

レポート答案 (授業 曜 限) 学籍番号 _____ 氏名 _____

(A)問題 9-6

(1) 説明・計算: $\omega T = 2\pi$ より $\omega = \frac{2\pi}{T} = \dots$ [rad/s]

答: 角速度 $\omega =$

(2) 説明・計算: $v = r\omega = \dots$ [m/s]

答: 速さ $v =$

(3) 説明・計算: $a = v\omega = r\omega^2 = \dots$ [m/s²]

答: 加速度 $a =$

(B)

(a) 説明・計算 $t = 0$ で π [rad], 1秒あたり 3×10^{-2} [rad]回転するので, $\theta(t) = \omega t + \alpha = 3 \times 10^{-2}t + \pi$ [rad]

答: $\theta(t) = 3 \times 10^{-2}t + \pi$ [rad]

(b) 説明・計算: $\vec{r}(t) = (R \cos \theta, R \sin \theta) = (R \cos(\omega t + \alpha), R \sin(\omega t + \alpha))$
 $= (600 \cos(3 \times 10^{-2}t + \pi), 600 \sin(3 \times 10^{-2}t + \pi))$ [m]

答: $\vec{r}(t) = (600 \cos(3 \times 10^{-2}t + \pi), 600 \sin(3 \times 10^{-2}t + \pi))$ [m]

(c) 説明・計算:

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dx}{d\theta} = \dots = -\omega R \sin(\omega t + \alpha)$$

答：加速度 $a =$

(B)

(a) 説明・計算 $t = 0$ で π [rad], 1秒あたり 3×10^{-2} [rad]回転するので, $\theta(t) = \omega t + \alpha = 3 \times 10^{-2}t + \pi$ [rad]

答： $\theta(t) = 3 \times 10^{-2}t + \pi$ [rad]

(b) 説明・計算： $\vec{r}(t) = (R \cos \theta, R \sin \theta) = (R \cos(\omega t + \alpha), R \sin(\omega t + \alpha))$
 $= (600 \cos(3 \times 10^{-2}t + \pi), 600 \sin(3 \times 10^{-2}t + \pi))$ [m]

答： $\vec{r}(t) = (600 \cos(3 \times 10^{-2}t + \pi), 600 \sin(3 \times 10^{-2}t + \pi))$ [m]

(c) 説明・計算：

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dx}{d\theta} = \dots = -\omega R \sin(\omega t + \alpha)$$

$$v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dy}{d\theta} = \dots = \omega R \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= (v_x(t), v_y(t)) \\ &= (-\omega R \sin(\omega t + \alpha), \omega R \cos(\omega t + \alpha)) \\ &= (-18 \sin(3 \times 10^{-2}t + \pi), 18 \cos(3 \times 10^{-2}t + \pi)) \text{[m/s]} \end{aligned}$$

答： $\vec{v}(t) = (-18 \sin(3 \times 10^{-2}t + \pi), 18 \cos(3 \times 10^{-2}t + \pi))$ [m/s]

(d) 説明・計算：

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dv_x}{d\theta} = \dots = -\omega^2 R \cos(\omega t + \alpha)$$

$$a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dv_y}{d\theta} = \dots = -\omega^2 R \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\text{答：}\vec{r}(t) = (600 \cos(3 \times 10^{-2}t + \pi) \quad , \quad 600 \sin(3 \times 10^{-2}t + \pi))[\text{m}]$$

(c) 說明・計算：

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dx}{d\theta} = \dots = -\omega R \sin(\omega t + \alpha)$$

$$v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dy}{d\theta} = \dots = \omega R \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= (v_x(t) \quad , v_y(t)) \\ &= (-\omega R \sin(\omega t + \alpha) \quad , \omega R \cos(\omega t + \alpha) \quad) \\ &= (-18 \sin(3 \times 10^{-2}t + \pi) \quad , 18 \cos(3 \times 10^{-2}t + \pi))[\text{m/s}]\end{aligned}$$

$$\text{答：}\vec{v}(t) = (-18 \sin(3 \times 10^{-2}t + \pi) \quad , 18 \cos(3 \times 10^{-2}t + \pi))[\text{m/s}]$$

(d) 說明・計算：

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dv_x}{d\theta} = \dots = -\omega^2 R \cos(\omega t + \alpha)$$

$$a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dv_y}{d\theta} = \dots = -\omega^2 R \sin(\omega t + \alpha)$$

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= (a_x(t) \quad , a_y(t)) \\ &= (-\omega^2 R \cos(\omega t + \alpha) \quad , -\omega^2 R \sin(\omega t + \alpha) \quad) \\ &= (-0.54 \cos(3 \times 10^{-2}t + \pi) \quad , -0.54 \sin(3 \times 10^{-2}t + \pi))[\text{m/s}^2]\end{aligned}$$

$$\text{答：}\vec{a}(t) = (-0.54 \cos(3 \times 10^{-2}t + \pi) \quad , -0.54 \sin(3 \times 10^{-2}t + \pi))[\text{m/s}^2]$$

(e) 説明・計算：

運動方程式 $\vec{F}(t) = m\vec{a}(t)$ より

$$\vec{F}(t) = m\vec{a}(t)$$

$$= 4 \times 10^4 \times (-0.54 \cos(3 \times 10^{-2}t + \pi), -0.54 \sin(3 \times 10^{-2}t + \pi))$$

$$= (-2.2 \times 10^4 \cos(3 \times 10^{-2}t + \pi), -2.2 \times 10^4 \sin(3 \times 10^{-2}t + \pi))$$

[N]

