

問題演習 9, 問題 9-6

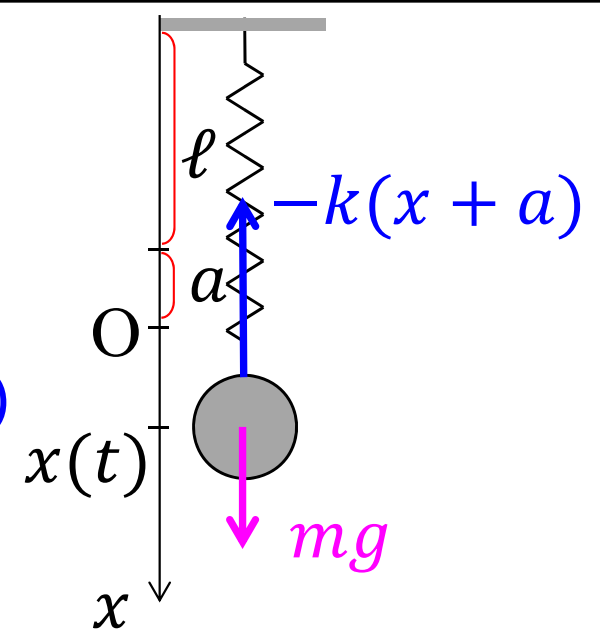
(1) 説明・計算：

つり合いの位置で $-ka + mg = 0 \therefore k = mg/a$

$$F_x(t) = -k(x(t) + a) + mg = -kx(t)$$

$$ma_x(t) = -kx(t) \Rightarrow m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{mg}{a}x(t)$$

答：運動方程式は、 $m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{mg}{a}x(t)$



(2) 説明・計算（前回レポートと同様に問(1)の運動方程式から $x(t)$ を求める。初期条件は問題文から読み取ること。）：

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{mg}{a}x(t) \Rightarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{g}{a}x(t)$$

三角関数の微分の性質より，一般解は $x(t) = A \cos(\omega t + \alpha) \cdots \textcircled{1}$ で

表わせる。ここで， $\omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$ である。 $\theta = \omega t + \alpha$ と置いて①を微分し，

速度の x 成分を求めると，

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dx}{d\theta} = \cdots = -\omega A \sin(\omega t + \alpha) \cdots \textcircled{2}$$

初期条件は， $x(0) = -a$ ， $v_x(0) = 0$

①より $x(0) = A \cos(\omega \times 0 + \alpha) = A \cos \alpha$

速度の x 成分を求めると, $v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dx}{d\theta}$
 $= \dots = -\omega A \sin(\omega t + \alpha) \dots \textcircled{2}$

初期条件は, $x(0) = -a$, $v_x(0) = 0$

①より $x(0) = A \cos(\omega \times 0 + \alpha) = A \cos \alpha$

初期条件と比較して $A \cos \alpha = -a \dots \textcircled{3}$

②より $v_x(0) = -\omega A \sin(\omega \times 0 + \alpha) = -\omega A \sin \alpha$

初期条件と比較して $-\omega A \sin \alpha = 0 \Rightarrow A \sin \alpha = 0 \dots \textcircled{4}$

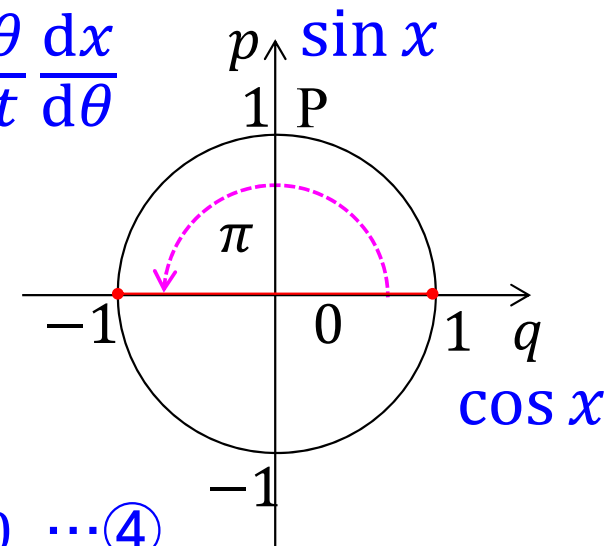
$A \neq 0$ なので, ④より $\sin \alpha = 0$. $0 \leq \alpha < 2\pi$ の範囲で解を探す。

$\therefore \alpha = 0$ または $\alpha = \pi$. どちらを選んでも同じ解なので $\alpha = \pi$ を選択する。

③より $A \cos \pi = -a \Rightarrow A \times (-1) = -a \therefore A = a$

$A = a$, $\alpha = \pi$ を①に代入して

$$x(t) = a \cos(\omega t + \pi)$$



答: $x(t) = a \cos \left(\sqrt{\frac{g}{a}} t + \pi \right) [\text{m}]$

(3) 説明・計算 (求める周期を T とする):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}} [\text{s}]$$

答: $T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}} [\text{s}]$

(4) 説明・計算 (求める速さを v_0 とする):

$x(t) = a \cos(\omega t + \pi)$ で $x = 0$ となるのは $\cos(\omega t + \pi) = 0$

$$\omega t + \pi = (\pi/2) + n\pi \quad ; n = \text{整数}$$

$$v_0 = \left| -\omega a \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \right| = |-\omega a \times (\pm 1)| = \omega a$$

$$= \sqrt{\frac{g}{a}} a = \sqrt{ga}$$

$$\text{答: } v_0 = \sqrt{ga} \quad [\text{m/s}]$$

問題演習 9, 問題 9-3 の設定で

(追加 0) 理由と答え: なめらかな床で摩擦力が働かず, 垂直抗力が仕事をしないので, 力学的エネルギー保存則は成立する。

(追加 1) 説明・計算:

$$x_0 = 0.10 \text{ m}, \quad v_0 = 0.0 \text{ m/s より},$$

$$E_0 = K_0 + U_0 = 0 + \frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} \times 50 \text{ N/m} \times (0.10 \text{ m})^2$$

$$= 0.25 \text{ J}$$

$$\text{答: } E_0 = 0.25 \text{ J}$$

(追加 2) 説明・計算: つり合い位置での力学的エネルギーを E_1 と置く。保存則より,

$$E_1 = E_0 = 0.25 \text{ J}。この位置では $U_1 = 0$ なので, $E_1 = K_1 = \frac{1}{2} m v_0^2$$$

$$= 0.25 \text{ J}$$

$$\text{答: } E_0 = 0.25 \text{ J}$$

(追加 2)説明・計算： つり合い位置での力学的エネルギーを E_1 と置く。保存則より、

$$E_1 = E_0 = 0.25 \text{ J}。この位置では $U_1 = 0$ なので、 $E_1 = K_1 = \frac{1}{2}mv_0^2$$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2E_1}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 0.25 \text{ J}}{0.050 \text{ kg}}} = \sqrt{10} \text{ m/s}$$
$$\text{答: } v_0 = 3.2 \text{ m/s}$$

(追加 3)説明・計算：

ばねが最も縮んだときの位置 x_S と、最も伸びたときの位置 x_L での力学的エネルギーを E_2 と置く。保存則より、 $E_2 = E_0 = 0.25 \text{ J}$ 。この位置では、

$$v_2 = 0 \text{ となり、} K_2 = 0 \text{ なので、} E_2 = U_2 = \frac{1}{2}kx_2^2$$

$$\Rightarrow x_2 = \pm \sqrt{\frac{2E_2}{k}} = \pm \sqrt{\frac{2 \times 0.25 \text{ J}}{50 \text{ N/m}}} = \pm 0.10 \text{ m}$$

$$\text{答: } x_S = -0.10 \text{ m} \quad x_L = 0.10 \text{ m}$$

☆このレポートをやるのに _____ 時間 _____ 分、

それ以外にこの授業の予習復習を _____ 時間 _____ 分した。

授業予定(変更されたシラバス)

