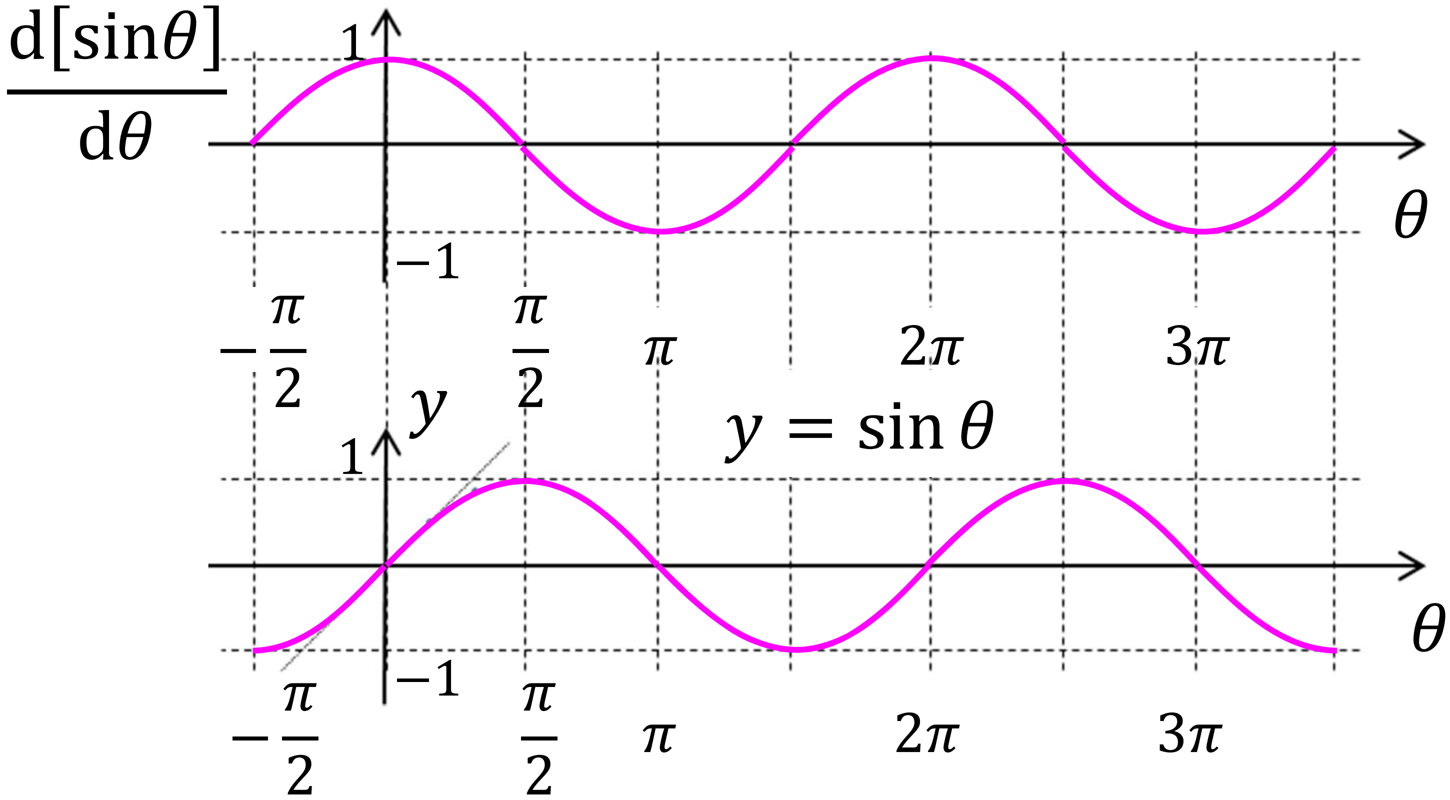


三角関数の微分:

$$\frac{d[\cos\theta]}{d\theta} = -\sin\theta \quad , \quad \frac{d[\sin\theta]}{d\theta} = \cos\theta$$

(7) 三角関数の微分

（テキスト第18章p.77 ）



三角関数の微分:

$$\frac{d[\cos\theta]}{d\theta} = -\sin\theta \quad , \quad \frac{d[\sin\theta]}{d\theta} = \cos\theta$$

(8) 演習3:問題演習20 の問題20-9に取り組む。 （テキスト p.86）

(1) $f(x) = 2\sin x - \cos x$

(2) $f(x) = 3\sin x + 5\cos x$

導関数 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ と微分係数 $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ $\left.\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\frac{\pi}{3}}$

三角関数の微分:

$$\frac{\mathrm{d}[\cos\theta]}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta \quad , \quad \frac{\mathrm{d}[\sin\theta]}{\mathrm{d}\theta} = \cos\theta$$

（テキスト p.86）

(8) 演習3：問題20-9

(1) $$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2\sin x - \cos x) \quad = 2\cos x + \sin x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2) $$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3\sin x + 5\cos x) \quad = 3\cos x - 5\sin x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 5\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}[\cos\theta]}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta \quad , \quad \frac{\mathrm{d}[\sin\theta]}{\mathrm{d}\theta} = \cos\theta$$

（テキスト p.84,86）

(9) 演習4: 次の関数の微分を求めよ。

(1) $f(t) = 3\cos(9t + 7)$ $\theta(t) = 9t + 7$ と置く。

(2) $g(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$ $\theta(t) = \omega t + \alpha$ と置く。