答： $\vec{F}(t) = (-2.2 \times 10^4 \cos(3 \times 10^{-2}t + \pi), -2.2 \times 10^4 \sin(3 \times 10^{-2}t + \pi))$ 向き：中心向き

(f) 説明・計算：

周期 T は、 $\theta(t) = \omega t + \alpha$ が 2π だけ変化する時間なので、

$$\omega T = 2\pi \text{ から } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3 \times 10^{-2}} = 209 = 2.1 \times 10^2 [\text{s}]$$

答： $T = 2.1 \times 10^2 [\text{s}]$

(g) g-1) 説明・計算：[時速(km/h)単位でも求めよ。]

車両Pに働いている向心力はレールから作用する。レールには向心力と同じ大きさの反作用が作用する。この力が 10^5 [N]を超えると脱線する。向心力が最大となる条件 $F = m\omega^2 R = 10^5$ [N]から、

$$\omega = \sqrt{\frac{10^5}{mR}} = \sqrt{\frac{10^5}{4.0 \times 10^4 \times 600}} = 6.5 \times 10^{-2} [\text{rad/s}]$$

(g) g-1) 説明・計算：[時速(km/h)単位でも求めよ。]

車両Pに働いている向心力はレールから作用する。レールには向心力と同じ大きさの反作用が作用する。この力が 10^5 [N]を超えると脱線する。向心力が最大となる条件 $F = m\omega^2 R = 10^5$ [N]から、

$$\omega = \sqrt{\frac{10^5}{mR}} = \sqrt{\frac{10^5}{4.0 \times 10^4 \times 600}} = 6.5 \times 10^{-2} [\text{rad/s}]$$

$$V = R\omega = 600 \times 6.5 \times 10^{-2} = 39 [\text{m/s}]$$

答： $V = 39$ [m/s] (140 [km/h])

g-2) 説明・計算：

$$252 [\text{km/h}] = 252 \times \frac{1000 [\text{m}]}{60 \times 60 [\text{s}]} = 70 [\text{m/s}]$$

で走れる最小の半径は、

$$F = m\omega^2 R = m \frac{V^2}{R} = 10^5 [\text{N}] \text{から、}$$

$$R = \frac{mV^2}{10^5} = \frac{4.0 \times 10^4 \times 70^2}{10^5} = 2.0 \times 10^3 [\text{m}]$$

スピードを出しすぎると曲がれない



(西日本新聞)



(時事通信)

脱線事故(2005年福知山線)

⇒時速70km制限を時速116kmでカーブに進入

$$F = m\omega^2 A = m \frac{v^2}{A} \left(\frac{116}{70} \right)^2 \doteq 2.7 \text{倍の力が必要}$$

授業予定(変更されたシラバス)

- ①力学1の確認と力学2の概要
- ②仕事
- ③運動エネルギー
- ④位置エネルギー (小)
- ⑤力学的エネルギーとその保存則 (小)
- ⑥エネルギーの総合演習 (小)
- ⑦単振動1: 定性的な理解と三角関数 (+確認試験1)
- ⑧単振動2: 運動方程式を解く
- ⑨単振動3: 問題演習 (小)
- ⑩円運動と慣性力1: 基礎事項 (小)
- ⑪円運動と慣性力2: 問題演習 (小)
- ⑫力のモーメント1: 実験的理解と定義 (小)
- ⑬力のモーメント2: 問題演習1 (小)
- ⑭問題演習2 (+確認試験2)
- ⑮まとめ
- ⑯期末試験

力学2 ≪ 学習到達目標 ≫

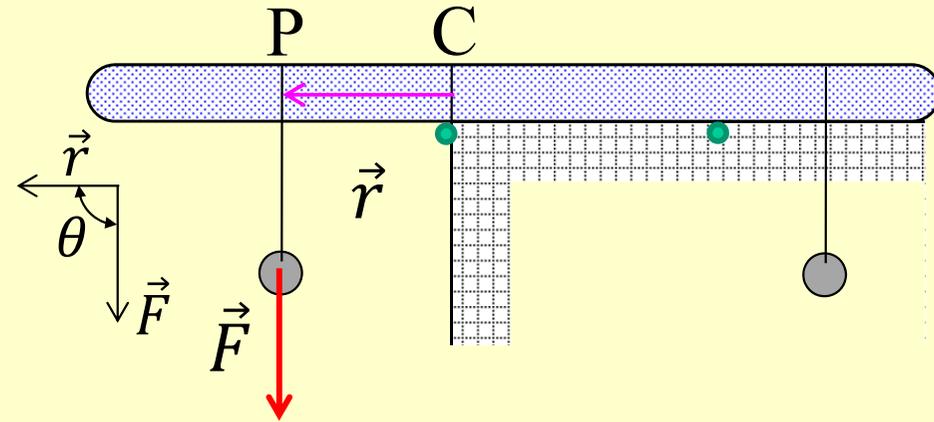
- 1) 仕事の定義を説明できる。
- 2) 力学的エネルギー保存則を説明できる。
- 3) 単振動の運動方程式を解き、その運動を説明できる。
- 4) 円運動と、慣性力としての遠心力を説明できる。
- 5) 力のモーメントの定義を説明できる。

第12回目 力のモーメント1(実験的理解と定義)