- ①力学1の確認と力学2の概要
- ②仕事
- ③運動エネルギー
- ④位置エネルギー (小)
- ⑤力学的エネルギーとその保存則 (小)
- ⑥エネルギーの総合演習 (小)
- ⑦単振動1: 定性的な理解と三角関数 (+ 確認試験1)
- ⑧単振動2: 運動方程式を解く
- ⑨単振動3: 問題演習 (小)
- ⑩円運動と慣性力1: 基礎事項 (小)
- ⑪円運動と慣性力2: 問題演習 (小)
- ⑫力のモーメント1: 実験的理解と定義 (小)
- ⑬力のモーメント2: 問題演習1 (小)
- ⑭問題演習2 (+ 確認試験2)
- ⑮まとめ
- ⑯期末試験

力学2 ≪ 学習到達目標 ≫

- 1) 仕事の定義を説明できる。
- 2) 力学的エネルギー保存則を説明できる。
- 3) 単振動の運動方程式を解き、その運動を説明できる。
- 4) 円運動と、慣性力としての遠心力を説明できる。
- 5) 力のモーメントの定義を説明できる。

第10回目 円運動と慣性力1(基礎事項)

今日の授業の目的

前回までの3回で単振動を理解した。単振動は、車のエンジンを動かした際のボディの振動、地震による建物の振動、交流回路の電流や電圧の振動など、様々な振動を扱う基礎となる。一方、エンジンのギアやクランク、発電機(モーター)の回転軸など、機械要素として回転運動(円運動)を行うものが多数ある。その回転運動のうち最も基礎的な等速円運動は、単振動を基にして理解できる。そこで、今回の授業の目的は、等速円運動と関連事項(遠心力など)を理解することである

(1) 等速円運動と単振動:

角速度 ω :

$$\omega = \frac{d\theta(t)}{dt} \quad [\text{rad/s}]$$

→ 等速円運動の場合,
 ω は定数

等速円運動の回転角:

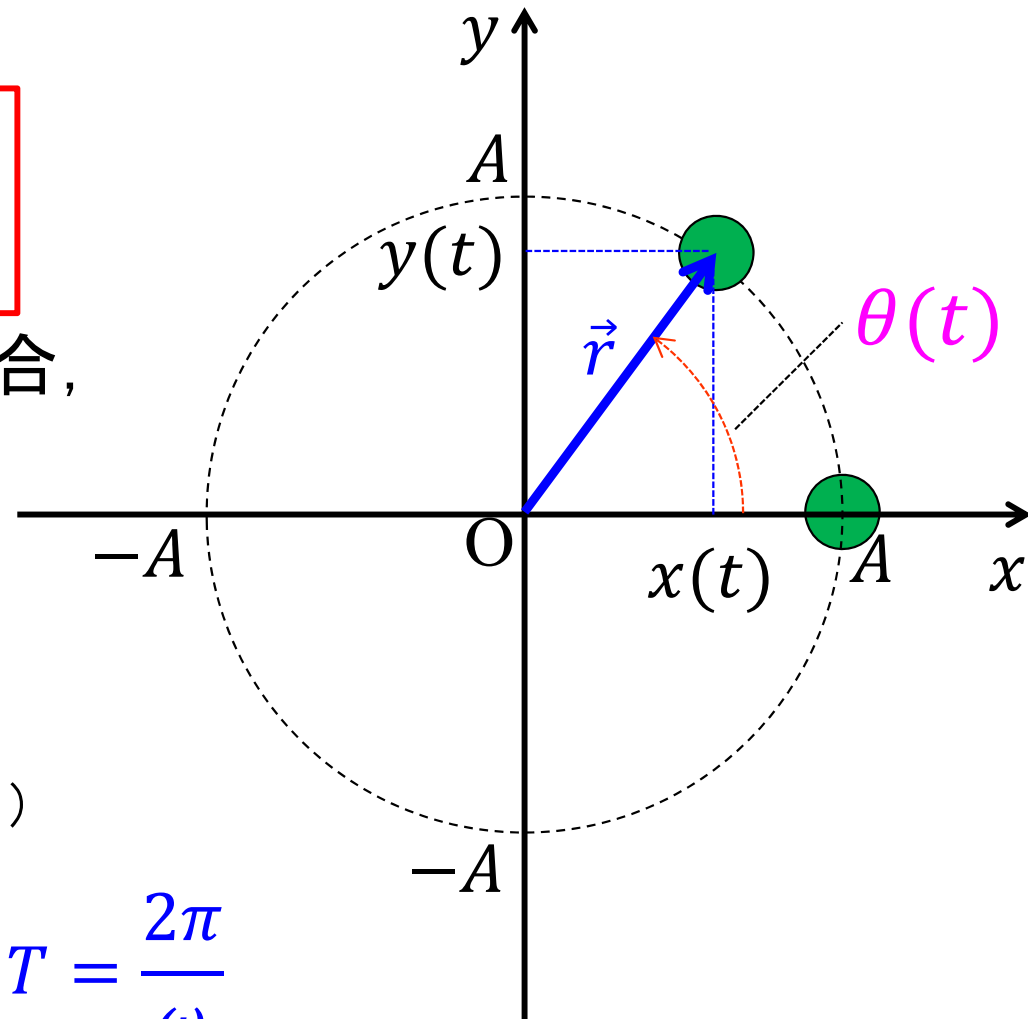
$$\theta(t) = \omega t + \alpha \quad [\text{rad}]$$

(α は時刻0 [s]での回転角)

周期 T :

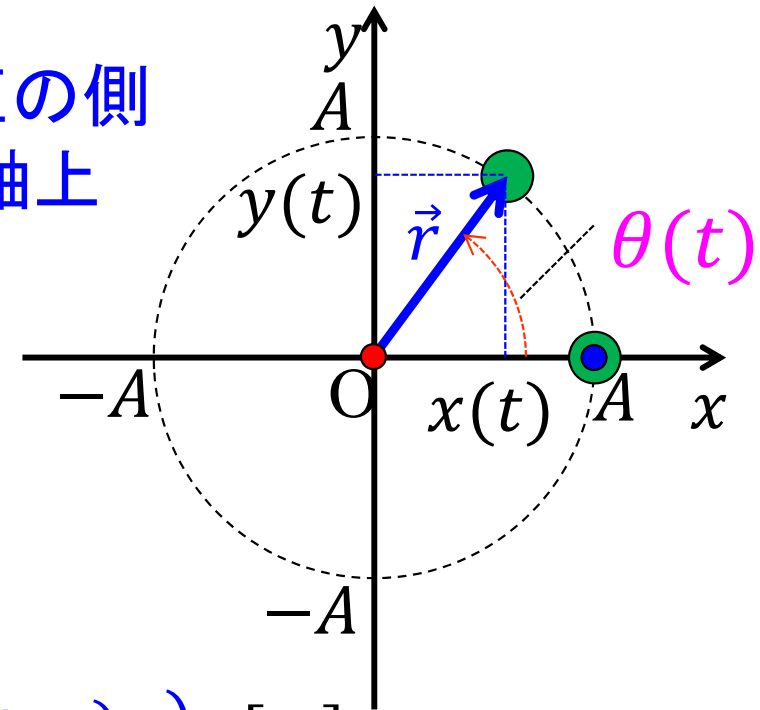
$$\omega T = 2\pi \text{ の関係より } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

質問: $\omega < 0$ は何を意味する?



