

授業予定(変更されたシラバス)

- ①力の合成・分解の実験的理解
- ②ベクトルの基礎事項と力
- ③基本的な力:有効重力, バネの力, 摩擦力 (小)
- ④力の合成・分解, 力のつり合い (小)
- ⑤ベクトルと力の総合演習 (小)
- ⑥微分の基礎事項と速度・加速度の定義
- ⑦積分の基礎事項と位置・速度・加速度の関係 (小)
- ⑧微分積分と位置・速度・加速度の総合演習 (+確認試験1)
- ⑨平面運動の位置・速度・加速度とベクトル・微分積分
- ⑩力学の3つの基本法則1 : 導入 (小)
- ⑪力学の3つの基本法則2 : 問題演習 (小)
- ⑫放物運動1 : 運動方程式を解く (小)
- ⑬放物運動2: 問題演習1 (小)
- ⑭(確認試験2+) 問題演習2
- ⑮まとめ
- ⑯期末試験

力学1 << 学習到達目標 >>

- 1) 力の合成・分解をベクトルを使って説明できる。
- 2) 基本的な力の法則(重力, ばねの力, 摩擦力)の法則を説明できる。
- 3) 速度, 加速度の定義を説明できる。
- 4) 力学の3つの基本法則を説明できる。
- 5) 放物運動の運動方程式を解き, その運動を説明できる。

第9回目 平面運動の位置・速度・加速度とベクトル・微分積分

今日の授業の目的

前回の授業までは、直線上を運動する物体の位置・速度・加速度を、微分積分を使って正しく理解・計算することを扱ってきた。しかし現実の物体は、直線上だけでなく、**平面上で曲線軌道を描く運動**を（さらに空間内で立体的な曲線軌道を描く運動も）行う。物体が曲線軌道を描く運動を行う場合には、**位置・速度・加速度の全てはベクトル**で表されることが知られている。そこで、今回の授業の目的は、**①平面運動する物体の位置・速度・加速度をベクトルで表し、②それらの微分積分による関係や幾何学的な意味を理解すること**である。

(1) ベクトルの復習:

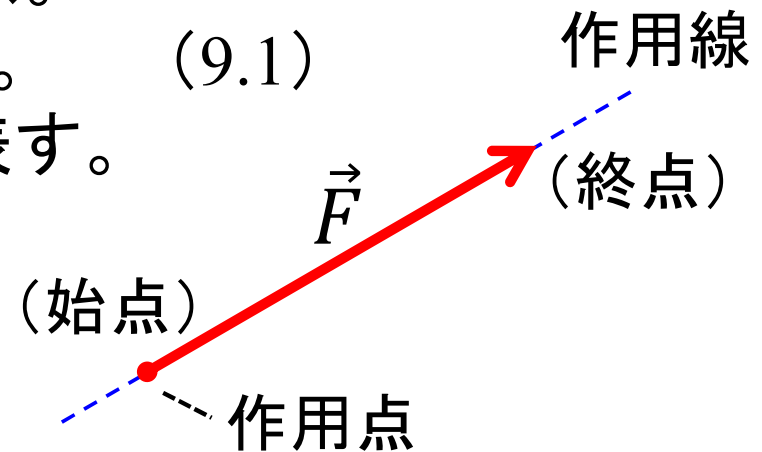
①「向き」と「大きさ(値)」を兼ね備えるものは、数学のベクトルで表される。図には矢印で描き表す。

→ 例: 力のベクトル $\vec{F}$ [N]