今日の授業の目的

先の2回の授業で円運動を扱った。様々な機械製品の部品には回転するものが多いので、円運動は工学系にとって基礎的で重要な運動である。ところで、あらゆる物体の運動に対して成立する運動方程式より、速度変化(加速度)は物体に働く力で決まる。つまり、回転運動の速度が変化する場合(回転角の加速度がゼロでない場合)は必ず何らかの力の作用が存在する。物体に働く力が『物体の回転を引き起こす作用』を力のモーメントという。工学系にとって回転運動が重要だということは、力のモーメントを理解することも極めて重要であることを意味する。そこで、今回の授業の目的は、力のモーメントの定義と意味を理解することである

(1) 力が物体の回転を引き起こす作用(実験):



実験装置:

おもりを棒上の点Pに吊るす。

端点C(フック)から測る点Pの位置ベクトルを \vec{r} ,

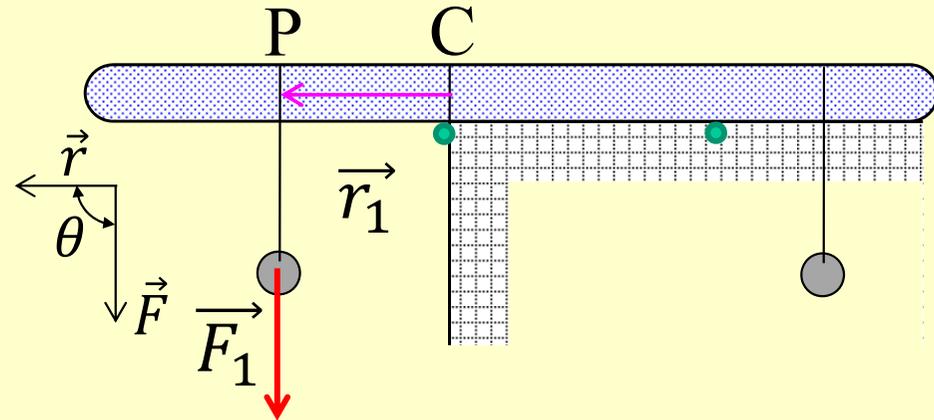
おもりに働く重力を \vec{F} ,

ベクトル \vec{r} と \vec{F} の間の角を θ とする。

図は $\theta = \frac{\pi}{2}$ [rad] の状況である

(1) 力が物体の回転を引き起こす作用(実験):

棒の回転を引き起こす作用を測る



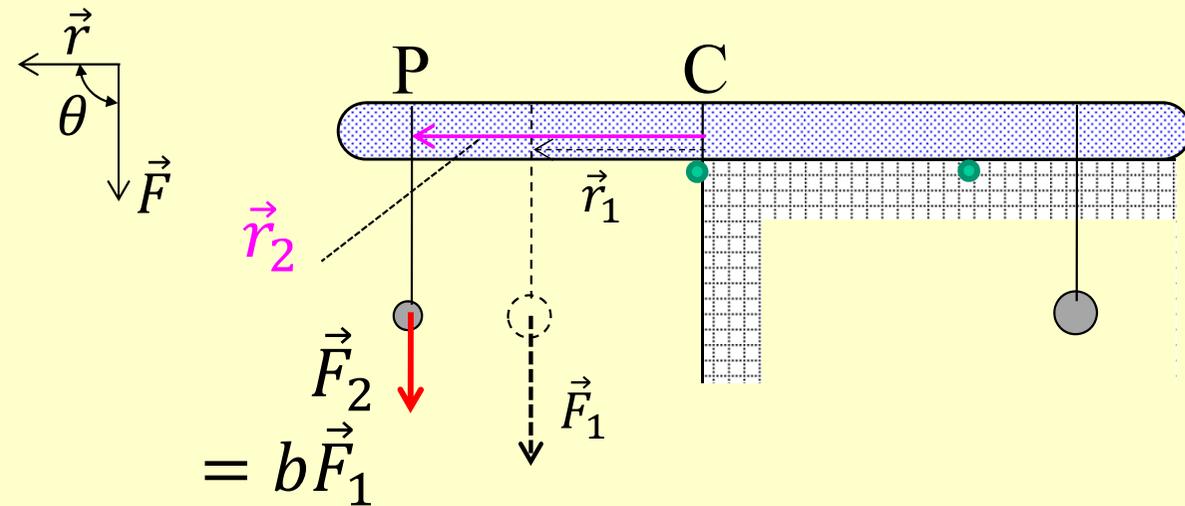
手順1:

おもりの質量をある値 m_1 に決める。この重力を \vec{F}_1 とする。そして、点Pを点Cに近い位置から徐々に離していき、棒の静止状態を保てるギリギリの所に点Pを固定する。

(点Pをその位置より少しでも点Cから遠い側に離すと、棒が \vec{F}_1 に引かれて台から落ちてしまう。)

CP間の距離は $|\vec{r}_1|$ である。 ← CP間の距離を測定

(1) 力が物体の回転を引き起こす作用(実験):



手順2:

おもりの質量を $m_2 = b m_1$ ($b > 0$) に変える。

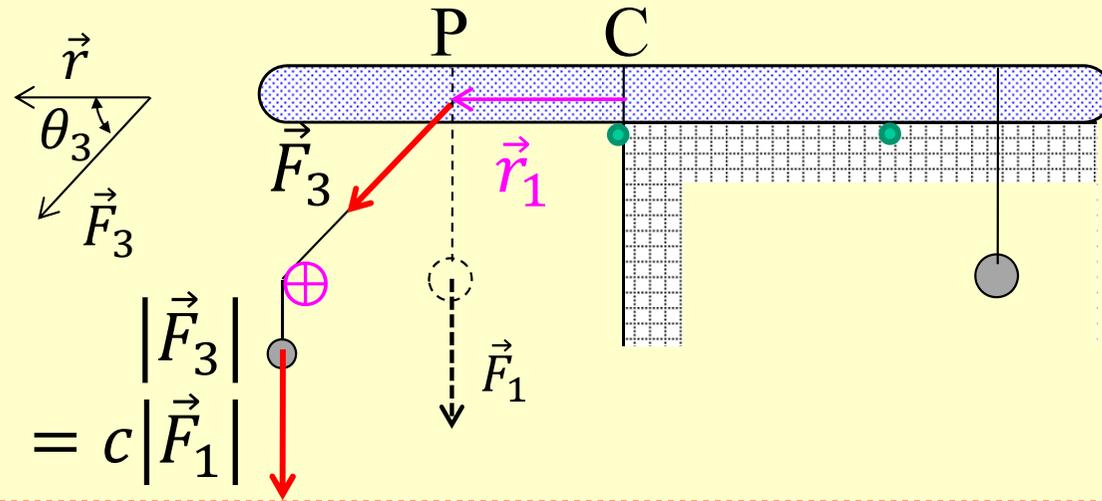
(例えば, $b = 1/2$ など。)

この重力は $\vec{F}_2 = b \vec{F}_1$ である。

手順1と同様に, 点Pの位置を点Cから徐々に離していき,
棒の静止状態を保てるギリギリの所に点Pを固定する。

CP間の距離は $|r_2|$ である。 ← CP間の距離を測定

(1) 力が物体の回転を引き起こす作用(実験):



手順3:

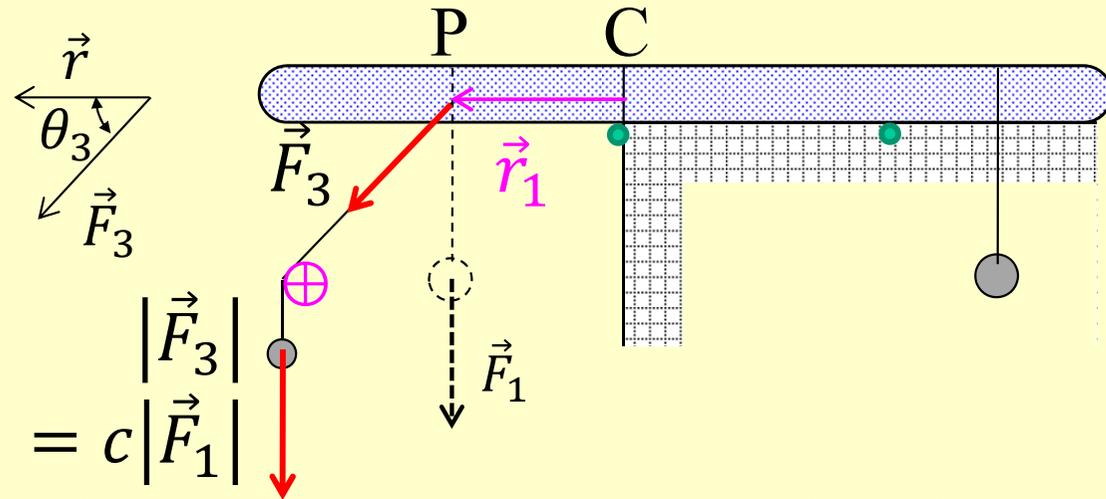
点Pの位置を手順1と同じ位置ベクトル \vec{r}_1 の位置に戻す。
滑車(図中の \oplus)などを使って、物体を吊るす糸の向きを変えた力 \vec{F}_3 を棒に加える。

手順1の重力の c 倍とする($|\vec{F}_3| = c |\vec{F}_1|$)ただし、 $c > 1$ 。
 θ を徐々に大きくし、棒のつり合いを保てるギリギリの状況にする。←このときの角 θ_3 (棒と斜めの糸の角)を測定

(1) 力が物体の回転を引き起こす作用(実験):

$$\theta_3 =$$

$$\sin \theta_3 = ?$$



この実験を行うと, 次の関係が成立することが分かる。

実験事実 ($\theta \neq \pi/2$ の場合):

$$|\vec{F}_3| \sin \theta_3 = |\vec{F}_1| \Leftrightarrow \sin \theta_3 = \frac{1}{c}$$

したがって,

実験事実 ($\theta \neq \pi/2$ の場合):

$$|\vec{r}_1| \cdot |\vec{F}_1| = |\vec{r}_1| \cdot |\vec{F}_3| \sin \theta_3 \quad \leftarrow \text{回転を引き起こす作用}$$

(2) 力のモーメントの定義と意味

『点Oのまわりの力 \vec{F} のモーメント』

力のモーメント N の定義:

$$\text{大きさ: } |N| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin \theta$$

符号:

ベクトル \vec{F} と \vec{r} で張る平面上で

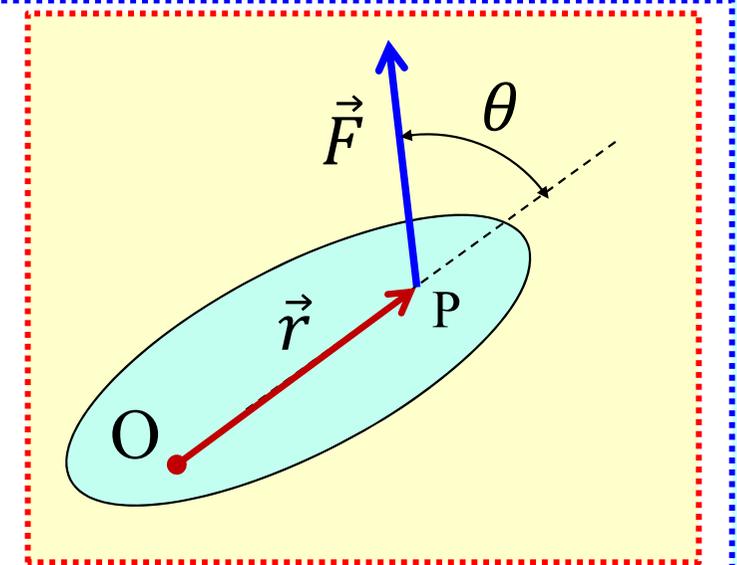
右回り(時計回り)回転を引き起こす場合を正

あるいは

左回り(反時計回り)回転を引き起こす場合を正

どちらか定めた上で、 N の符号を決める。

〔左回り(反時計回り)を正にとる専門分野が多いが
そうでない専門分野もある。〕



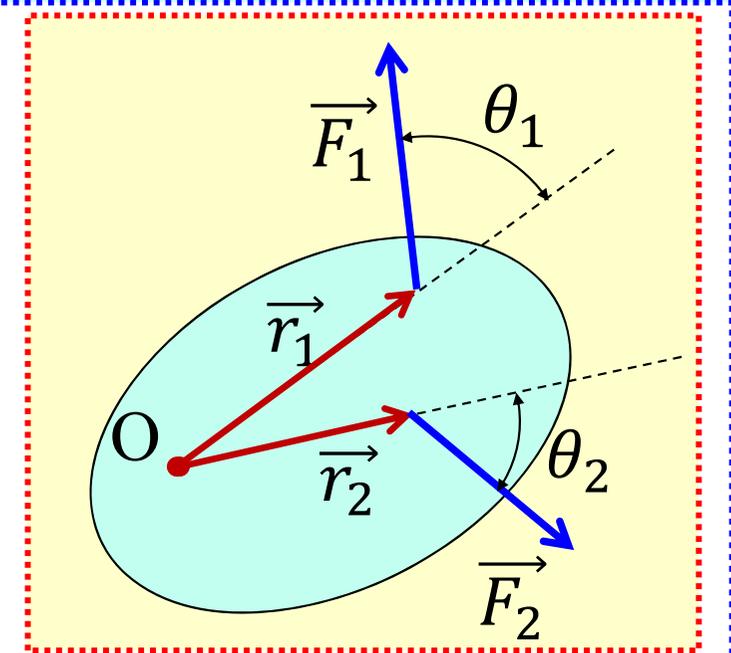
(2) 力のモーメントの定義と意味

『点Oのまわりの力 \vec{F} のモーメント』力のモーメント N の定義:大きさ: $|N| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin \theta$ 符号: 左回り(反時計回り)を正
右回り(時計回り)を負
(逆の定義もある)

2つ以上の力が作用している場合

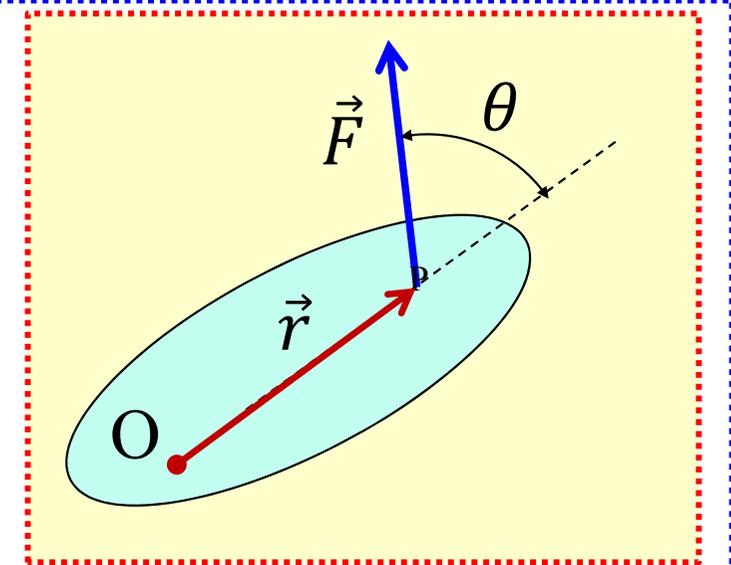
点Oを通る同じ回転軸のまわりで回転させる力のモーメントであれば, 符号も含めて足すことで, 力のモーメントの和 N を求めることができる。

$$N = N_1 + N_2 + \dots$$

この授業では, すべての \vec{r} と \vec{F} が同一平面内にある場合だけを考える。

(2) 力のモーメントの定義と意味

$|N| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin \theta$ から考えて
力のモーメント N の単位:
[N・m]