(1) 等速円運動と単振動:

等速円運動を xy 平面内で, y 軸の正の側
または x 軸の正の側から見れば, x 軸上
または y 軸上の単振動に見える。
 x 座標と y 座標の動きは, 単振動の
式で表わせる。



位置ベクトル $\vec{r}(t)$

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= (x(t), y(t)) \\ &= (A \cos(\omega t + \alpha), A \sin(\omega t + \alpha)) \text{ [m]}\end{aligned}$$

速度 $\vec{v}(t)$

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \\ &= (-\omega A \sin(\omega t + \alpha), \omega A \cos(\omega t + \alpha)) \text{ [m/s]}\end{aligned}$$

(1) 等速円運動と単振動:

位置 $\vec{r}(t)$

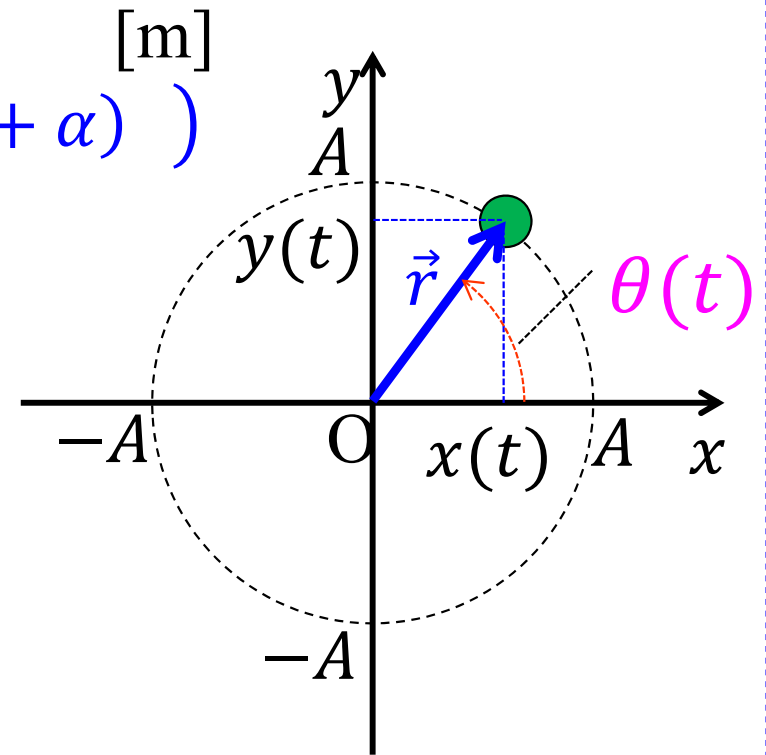
$$\vec{r}(t) = (A \cos(\omega t + \alpha), \quad A \sin(\omega t + \alpha)) \quad [\text{m}]$$

速度 $\vec{v}(t)$

$$\vec{v}(t) = (-\omega A \sin(\omega t + \alpha), \quad \omega A \cos(\omega t + \alpha)) \quad [\text{m/s}]$$

加速度 $\vec{a}(t)$

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \\ &= (-\omega^2 A \cos(\omega t + \alpha), \quad -\omega^2 A \sin(\omega t + \alpha)) \quad [\text{m/s}^2] \\ &= -\omega^2 (A \cos(\omega t + \alpha), \quad A \sin(\omega t + \alpha)) \\ &= -\omega^2 \vec{r}(t) \end{aligned}$$



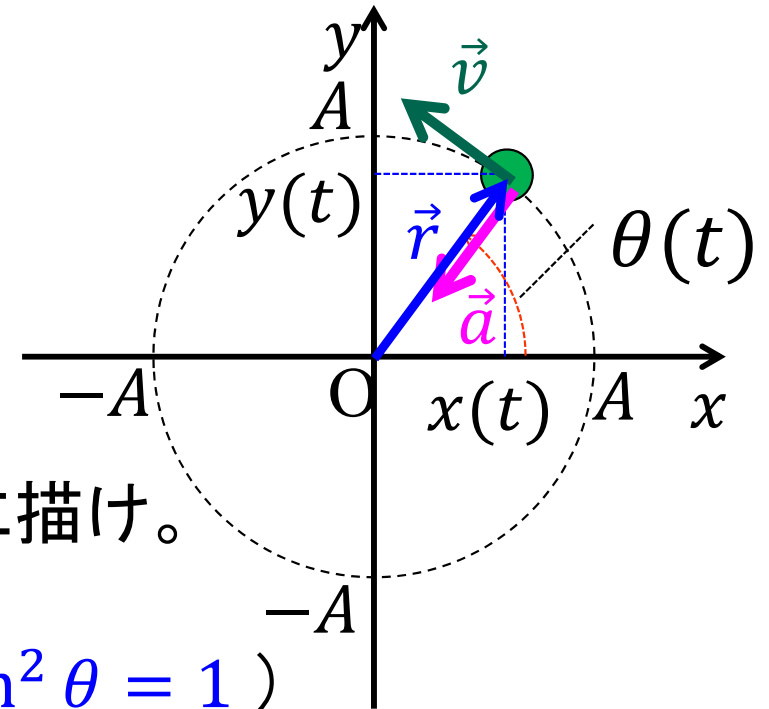
(1) 等速円運動と単振動:

等速円運動の加速度と位置の関係:

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

演習1: (a) ベクトル $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$ を
表す矢印を, 前ページの図に描け。

(b) ベクトルの大きさ $|\vec{v}|$, $|\vec{a}|$ を,
 ω と A で表せ。 ($\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$)



$$\vec{v}(t) = (-\omega A \sin(\omega t + \alpha) , \quad \omega A \cos(\omega t + \alpha)) [\text{m/s}]$$

$$\vec{a}(t) = (-\omega^2 A \cos(\omega t + \alpha) , \quad -\omega^2 A \sin(\omega t + \alpha)) [\text{m/s}^2]$$

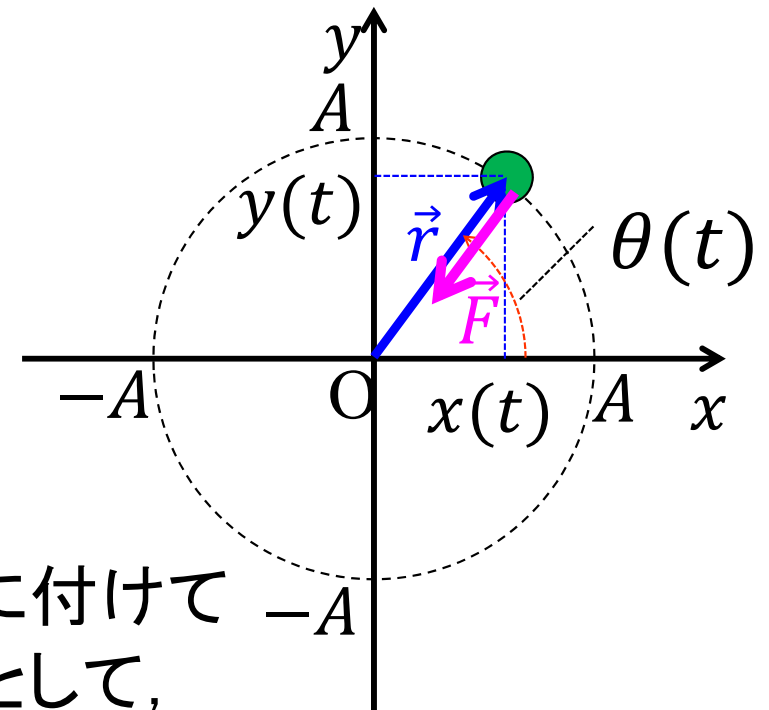
$$|\vec{v}| = |\omega A|, \quad |\vec{a}| = \omega^2 A$$