→ 今回は物体の位置・速度・加速度もベクトルである。

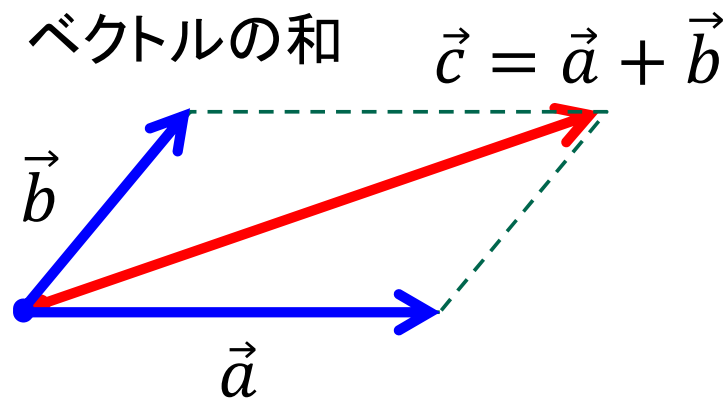
② 力のベクトルの矢印を作図する上での注意点

- (a) 作用点に矢印の始点を置く。
- (b) 力が働く向きに矢印を描く。 (9.1)
- (c) 矢印の長さで力の強さを表す。

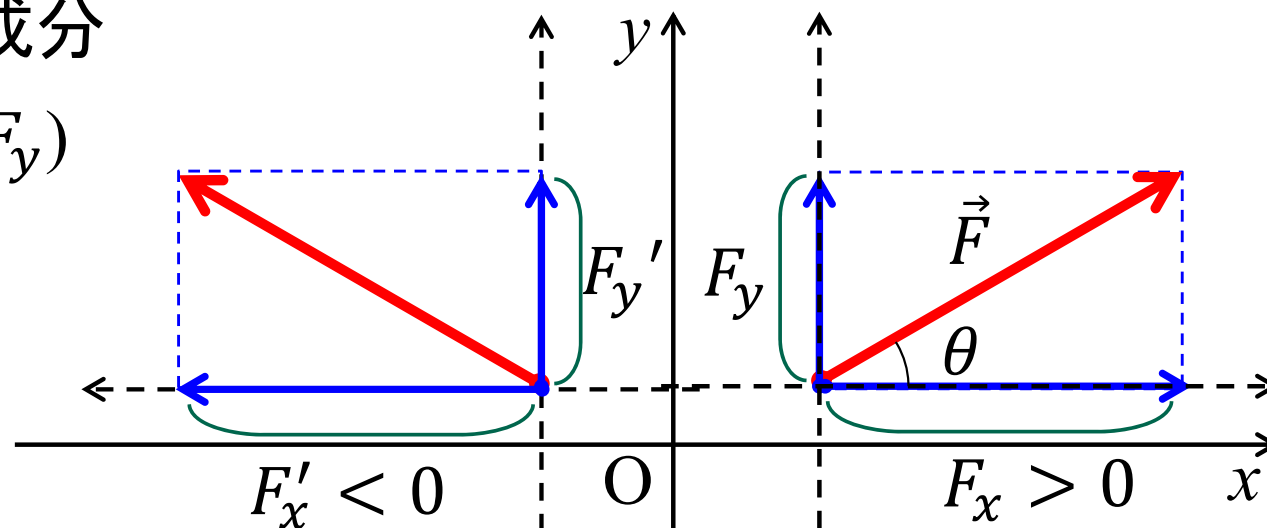


(1) ベクトルの復習:

- ベクトルの合成・分解(あるいは和・差)は、**平行四辺形の法則**に従って考える



- ベクトルの成分
 $\vec{F} = (F_x, F_y)$



確認演習：問題演習1から問題1-6 (1)(2)に取り組む。
(テキスト p.4)

$$\vec{F}_1 = (2.0, 1.0) \text{ [N]}, \quad \vec{F}_2 = (0.0, 1.0) \text{ [N]}, \quad \vec{F}_3 = (-1.0, -3.0) \text{ [N]}$$

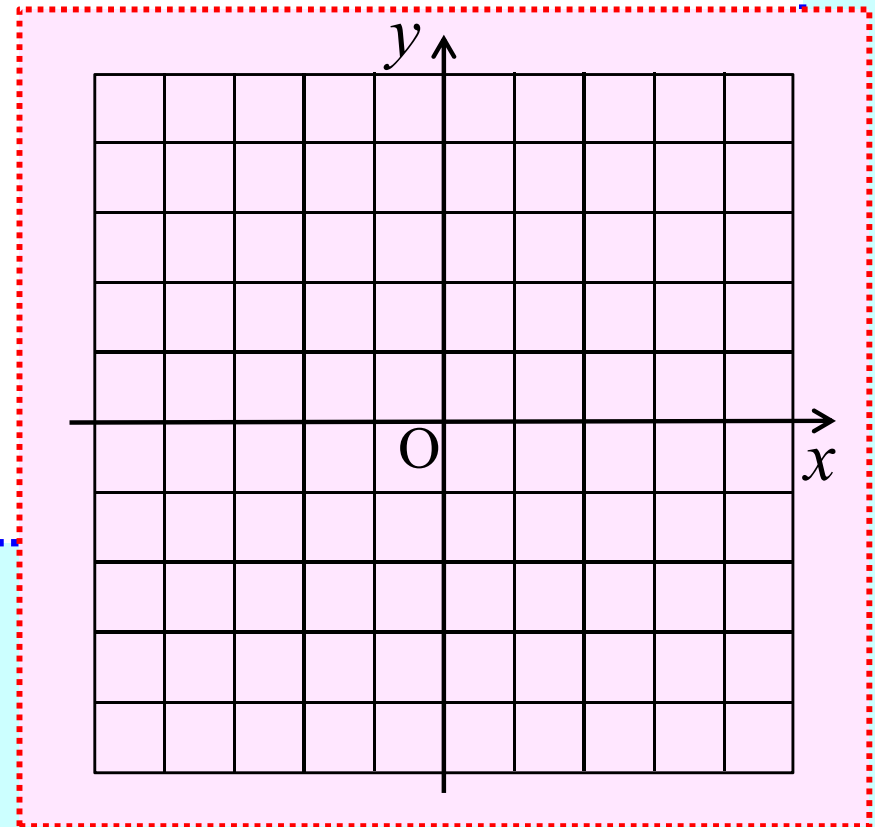
(1) 3つの力を図示せよ。ただし、作用点を座標 $(-3, 2)$ の位置とせよ。

(2) 合力 $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ を
図示せよ。

追加問題：

- 力 $\vec{F}_1$ の作用点の座標を $(2, 3)$
- 力 $\vec{F}_2$ の作用点の座標を $(4, -4)$
- 力 $\vec{F}_3$ の作用点の座標を $(-3, 1)$

4分



(テキスト p.4)