注意: 仕事, エネルギーの単位 [J] = [N・m] と同じ成り立ちをしているが, **力のモーメントに [J] は使用せず, [N・m] を用いる。**

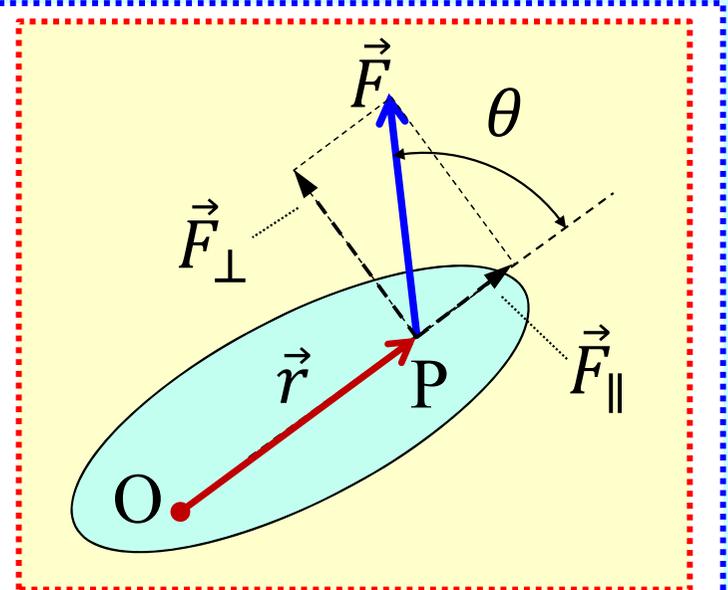
[J] はあくまでも, 仕事, エネルギーの単位に付けられた名称である。単位の成り立ちは同じでも, 力のモーメントとエネルギーは, 物理的意味が全く異なる量である。

(2) 力のモーメントの定義と意味

意味: 力 \vec{F} を次のように分解しよう。

$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}$$

$$\begin{cases} \vec{F}_{\parallel} : \vec{r} \text{ に平行な方向の分力} \\ \vec{F}_{\perp} : \vec{r} \text{ に直交する方向の分力} \end{cases}$$



分力 \vec{F}_{\parallel} の役割: 物体を \vec{r} 方向に **伸び縮み** させるようとする。

分力 \vec{F}_{\perp} の役割: \vec{r} の向き, つまり **物体の向きを変えよう** とする。

力のモーメントの大きさを次のように考える:

$$|N| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}_{\perp}| (= |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin \theta)$$

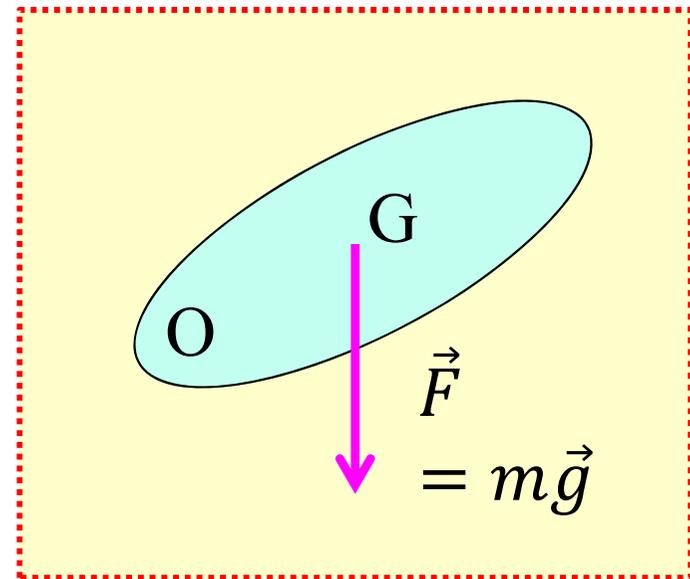
力のモーメントとは作用点の位置ベクトル \vec{r} に直交する分力によって物体の向きが変わる作用

(3) 物体の重心

重力は物体を構成する要素(原子など)それぞれに働く。
そして、一つ一つの構成要素に働く重力の和が、物体全体に働く重力(大きさ mg)である。

物体全体に働く重力の作用点 \Rightarrow **重心G**

一様で対称性のよい形の場合
(長方形の板, 円板, 球など)は,
図形的な中心が重心



(4) 演習1:

演習問題3 の問題3-5 (1)(4)に取り組む。

ここでは, 力のモーメントの符号は, 左回り(反時計回り)の回転を引き起こそうとするとき正とする。

力のモーメントの和: $N = N_1 + N_1 + \dots$

追加問題: 板は右回りあるいは左回りのどちらかに回転しようとするか, 理由を付けて答えよ。(ヒント: 力のモーメントの和の符号の意味に注意すること。)

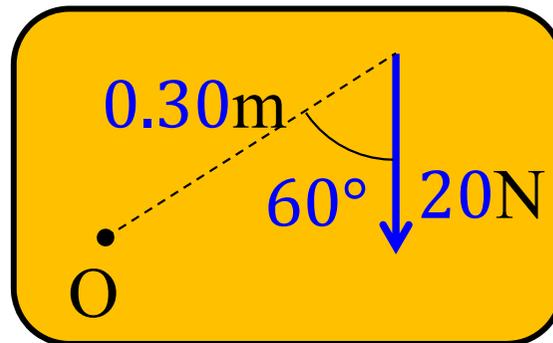
5分

(4) 演習1:

演習問題3 の問題3-5 (1)(4)に取り組む。

左回り(反時計回り)回転を引き起こそうとするとき正。

力のモーメントの和: $N = N_1 + N_1 + \dots$



(1)

大きさは?

$$|N| = 0.3\text{m} \times 20\text{N} \times \sin 60^\circ$$

$$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \text{N} \cdot \text{m} = 3\sqrt{3} \text{N} \cdot \text{m}$$

符号は?