(1) 等速円運動と単振動:

$$\begin{aligned}\text{向心力: } \vec{F}(t) &= m\vec{a}(t) \\ &= -m\omega^2 \vec{r}(t)\end{aligned}$$

$$\text{大きさ: } |\vec{F}(t)| = m\omega^2 A$$

向き: 円軌道の中心を向く



演習2: 物体 (2 [kg]) を紐 (ひも) の先に付けて $-A$ 等速円運動をさせる。中心を原点として,
 $\vec{r}(t) = (0.5 \cos(28 t - \pi), 0.5 \sin(28 t - \pi))$ [m]
 だとする。紐の張力 $\vec{H}(t)$ を求めよ。空気抵抗や重力は無視。

$$m = 2 \text{ [kg]}, \omega = 28 \text{ [rad/s]}, A = 0.5 \text{ [m]} \Rightarrow H = 784 \text{ [N]}$$

$$\vec{H}(t) = (-784 \cos(28 t - \pi), -784 \sin(28 t - \pi)) \text{ [N]}$$

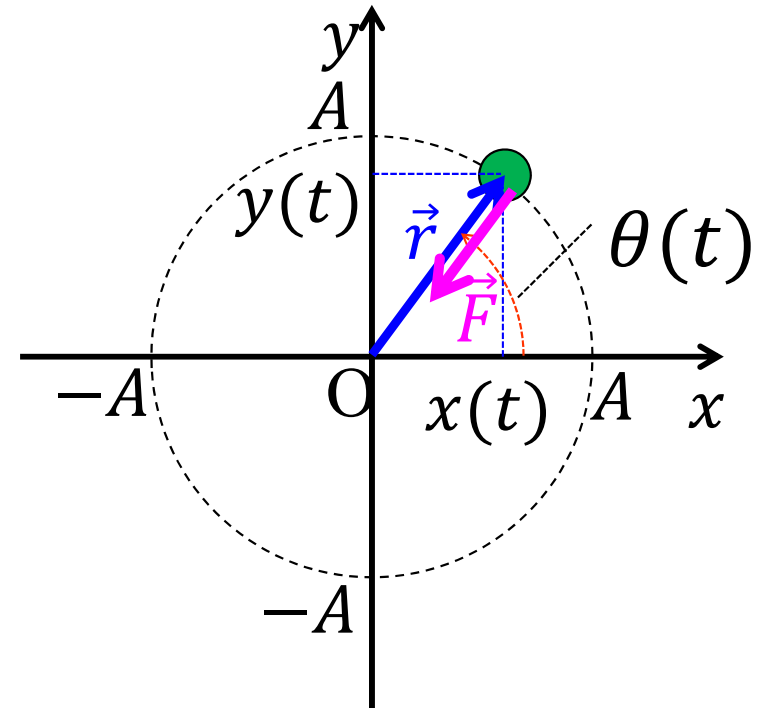
(2) 加速運動する観測者が測る見かけの力(慣性力):

向心力: $\vec{F}(t) = -m\omega^2 \vec{r}(t)$

向き: 円軌道の中心を向く

円運動する物体に働く力は
遠心力で外向きじゃないの？

遠心力って何？



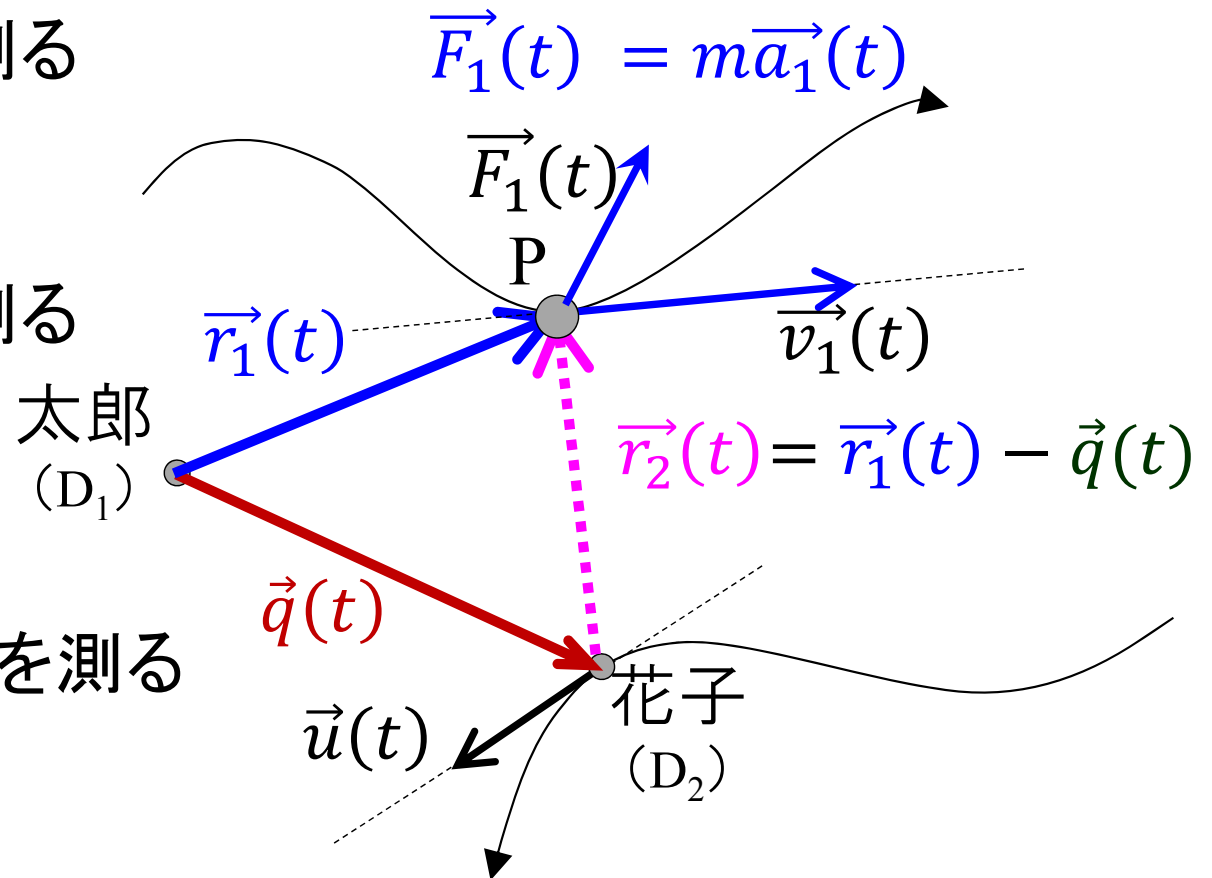
(2) 加速運動する観測者が測る見かけの力(慣性力):

太郎 (D_1) が物体Pを測る
 $\vec{r}_1(t), \vec{F}_1(t)$

花子 (D_2) が物体Pを測る
 $\vec{r}_2(t), \vec{F}_2(t)$

太郎 (D_1) が花子 (D_2) を測る
 $\vec{q}(t)$

観測者の変換(相対的な位置関係):
 $\vec{r}_2(t) = \vec{r}_1(t) - \vec{q}(t)$



(2) 加速運動する観測者が測る見かけの力(慣性力):

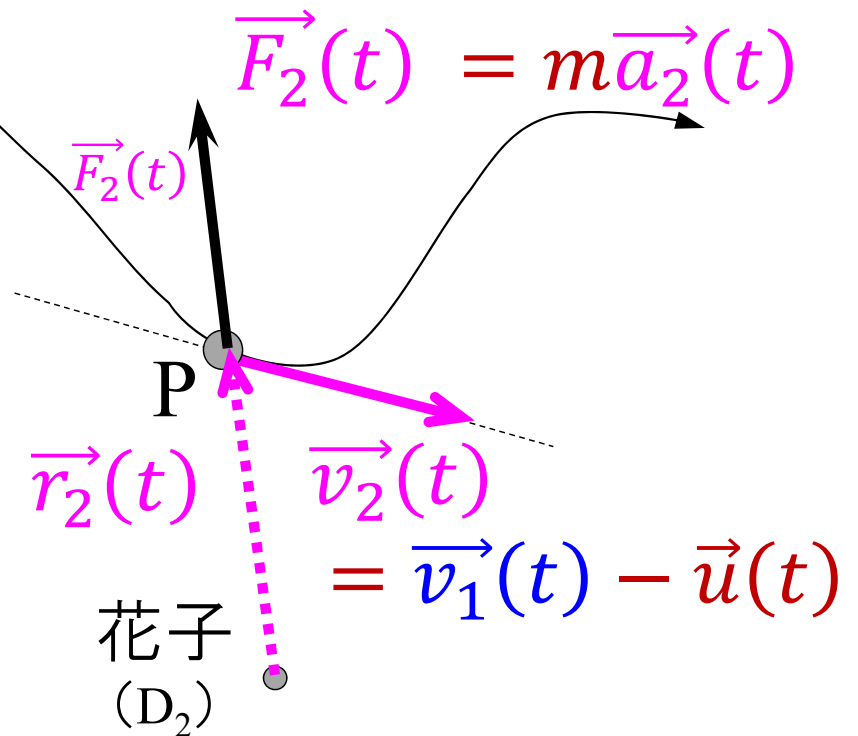
速度と加速度の変換
(相対速度と相対加速度):

$$\begin{aligned}\text{相対速度: } \vec{v}_2(t) &= \frac{d\vec{r}_2(t)}{dt} \\ &= \vec{v}_1(t) - \vec{u}(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{相対加速度: } \vec{a}_2(t) &= \frac{d\vec{v}_2(t)}{dt} \\ &= \vec{a}_1(t) - \vec{b}(t)\end{aligned}$$