(3) $h(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$ $\theta(t) = \omega t + \alpha$ と置く。

（A, ω, αは定数）

合成関数の微分の公式: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{1}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{1} = \right) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}$

合成関数: $y = y(u)$ $u = u(x)$ $y = y\big(u(x)\big) = y(x)$

例: $y = \cos u$ $u = 2x + 3$ $y = \cos(2x + 3)$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}(2x + 3)}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}(\cos u)}{\mathrm{d}u} = \cdots$$

(9) 演習4：次の関数の微分を求めよ。 （テキスト p.84,86）

(1) $f(t) = 3\cos(9t+7)$ $\theta(t) = 9t+7$ と置く。

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}(9t+7)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}(3\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}$$

$$= 9\cdot 3(-\sin\theta) = -27\sin(9t+7)$$

(2) $g(t) = A\cos(\omega t+\alpha)$ $\theta(t) = \omega t+\alpha$ と置く。

$$\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}(\omega t+\alpha)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}(A\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}$$

$$= \omega\cdot A(-\sin\theta) = -\omega A\sin(\omega t+\alpha)$$

(3) $h(t) = A\sin(\omega t+\alpha)$ $\theta(t) = \omega t+\alpha$ と置く。

$$\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}(\omega t+\alpha)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}(A\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}$$

$$= \omega\cdot A\cos\theta = \omega A\cos(\omega t+\alpha)$$

（テキスト p.43）

(10) 演習5: 上の演習の関数 $g(t)$, $h(t)$ の2階微分を計算して, 次の重要な性質を導け。(A, ω, αは定数)。

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2[A\cos(\omega t+\alpha)]}{\mathrm{d}t^2} &= -\omega^2 A\cos(\omega t+\alpha)\\ \frac{\mathrm{d}^2[A\sin(\omega t+\alpha)]}{\mathrm{d}t^2} &= -\omega^2 A\sin(\omega t+\alpha)\end{aligned}}$$

(7.10)

(10) 演習5：2階微分

（テキスト p.43）

$$\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = g'(t) = -\omega A\sin(\omega t + \alpha) \qquad \theta(t) = \omega t + \alpha$$ と置く。

$$\frac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}g'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}g'}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}(\omega t + \alpha)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}(-\omega A\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}$$

$$= \omega\cdot(-\omega A)\cos\theta = -\omega^2 A\cos(\omega t + \alpha)$$

$$\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = h'(t) = \omega A\cos(\omega t + \alpha) \qquad \theta(t) = \omega t + \alpha$$ と置く。

$$\frac{\mathrm{d}^2 h(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}h'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}h'}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}(\omega t + \alpha)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}(\omega A\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}$$

$$= \omega\cdot\omega A(-\sin\theta) = -\omega^2 A\sin(\omega t + \alpha)$$

（テキスト p.43）

(10) 演習5: 上の演習の関数 $g(t)$, $h(t)$ の2階微分を計算して，次の重要な性質を導け。(A, ω, αは定数)。

三角関数cos,またはsinと，1次関数$\omega t+\alpha$の合成関数に関して，その関数を2回微分すると

元の関数×（$-\omega^2$）

になる。

$$\frac{\mathrm{d}^2[A\cos(\omega t+\alpha)]}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2 A\cos(\omega t+\alpha)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2[A\sin(\omega t+\alpha)]}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2 A\sin(\omega t+\alpha)$$

（テキスト p.43）

(11) 次回の単振動を理解する上で必要な定理：微分の性質 (7.10) から次の定理が得られる。

定理：変数tの未知関数$x(t)$が，次の微分を含む関係式（微分方程式）を満たすことが分かったとする。

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -cx(t)}$$

ただし，cは正の定数（$c > 0$）

この場合，三角関数の性質（7.10）より，関数$x(t)$は必ず次の三角関数，

$$\boxed{x(t) = A\cos(\sqrt{c}t + \alpha)}$$

（A, αは定数）

で表すことができる。[定理終わり]

項目（10）から$c = \omega^2$として考えよ

第7回授業　レポート課題

まず問1として①$\sin(-\pi/6)$，②$\cos(2\pi/3)$，③$\sin(3\pi/2)$，④$\cos 3\pi$を求めよ。第18 章，問題演習18 の問題18-1(2)(4)(6)，18-2，18-3（p.78）に取り組む。ただし，変数 xの範囲は全ての実数（$-\infty < x < \infty$）として，可能な解を全て示すこと（整数 $n = 0$，± 1，± 2，$\pm 3, \ldots$などを使って表す）。なお，第7回授業プリントの定義（7.2）のような図（単位円）を描いて答案をまとめよ。記号が混乱しないように注意。

[アドバイス：まずは $0 \leq x < 2\pi$ の範囲で解を求めてから，$-\infty < x < \infty$ に広げて考えるのがよい。]

注意1：計算式だけでなく，説明文（必要なら適切な図も）を加えて答案を作成すること。答案作成力も見る。

提出〆切：答案用紙を，今週の金曜日（13：00）までに提出

提出場所：D0308（原科）研究室前のレポート提出用の木箱

注意事項：自分の答案をノートに記入するか，コピーをとって，次の授業に持ってくる。

・次週の授業プリント
（これに今週のレポート課題も記してある。）
を必ず持って帰ること

途中退室する場合は必ず,
・答案
・前回のレポート課題
を提出してから退室する。