右回り(時計回り)だから負

$$\therefore N = -3\sqrt{3} \text{N} \cdot \text{m}$$

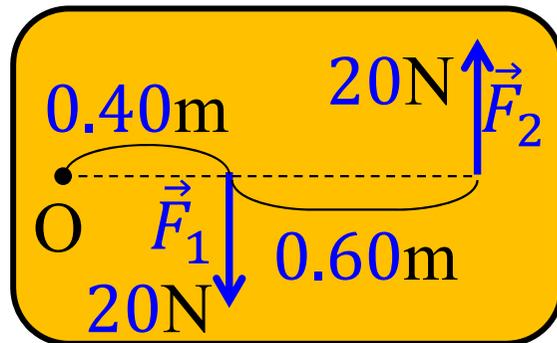
右回りに回転しようとする。

(4) 演習1:

演習問題3 の問題3-5 (1)(4)に取り組む。

左回り(反時計回り)回転を引き起こそうとするとき正。

力のモーメントの和: $N = N_1 + N_2 + \dots$



(4) N_1 の符号は?

右回り(時計回り)だから負

$$\begin{aligned} N_1 &= -0.4\text{m} \times 20\text{N} \times \sin 90^\circ \\ &= -8\text{N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

N_2 の符号は?

左回り(反時計回り)だから正

$$\begin{aligned} N_2 &= +1.0\text{m} \times 20\text{N} \times \sin 90^\circ \\ &= 20\text{N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore N &= N_1 + N_2 = -8\text{N} \cdot \text{m} + 20\text{N} \cdot \text{m} \\ &= 12\text{N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

左回りに回転しようとする。

(5) 物体の大きさも考慮した上でのつり合い

物体が全体として運動せず(重心が静止して),
かつ物体が回転(自転)しない場合が,
物体の大きさも考慮した上でのつり合い状態である。

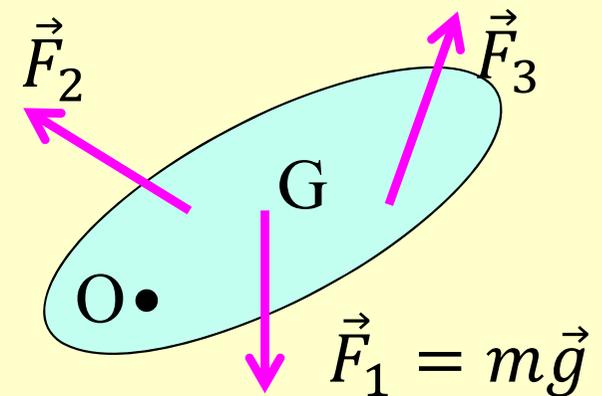
$$\text{重心静止の条件: } \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{0}$$

↑合力がゼロ

$$\text{自転しない条件: } N_1 + N_2 + \dots + N_n = 0$$

↑力のモーメントの和がゼロ

力のモーメント N を計算するとき
原点 O はどこにとってもよいが,
すべての力 \vec{F} で共通とすること。



(テキスト p.12)

(6) 演習2:

テキストp.12の例題3.1に取り組む。

質問: 回転軸Oが固定されていない場合, (3)で求めた \vec{F}_3 で,
物体のつり合い条件は成り立っているか?

通分

(6) 演習2:

テキストp.12の例題3.1に取り組む。

左回りを正とする。

(1) N_1 は正

$$\begin{aligned} N_1 &= 3 \text{ m} \times 2 \text{ N} \times \sin 90^\circ \\ &= 6 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

(2) N_2 は正

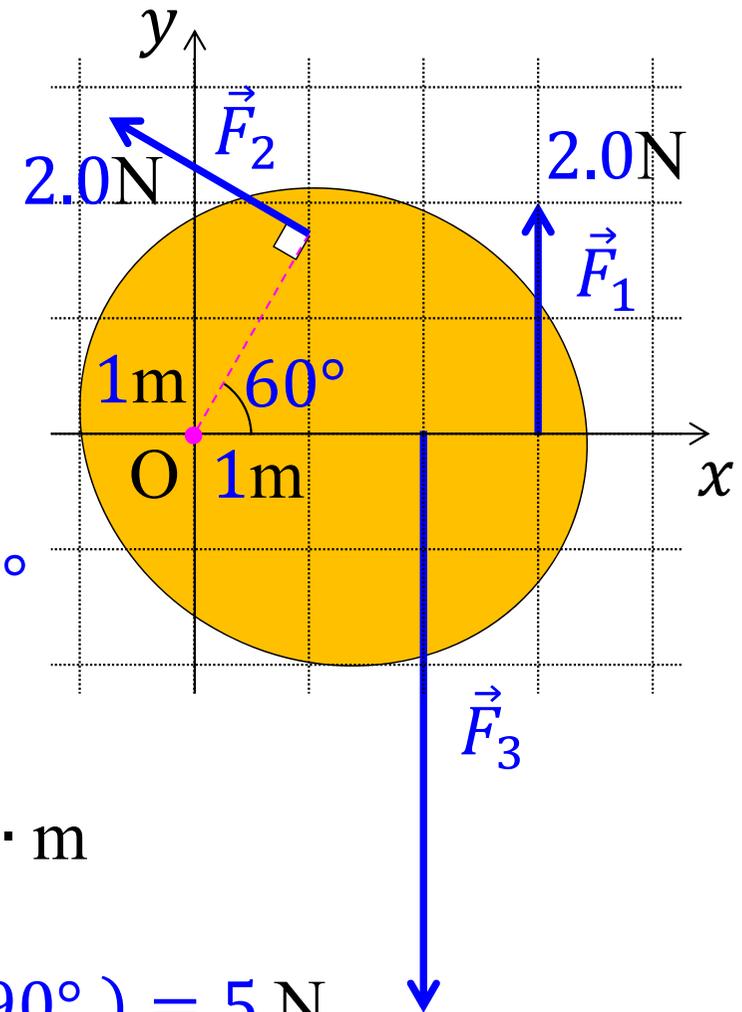
$$\begin{aligned} N_2 &= (1/\cos 60^\circ) \text{ m} \times 2 \text{ N} \times \sin 90^\circ \\ &= 4 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