$\vec{u}(t)$: D_1 (太郎) が測る D_2 (花子) の速度

$\vec{b}(t)$: D_1 (太郎) が測る D_2 (花子) の加速度



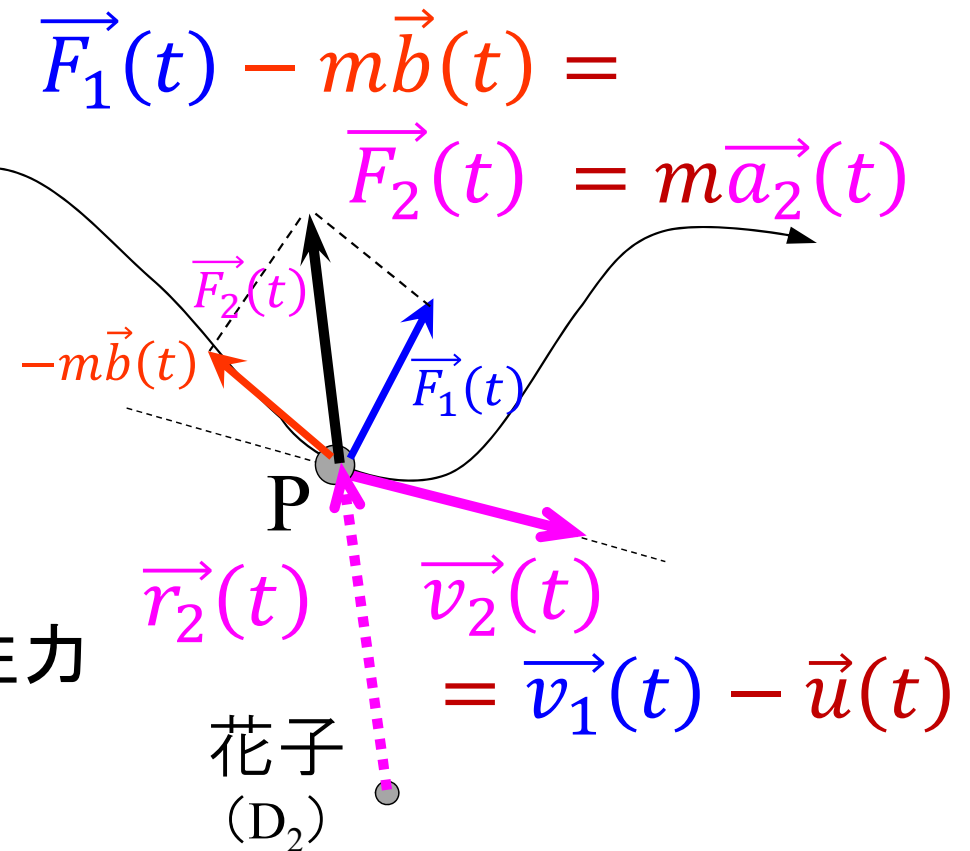
(2) 加速運動する観測者が測る見かけの力(慣性力):

慣性力:

D_2 (花子)が測る力:

$$\begin{aligned}\vec{F}_2(t) &= m\vec{a}_2(t) \\ &= m(\vec{a}_1(t) - \vec{b}(t)) \\ &= \vec{F}_1(t) - m\vec{b}(t)\end{aligned}$$

D_2 (花子)が測る物体Pに働く慣性力
 $-m\vec{b}(t)$



(3) 遠心力(慣性力の等速円運動への適用例):

D₁: 原点O に静止する太郎

D₂: 物体P と一緒に等速円運動する花子

D₁(太郎)が測る

$$\vec{F}_1(t) = -m\omega^2 \vec{r}_1(t)$$

D₂(花子)が測る

力(合力)はゼロ

$$\vec{F}_2(t) = \vec{0}$$

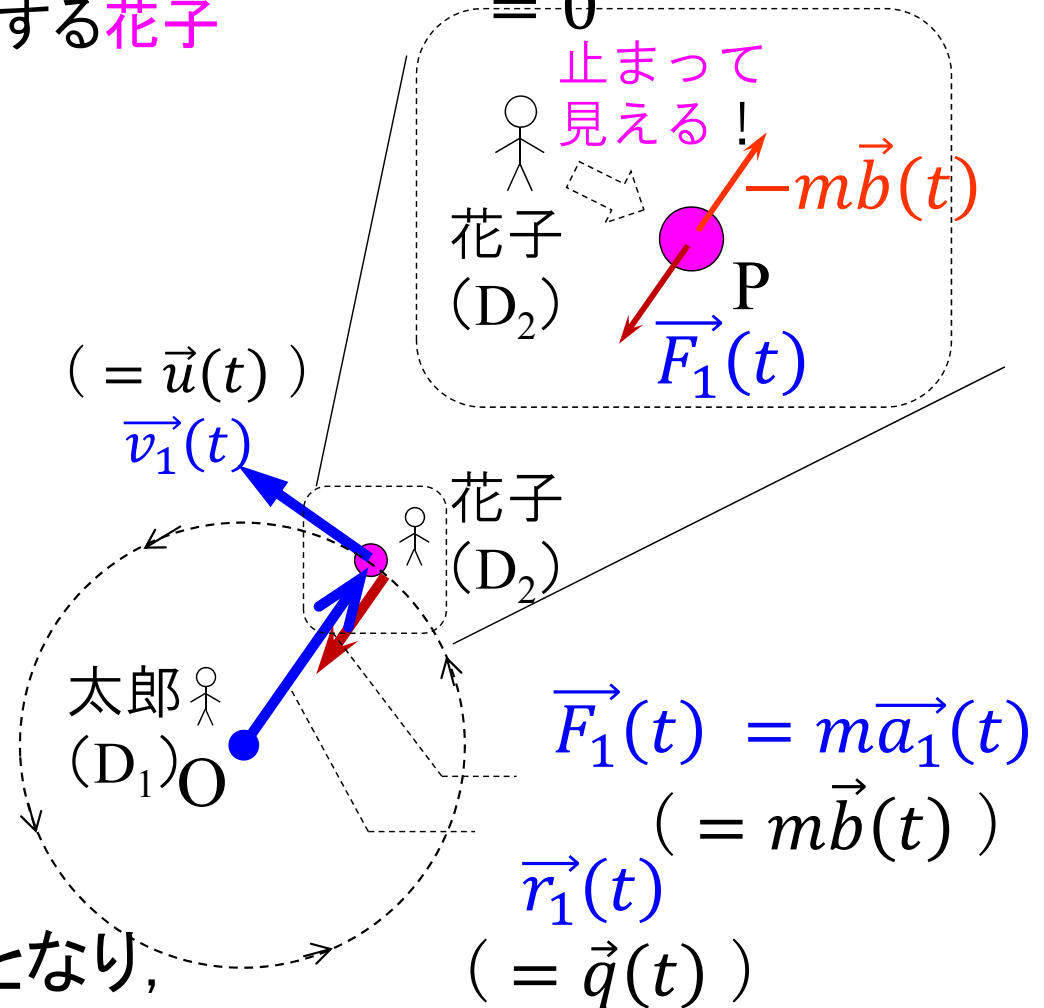
D₂(花子)が測る慣性力 $\vec{C}(t)$

$$\vec{F}_1(t) + \vec{C}(t) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{C}(t) = -\vec{F}_1(t)$$