◇ 問題演習1から問題1-6 (1)(2)に取り組む。

$$\vec{F}_1 = (2.0, 1.0) \text{ [N]},$$

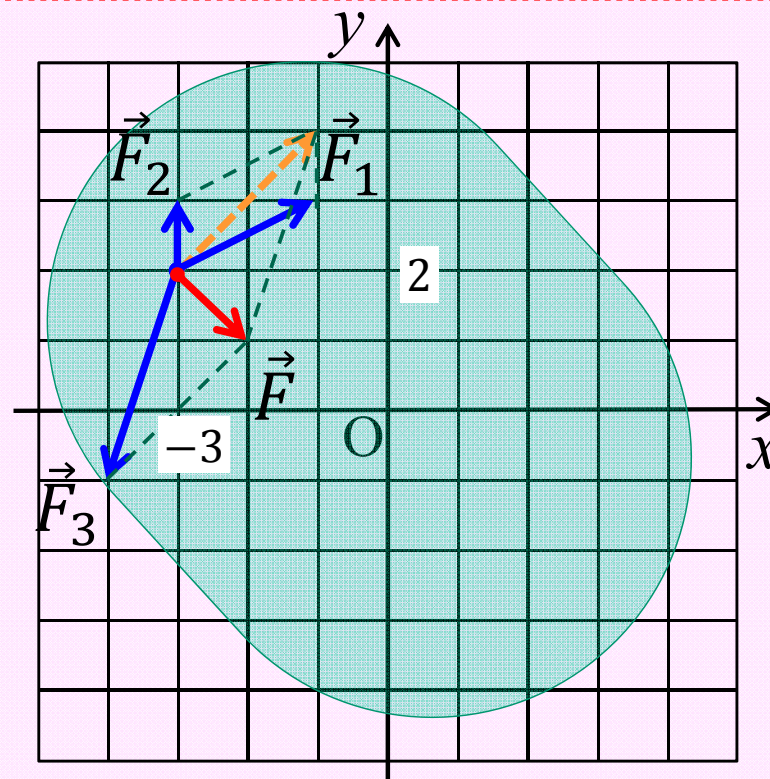
$$\vec{F}_2 = (0.0, 1.0) \text{ [N]},$$

$$\vec{F}_3 = (-1.0, -3.0) \text{ [N]}$$

(1) 3つの力を図示せよ。

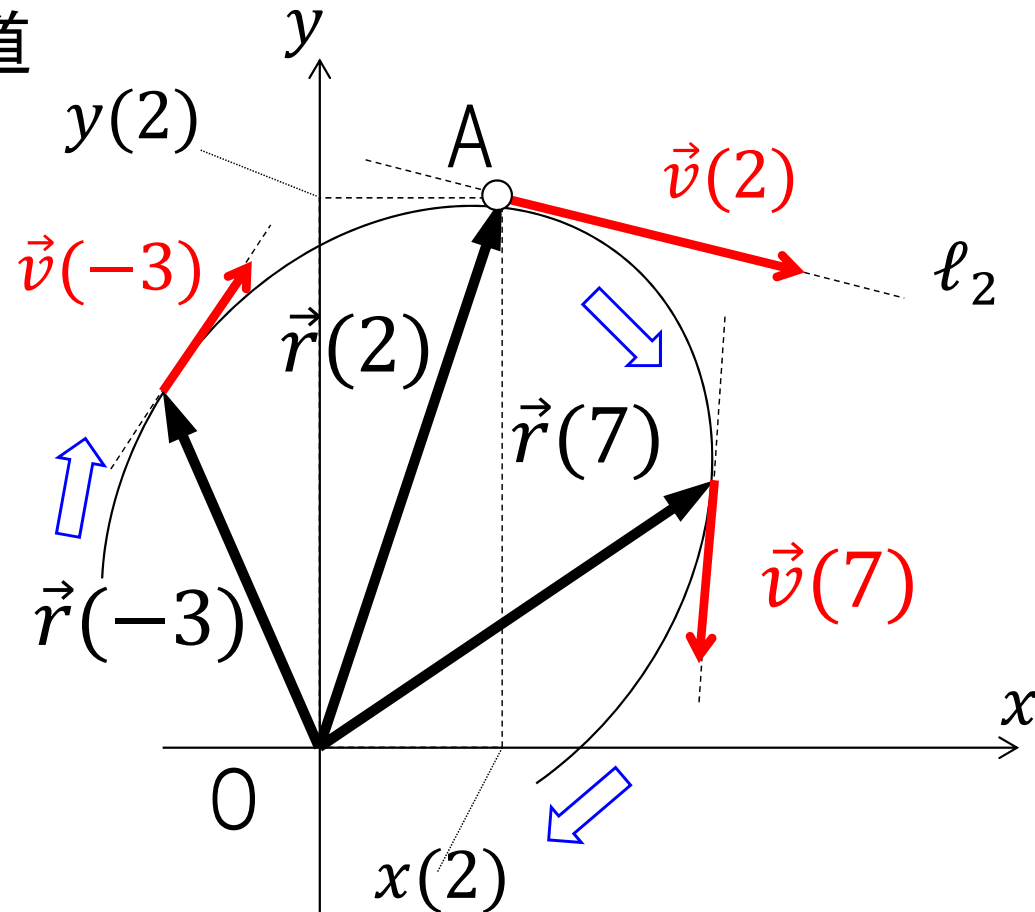
(2) 合力 $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ を図示せよ。

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \\ &= (2, 1)[\text{N}] + (0, 1)[\text{N}] + (-1, -3)[\text{N}] \\ &= (2 + 0 + (-1), 1 + 1 + (-3)) [\text{N}] \\ &= (1, -1)[\text{N}]\end{aligned}$$



(2) 状況設定:

xy 平面上で曲線軌道
を描いて運動する
物体A



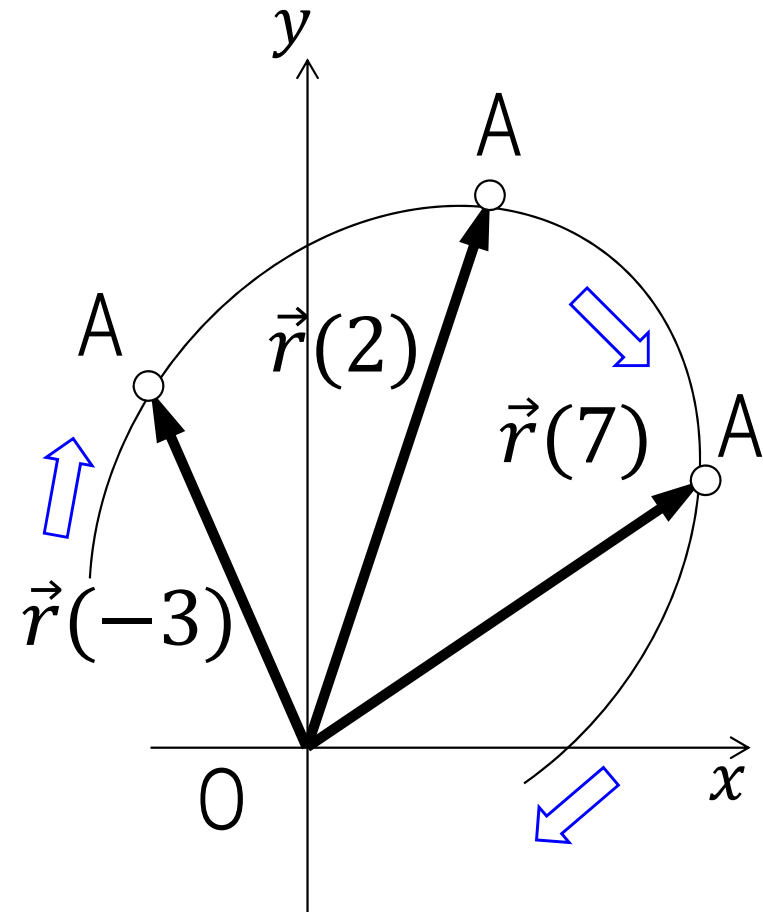
(3) 位置ベクトル

時刻 t における物体Aの
位置ベクトル $\vec{r}(t)$

●位置ベクトル $\vec{r}(t)$ の作図

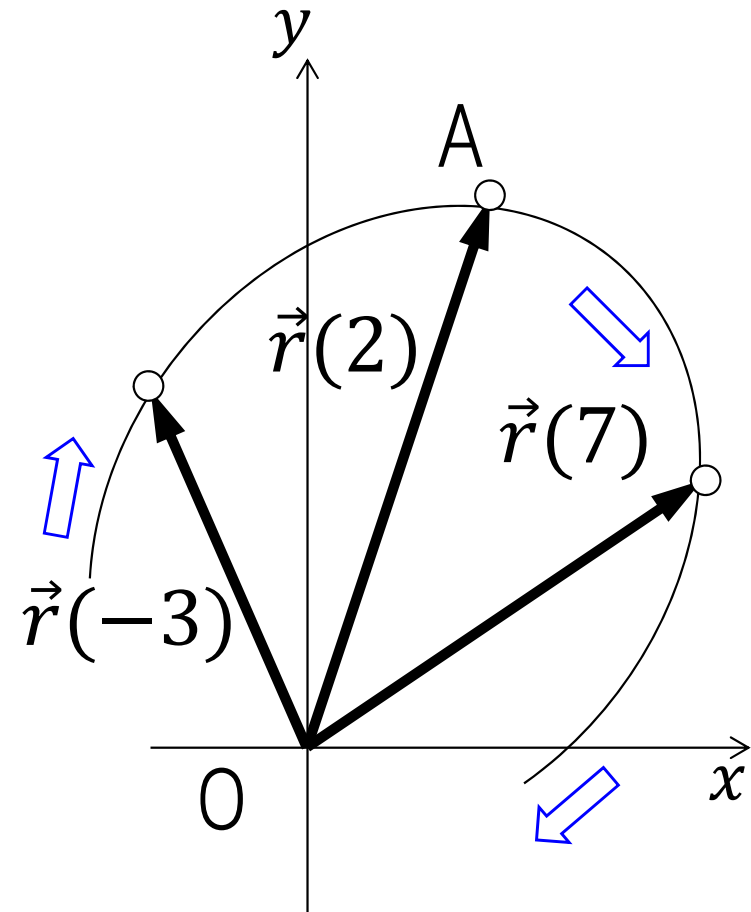
- (a) 原点Oに矢印の始点を置く。
- (b) 原点Oから物体Aの位置に向かう矢印を描く。
- (c) 矢印の長さは原点から物体までの距離を表す。

(9.2の図)



(3) 位置ベクトル

- 位置ベクトル $\vec{r}(t)$ の意味:
位置ベクトル $\vec{r}(t)$ の **終点** は、
時刻 t の **物体 A の位置** を表
す。
位置ベクトル $\vec{r}(t)$ が指し示
す物体の位置を、
「**位置 $\vec{r}(t)$** 」
と呼ぶ。



(3) 位置ベクトル

- 位置ベクトル $\vec{r}(t)$ の成分:
位置ベクトル $\vec{r}(t)$ の矢印の
始点は常に原点にある

$\vec{r}(t)$ の成分:
その矢印の終点の位置の
座標 (物体A の座標)

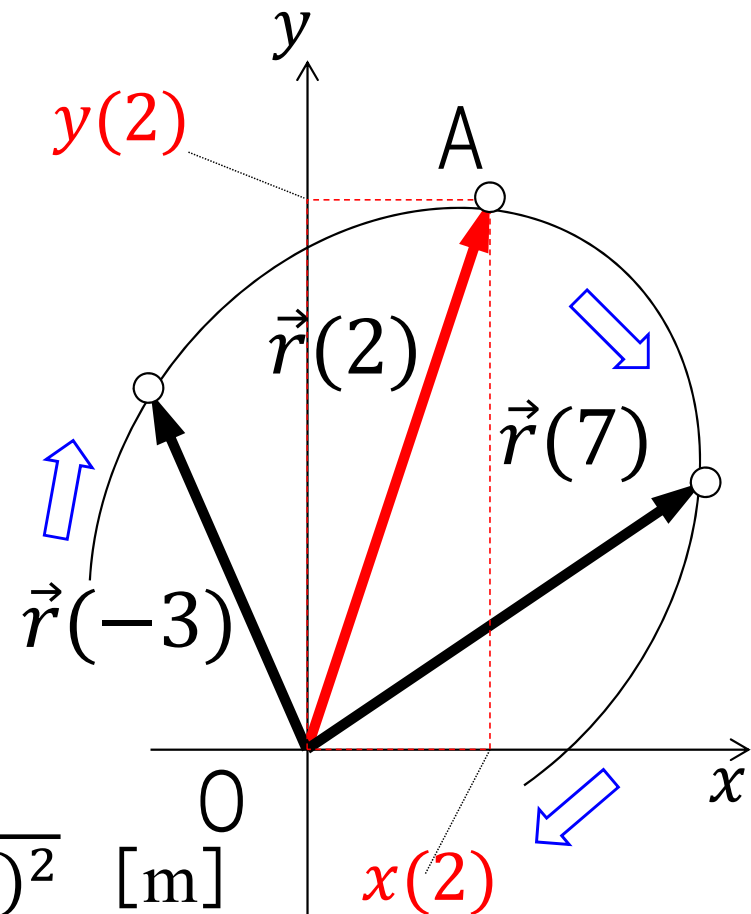
$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) \quad [\text{m}]$$