(3) $N_1 + N_2 + N_3 = 0$

$$\begin{aligned} \therefore N_3 &= -N_1 - N_2 = -6 \text{ N} \cdot \text{m} - 4 \text{ N} \cdot \text{m} \\ &= -10 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$r_3 = 2 \text{ m} \text{ だから, } F_3 = |N_3| / (r_3 \sin 90^\circ) = 5 \text{ N}$$

\vec{F}_3 のモーメントは右回りだから, \vec{F}_3 は図の向きになる。



(テキスト p.12)

(6) 演習2: テキストp.12の例題3.1に取り組む。

質問: 回転軸Oが固定されていない場合, (3)で求めた \vec{F}_3 で, 物体のつり合い条件は成り立っているか?

$$\vec{F}_1 = (0, 2)\text{N}$$

$$\vec{F}_2 = (-2 \cos 30^\circ, 2 \sin 30^\circ)\text{N}$$

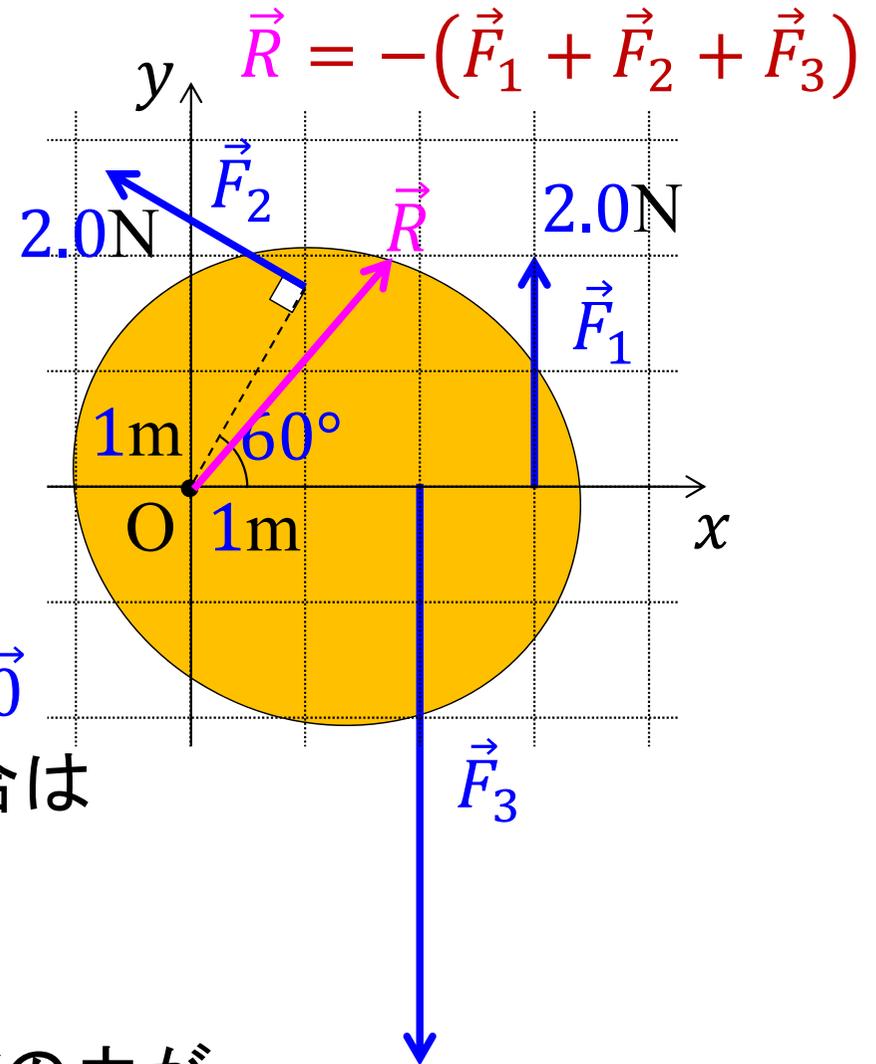
$$\vec{F}_3 = (0, -5)\text{N}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (-\sqrt{3}, -2)\text{N} \neq \vec{0}$$

回転軸Oが固定されていない場合はつり合っていない。

例題3.1では, 固定回転軸Oから

$\vec{R} = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3) = (\sqrt{3}, 2)\text{N}$ の力が働いてつり合っている。



第12回授業 レポート課題

テキスト問題演習3 の, 問題3-1, 3-2, 3-4, 3-5, 3-6(p.13, 14)を解け。

問題3-5では力のモーメントの符号は時計回りを正として答えよ。

問題3-6は力のつり合いと, 力のモーメントのつり合いを考える。

注意1: 計算式だけでなく, 説明文(必要なら適切な図も)を加えて答案を作成すること。答案作成力も見る。

注意2: 最初はこの問題がよく解けなかったとしても構わない。しかし, 次の確認テストまでに何度も復習し, 適切な答案を作れるようにすることを強く勧める。

提出×切: 答案用紙を, 今週の**金曜日(13:00)**までに提出

提出場所: **D0308**(原科)研究室前のレポート提出用の**木箱**

注意事項: 自分の答案をノートに記入するか, コピーをとって, 次の授業に持ってくる。

- ・レポート解答用紙

- ・次週の授業プリント

(これに今週のレポート課題も記してある。)

を必ず持って帰ること