遠心力は向心力と逆の力となり,

$$\begin{aligned}\vec{F}_2(t) &= \vec{F}_1(t) - m\vec{b}(t) \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$



(3) 遠心力(慣性力の等速円運動への適用例):

遠心力は向心力と逆の力となり,

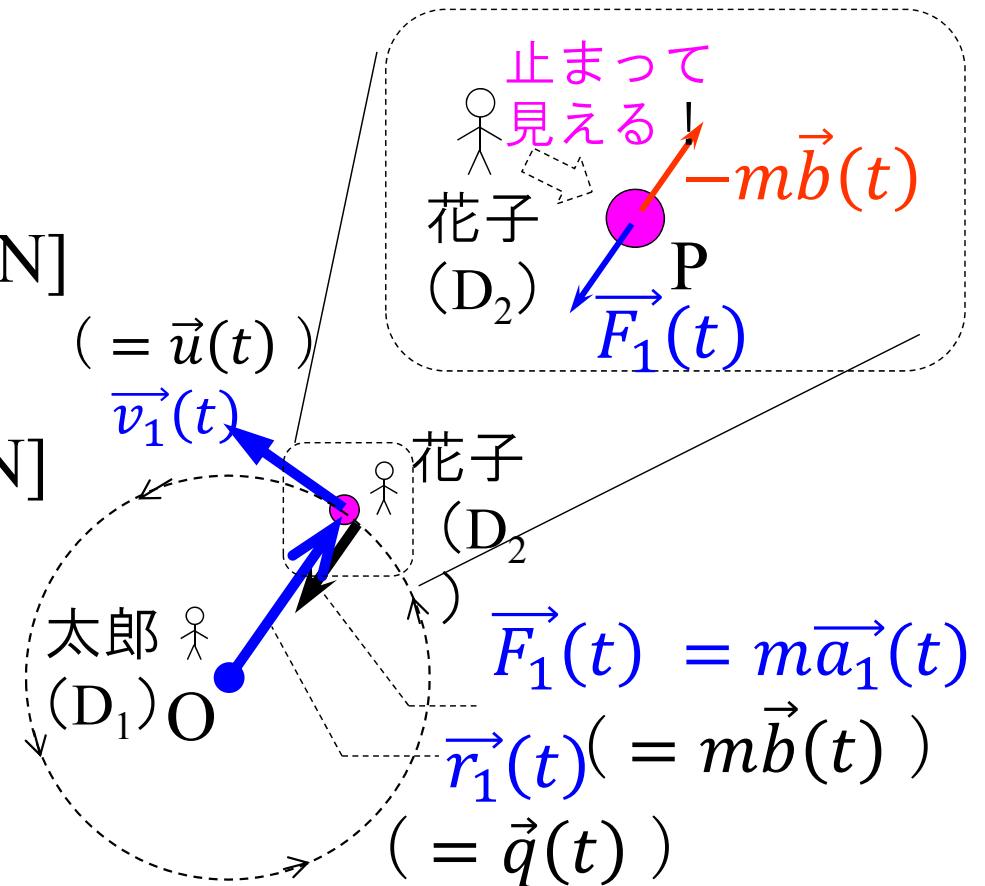
$$\text{遠心力 } \vec{C}(t) = -\vec{F}_1(t)$$

$$= m\omega^2 \vec{r}_1(t)$$

$$= m\omega^2 (A \cos(\omega t + \alpha), A \sin(\omega t + \alpha)) [\text{N}]$$

$$= (m\omega^2 A \cos(\omega t + \alpha), m\omega^2 A \sin(\omega t + \alpha)) [\text{N}]$$

$$\vec{F}_2(t) = \vec{F}_1(t) - m\vec{b}(t) = \vec{0}$$



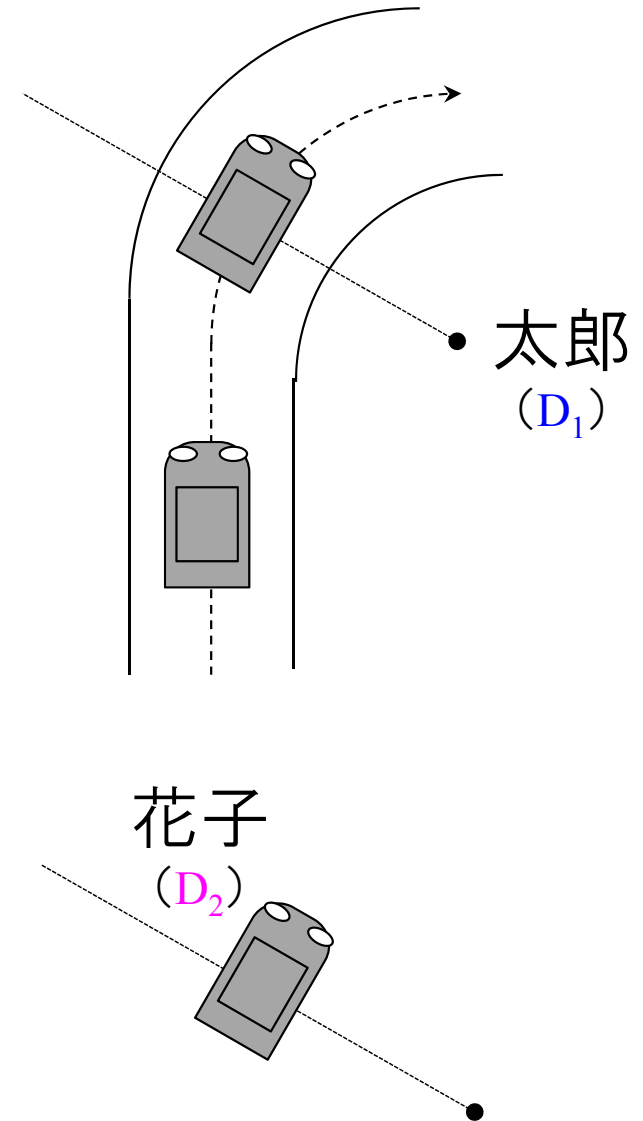
(3) 遠心力(慣性力の等速円運動への適用例): 問題9.2

演習3: 質量 1.2×10^3 [kg] の自動車
(60 [kg] の運転手花子含む) が, 曲率半
径 1.0×10^2 [m] の右に曲がるカーブを,
一定の速さ 14 [m/s] で曲がった。

- (1) 運転手が感じる遠心力の大きさ
- (2) 遠心力の大きさは重力の何倍

追加

- (a) 速さを 14 [m/s] を時速 $\sim$ km (km/h) で
表せ(有効数字2桁)。



(3) 遠心力(慣性力の等速円運動への適用例): 問題9.2

質量: 運転手 60 [kg], 自動車全体 1.2×10^3 [kg]

曲率半径 1.0×10^2 [m], 速さ 14 [m/s]