(9.2の成分)

原点と物体の距離:

$$r(t) = |\vec{r}(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \quad [\text{m}]$$

(9.2の大きさ)



(授業プリント p.2)

◇確認演習1: xy 平面上を運動する物体の位置ベクトルが,
 $\vec{r}(t) = (0.5t, -0.25t^2 + 2t + 1)$ [m]
だとする。この物体の軌道曲線を描け。
また位置ベクトル $\vec{r}(2)$, $\vec{r}(4)$, $\vec{r}(8)$ を求め, 作図せよ。

10分

◇確認演習1 $\vec{r}(t) = (0.5t, -0.25t^2 + 2t + 1)$ [m]

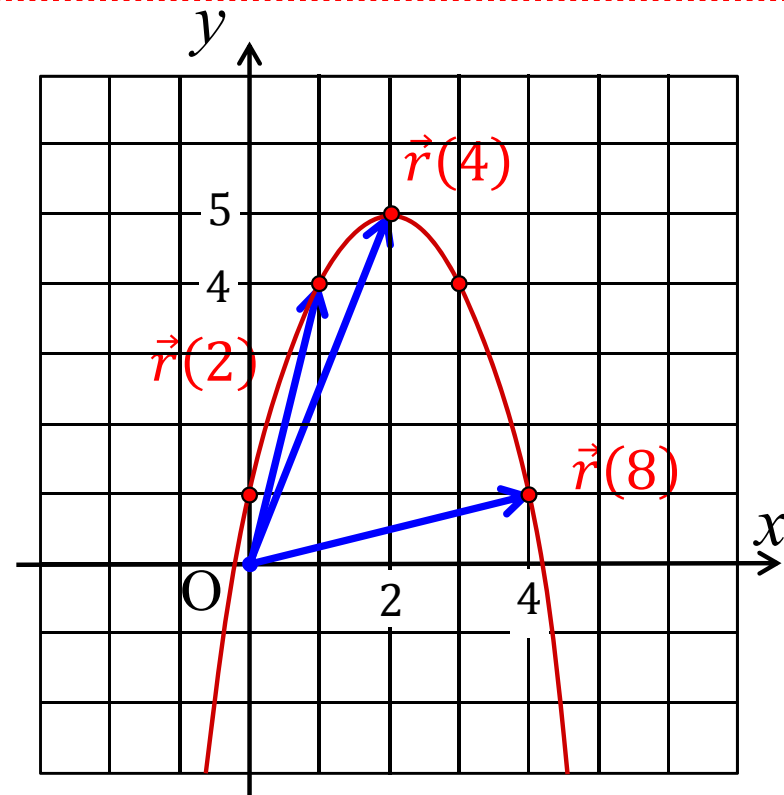
$$\vec{r}(2) = (0.5 \times 2, -0.25 \times 2^2 + 2 \times 2 + 1) = (1, 4) \text{ [m]}$$

$$\vec{r}(4) = (0.5 \times 4, -0.25 \times 4^2 + 2 \times 4 + 1) = (2, 5) \text{ [m]}$$

$$\vec{r}(8) = (0.5 \times 8, -0.25 \times 8^2 + 2 \times 8 + 1) = (4, 1) \text{ [m]}$$

$$\vec{r}(0) = \cdots = (0, 1) \text{ [m]}$$

$$\vec{r}(6) = \cdots = (3, 4) \text{ [m]}$$



(4) 速度ベクトル $\vec{v}(t)$

● 速度 $\vec{v}(t)$ の成分:

速度 $\vec{v}(t)$ は, 位置 $\vec{r}(t)$ の時間 t による微分

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt} \right) && (9.3 \text{ の成分}) \\ &= (v_x(t), v_y(t)) \quad [\text{m/s}]\end{aligned}$$

速度ベクトル $\vec{v}(t)$ の大きさ:

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2} \quad [\text{m/s}]$$

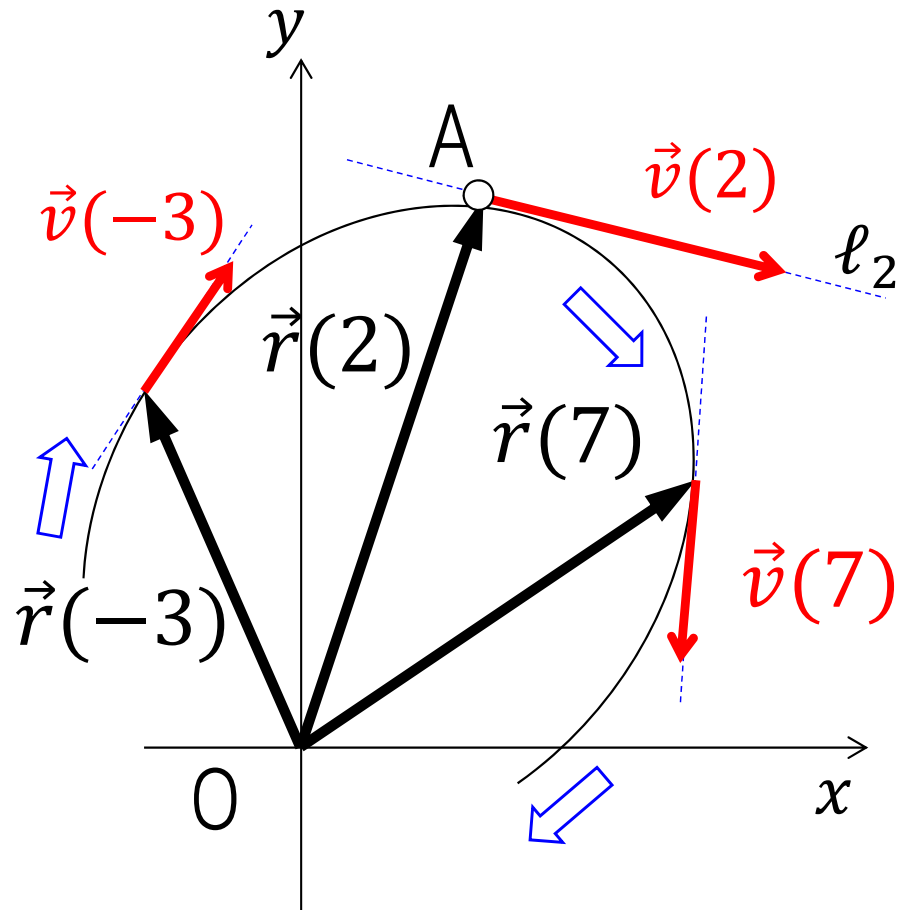
(9.3 の大きさ)

(4) 速度ベクトル $\vec{v}(t)$ の作図:

● 速度ベクトル $\vec{v}(t)$ の矢印を作図する上での注意点

- (a) 物体Aの位置(近く)に矢印の始点を置く。
- (b) 物体Aの位置における、**軌道曲線の接線方向**に矢印を描く
(向きの説明参照)
- (c) 矢印の長さは時刻 t での速さ(◇大きさ)を表す。

(9.3の図)



◇確認演習2: 物体の位置ベクトルが,

$$\vec{r}(t) = (0.5t, -0.25t^2 + 2t + 1)[\text{m}]$$

のとき, この物体の速度 $\vec{v}(t)$ を求めよ。(成分を求める。)

- (a) 速度 $\vec{v}(2)$, $\vec{v}(4)$, $\vec{v}(8)$ を求め, 確認演習1の図に作図せよ。速度の矢印の始点は物体の位置, 1目盛りを **0.5** [m/s]。
- (b) 速度 $\vec{v}(2)$, $\vec{v}(4)$, $\vec{v}(8)$ は, 軌道曲線の接線方向か?
- (c) 速度 $\vec{v}(2)$, $\vec{v}(4)$, $\vec{v}(8)$ [m/s]の「速さ」の大小関係を, 不等号を使って示せ。(描いた速度の矢印の長さを比べる。)

10 分

◇確認演習2 $\vec{r}(t) = (0.5t, -0.25t^2 + 2t + 1)$ [m]

速度 $\vec{v}(t)$

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(\frac{d[0.5t]}{dt}, \frac{d[-0.25t^2 + 2t + 1]}{dt} \right) \\ &= (0.5, -0.25 \times 2t + 2) = (0.5, -0.5t + 2) \quad [\text{m/s}]\end{aligned}$$

成分ごとに計算してもよい。

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d[0.5t]}{dt} = 0.5 \quad [\text{m/s}]$$

$$v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d[-0.25t^2 + 2t + 1]}{dt} = -0.5t + 2 \quad [\text{m/s}]$$

◇確認演習2

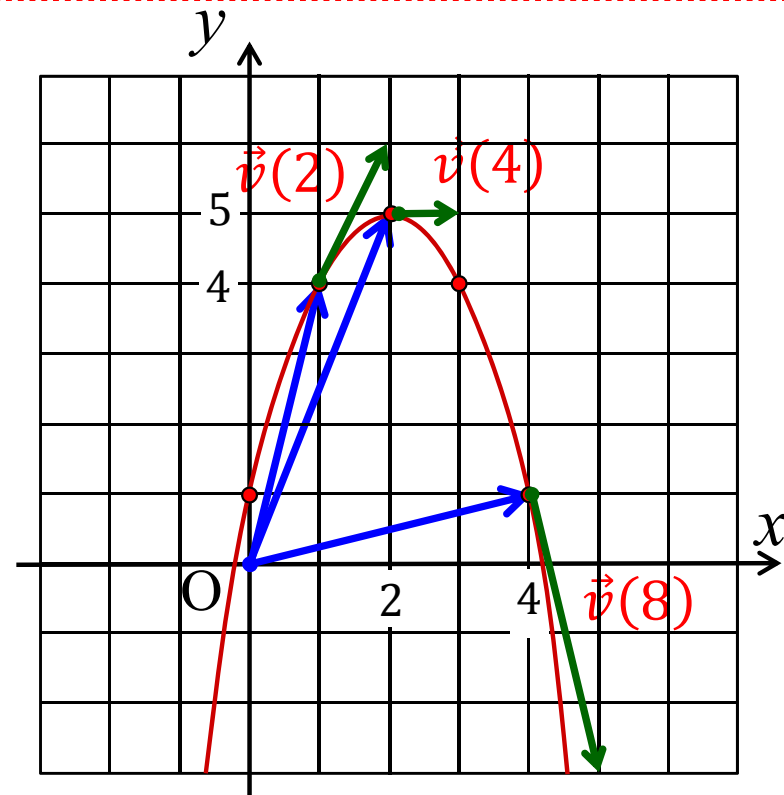
$$\vec{v}(t) = (0.5, -0.5t + 2) \text{ [m/s]}$$

$$\vec{v}(2) = (0.5, -0.5 \times 2 + 2) = (0.5, 1) \text{ [m/s]}$$

$$\vec{v}(4) = (0.5, -0.5 \times 4 + 2) = (0.5, 0) \text{ [m/s]}$$

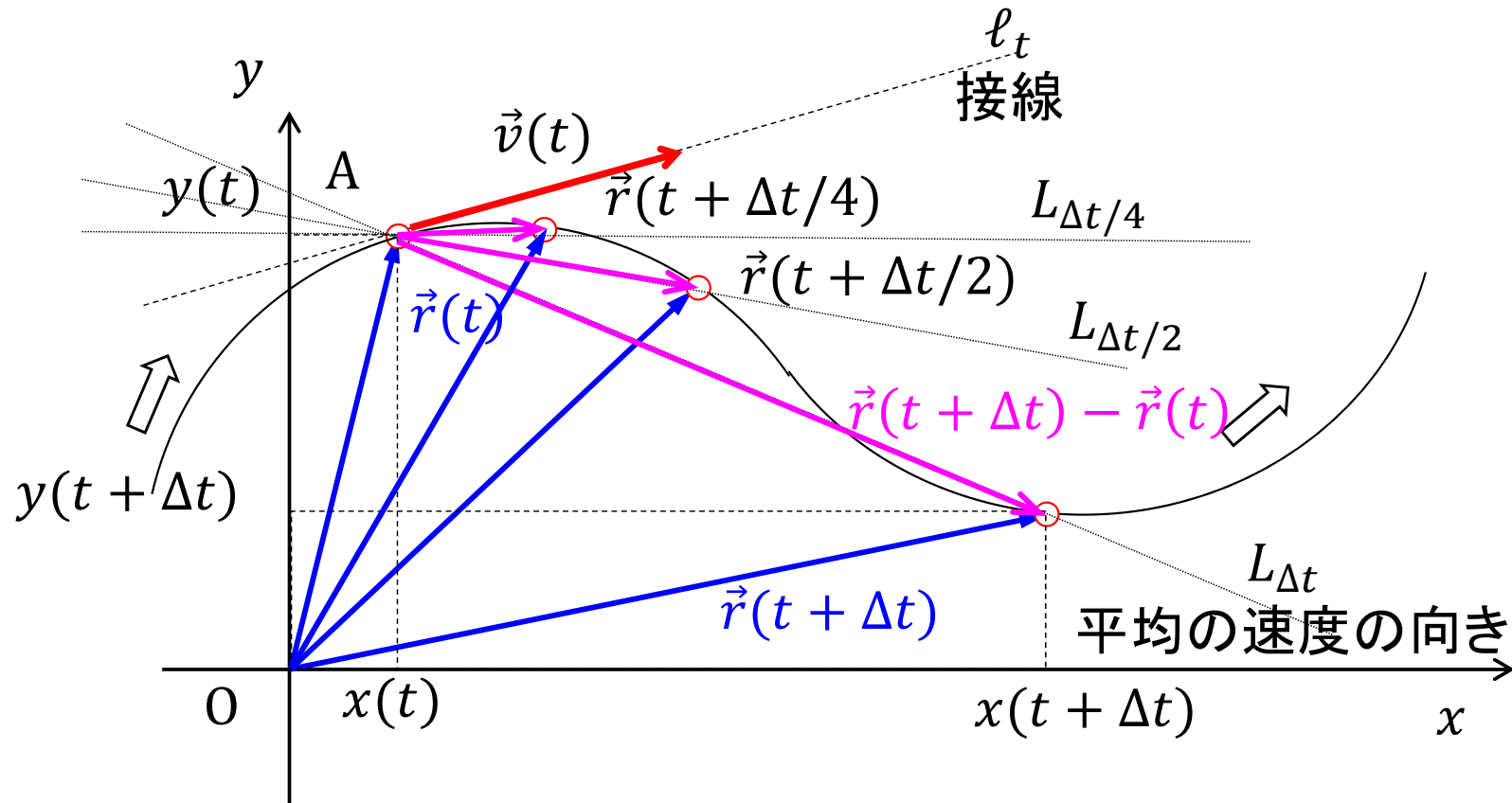
$$\vec{v}(8) = (0.5, -0.5 \times 8 + 2) = (0.5, -2) \text{ [m/s]}$$

$$v(4) < v(2) < v(8)$$



(4) 速度ベクトル $\vec{v}(t)$ の向きの説明:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{平均の速度} \\ \text{定義(＃)} \end{array}$$



(9.4)以下の式は,「ベクトルの微分は,各成分を微分」すればよいことの証明

(5) 加速度ベクトル $\vec{a}(t)$ ● 加速度 $\vec{a}(t)$ の成分:加速度 $\vec{a}(t)$ は, 速度 $\vec{v}(t)$ の時間 t による微分

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \left(\frac{dv_x(t)}{dt}, \frac{dv_y(t)}{dt} \right) \quad (9.5 \text{ の成分})$$

$$= (a_x(t), a_y(t)) \quad [\text{m/s}^2]$$

$$= \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \left(\frac{d^2 x(t)}{dt^2}, \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \right)$$

加速度ベクトル $\vec{a}(t)$ の大きさ:

$$a(t) = |\vec{a}(t)| = \sqrt{a_x(t)^2 + a_y(t)^2} \quad [\text{m/s}^2]$$

(9.5 の大きさ)