(1) 運転手 (60 [kg]) が感じる遠心力の大きさ

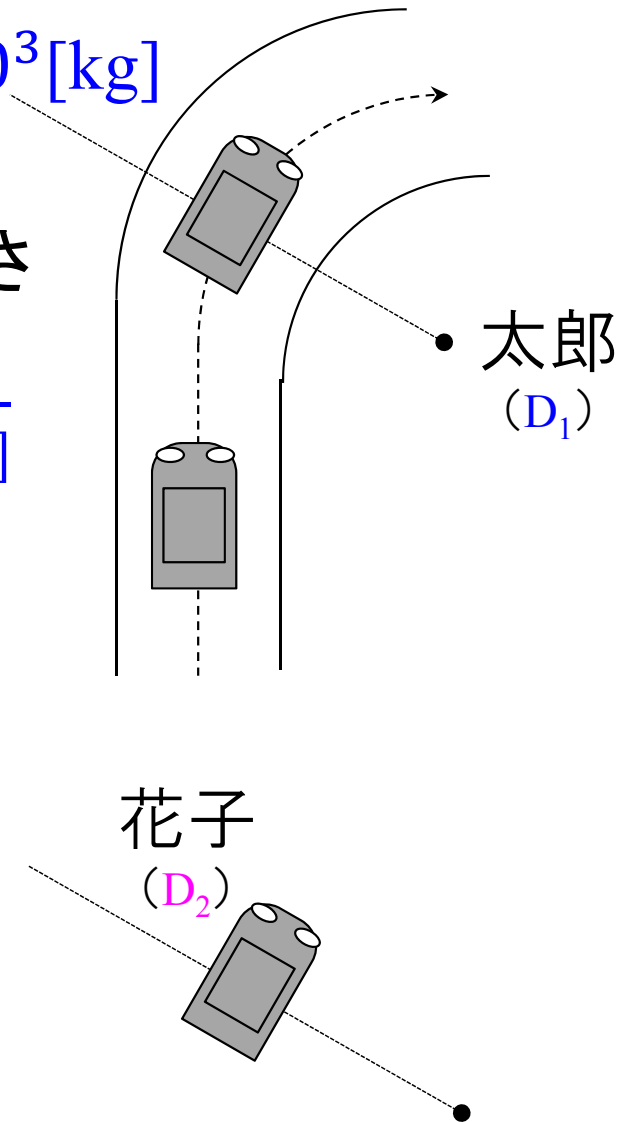
$$\begin{aligned} |\vec{C}| &= |-\vec{F}| = m \frac{v^2}{R} = 60 [\text{kg}] \times \frac{(14 [\text{m/s}])^2}{1.0 \times 10^2 [\text{m}]} \\ &= 1.2 \times 10^2 [\text{N}] \end{aligned}$$

(2) 重力の何倍

$$\frac{|\vec{C}|}{mg} = \frac{v^2}{Rg} = 0.2 \text{ 倍} \quad 0.2G \text{ の加速度}$$

追加

$$\begin{aligned} \text{(a) 速さ } 14 [\text{m/s}] &= 14 \times \frac{10^{-3} [\text{km}]}{(1/3600) [\text{h}]} \\ &= 50 [\text{km/h}] \end{aligned}$$



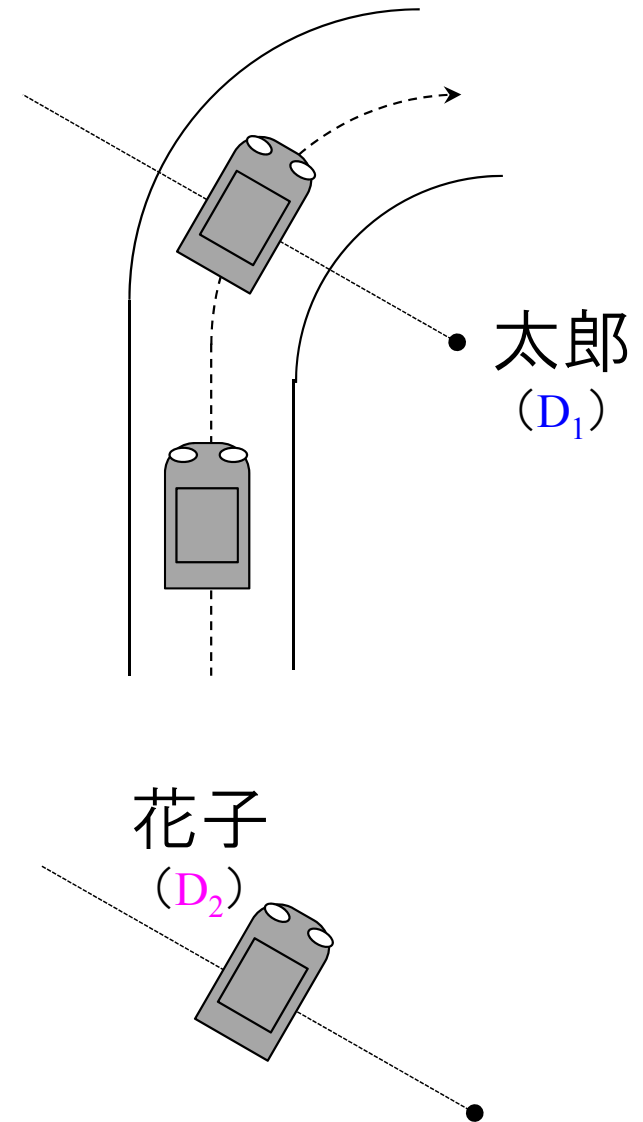
(3) 遠心力(慣性力の等速円運動への適用例): 問題9.2

演習3: 質量 1.2×10^3 [kg] の自動車
(60 [kg] の運転手花子含む) が, 曲率半
径 1.0×10^2 [m] の右に曲がるカーブを,
一定の速さ 14 [m/s] で曲がった。

追加

(b) テキストの(1)(2)は地面で静止して
いる者 (D_1) から見たときの答えか, 自
動車に乗っている者 (D_2) から見たとき
の答か。

(c) カーブを曲がる自動車の加速度 $\vec{a}$ の
向きを上図に図示せよ。

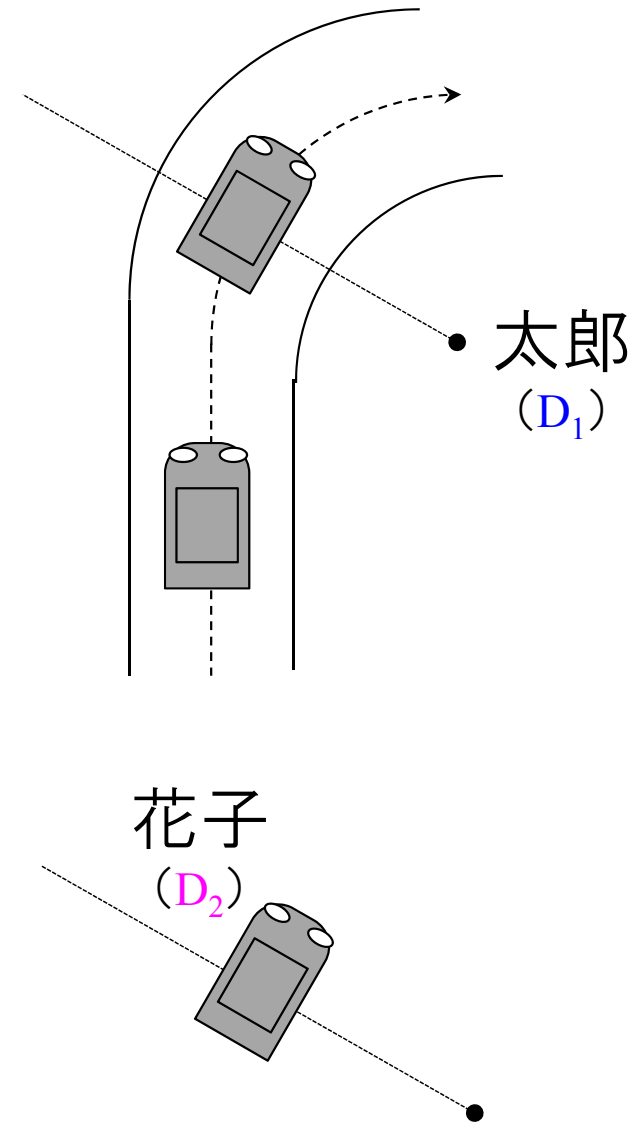


(3) 遠心力(慣性力の等速円運動への適用例): 問題9.2

演習3: 質量 1.2×10^3 [kg] の自動車
(60 [kg] の運転手花子含む) が, 曲率半
径 1.0×10^2 [m] の右に曲がるカーブを,
一定の速さ 14 [m/s] で曲がった。

追加

(d) この自動車を円運動させている合力 $\vec{F}$ の向きを上図に図示せよ。合力の大きさ F を求めよ。また, この力 $\vec{F}$ は主に, 何から働くどんな種類の力か を考えてみよ。[水平面と平行な向きの力だけでよい。]

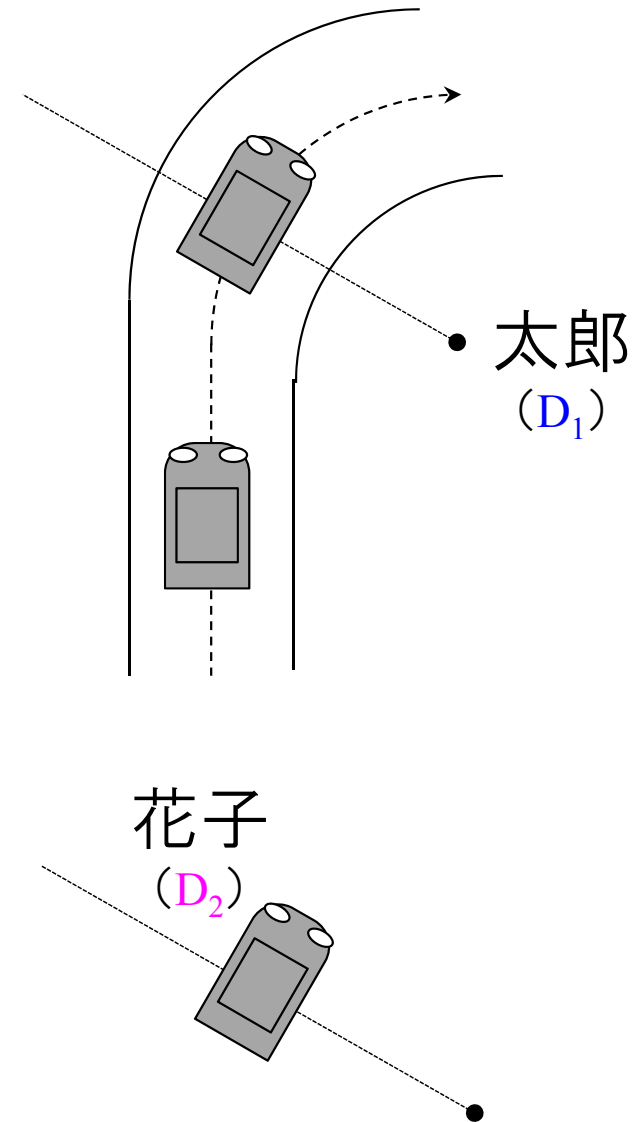


(3) 遠心力(慣性力の等速円運動への適用例): 問題9.2

演習3: 質量 1.2×10^3 [kg] の自動車
(60 [kg] の運転手花子含む) が, 曲率半
径 1.0×10^2 [m] の右に曲がるカーブを,
一定の速さ 14 [m/s] で曲がった。

追加

(e) 自動車に乗っている者 (D_2) から見た
場合, 自動車は常に静止している。 D_2
には, 遠心力 $\vec{C}$ がどう働いているように
測られるか。問い(d)の力 $\vec{F}$ と関係づけ
て説明せよ。 $\vec{C}$ の向きを下の図に図示
せよ。



(3) 遠心力(慣性力の等速円運動への適用例): 問題9.2

質量: 運転手 60 [kg], 自動車全体 1.2×10^3 [kg]

曲率半径 1.0×10^2 [m], 速さ 14 [m/s]

(b) テキスト(1)(2)の問いは, 遠心力である。
したがって, 自動車に乗っている者 (D_2)
から見たときの答

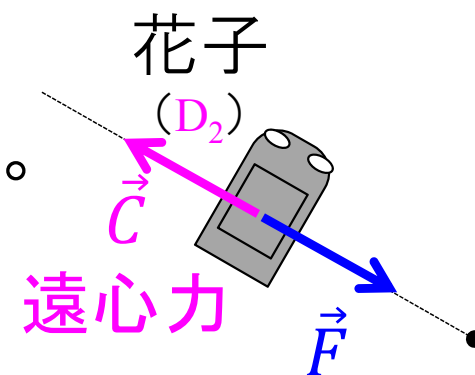
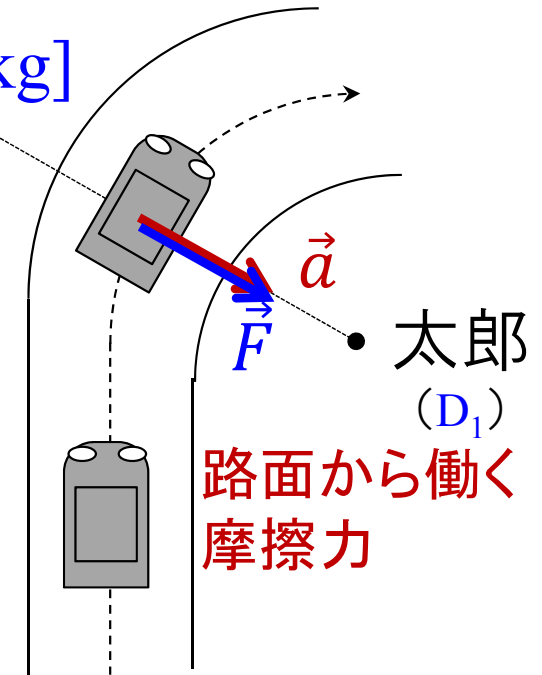
(c) 自動車の加速度 $\vec{a}$ の向き (上の図)

(d) 合力 $\vec{F}$ の向き (上の図)

$\vec{F}$ は主に, ...

(e) D_2 には, 遠心力 $\vec{C}$ がどう働いている...
遠心力 $\vec{C}$ は $\vec{F}$ とつり合うように働いている。

$$\vec{C} + \vec{F} = \vec{0} \quad \therefore \vec{C} = -\vec{F}$$



第10回授業 レポート課題

(a) 第10回授業プリント項目(1)の演習2で考えた等速円運動について、以下の問いに答えよ。

a-1) 円軌道の半径 A , 角速度 ω , 時刻 $0[\text{s}]$ での回転角 α を読み取れ。

a-2) 周期 T , 速さ $v(=|\vec{v}(t)|)$, 加速度の大きさ $a(=|\vec{a}(t)|)$, を求めよ。

a-3) 物体と共に等速円運動する観測者を想定する。この観測者が測る, 物体に働く遠心力 $\vec{C}(t)$ を求めよ。

a-4) 演習2で求めた張力 $\vec{H}(t)$ が物体に与える仕事率(単位時間当たりの仕事) P を求めよ。

(b) 今度は, 第10回授業プリント項目(1)の演習2で考えた物体($m = 2.0 [\text{kg}]$)を, 紐のかわりにばねの端に結び付けて回転させる。ばねの自然の長さは $\ell = 0.40 [\text{m}]$ である。このばねを用いた回転運動が, 紐に結んだ演習(2)の場合と全く同じ,

$$\vec{r}(t) = (0.5 \cos(28 t - \pi), 0.5 \sin(28 t - \pi)) [\text{m}]$$

で表される等速円運動であったときを考える。なお, 演習2と同様に, 空気抵抗や重力は無視できるとする。

b-1) このばねのばね定数 k を求めよ。(ヒント: 物体に作用する向心力から考えよ。)

第10回授業 レポート課題

b-2) この物体が持つ力学的エネルギー E を求めよ。(ヒント: 重力が無視できることに注意して位置エネルギーを求めよ。)

挑戦問題(取り組むかどうかは各自の判断): 以上の問題では, 重力は無視できるとした。では, 以上の問題で求めた力など様々な量について, 重力を考慮した場合としない場合の誤差はどの程度だと見積れるか?

注意1: テキストの解答は略解であり, 答案として必要な部分が省略されている場合がある。説明文や適切な図を加えて, 答案を作成すること。答案作成力も見る。

提出×切: 答案用紙を, 今週の**金曜日(13:00)までに提出**

提出場所: **D0308**(原科)研究室前のレポート提出用の**木箱**

注意事項: 自分の答案をノートに記入するか, コピーをとって, 次の授業に持ってくる。

- ・レポート解答用紙
- ・次週の授業プリント

（これに今週のレポート課題も記してある。）

を必ず持って帰ること