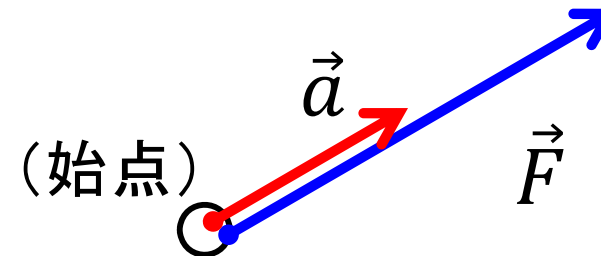
(5) 加速度ベクトル $\vec{a}(t)$ の作図:

● 加速度ベクトル $\vec{a}(t)$ の矢印を作図する上での注意点

(a) 物体Aの位置(近く)に矢印の始点を置く。

(b) 物体Aに働く合力 $\vec{F}$ の向きに矢印を描く (9.5の図)
(次の補足参照)

(c) 矢印の長さは加速度の大きさ(♡大きさ)を表す。



● 加速度 $\vec{a}(t)$ の向きの補足:

加速度 $\vec{a}(t)$ の向きは, 物体に働く合力 $\vec{F}(t)$ と同じ向き

$$m\vec{a}(t) = \vec{F}(t)$$

◇確認演習3: 物体の位置ベクトルが,

$$\vec{r}(t) = (0.5t, -0.25t^2 + 2t + 1)[\text{m}]$$

のとき, この物体の加速度 $\vec{a}(t)$ を求めよ。(成分を求める。)

- (a) 加速度 $\vec{a}(2)$, $\vec{a}(4)$, $\vec{a}(8)$ を求め, 確認演習1, 2の図に作図せよ。加速度の矢印の始点は物体の位置に, 1目盛りを0.5[m/s²]。
- (b) 加速度 $\vec{a}(2)$, $\vec{a}(4)$, $\vec{a}(8)$ の向きから, 各時刻で物体に働く力(合力)の向きを確認せよ。

1分

◇確認演習3

$$\vec{v}(t) = (0.5, -0.5t + 2) \text{ [m/s]}$$

加速度 $\vec{a}(t)$

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \left(\frac{d[0.5]}{dt}, \frac{d[-0.5t + 2]}{dt} \right) \\ &= (0, -0.5) \text{ [m/s}^2\text{]}\end{aligned}$$

成分ごとに計算してもよい。

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d[0.5]}{dt} = 0 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

$$a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = \frac{d[-0.5t + 2]}{dt} = -0.5 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

◇確認演習3

$$\vec{a}(t) = (0, -0.5) \text{ [m/s}^2 \text{]}$$

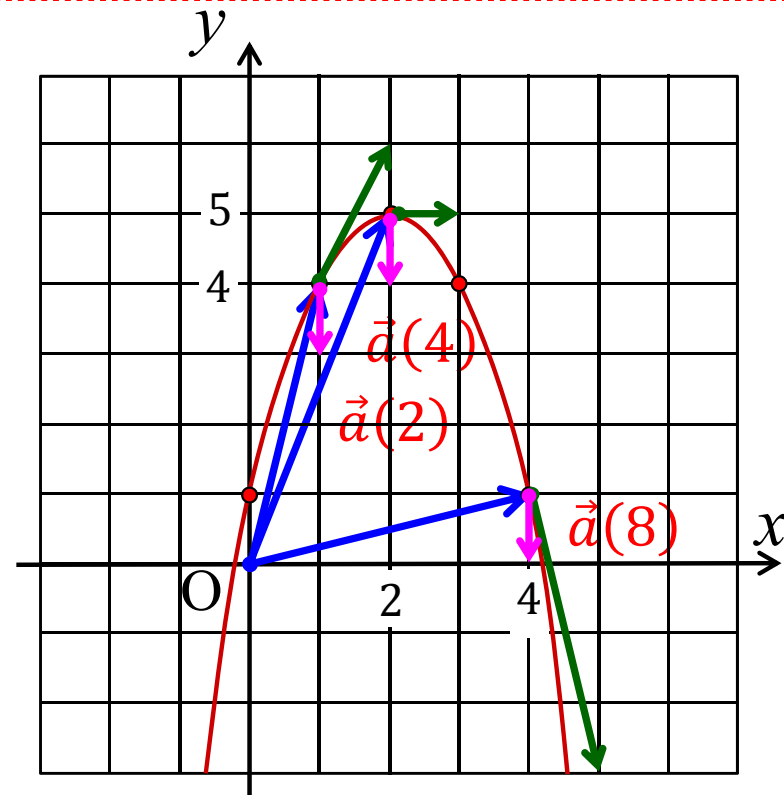
$$\vec{a}(2) = (0, -0.5) \text{ [m/s}^2 \text{]}$$

$$\vec{a}(4) = (0, -0.5) \text{ [m/s}^2 \text{]}$$

$$\vec{a}(8) = (0, -0.5) \text{ [m/s}^2 \text{]}$$

力(合力)の向きは、
加速度 $\vec{a}$ の向きと同じ
⇒力は常に y 軸の負の向き

力の向きは、運動の向きと
直接関係ないことを、
肝に銘じよ。



(7) 位置・速度・加速度の関係

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)dt = \left(\int a_x(t)dt, \int a_y(t)dt \right) \quad (9.6)$$

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)dt = \left(\int v_x(t)dt, \int v_y(t)dt \right)$$

「ベクトルの積分は、各成分を積分」すればよい。

第9回授業 レポート課題

今回はテキストに載っていない問題である。第9回の授業プリントに加えて、第6回の授業プリントおよびレポート問題(問題4-7など)の答案例も参考にして取り組むとよい。

問 xy 平面上を運動する物体Aの位置ベクトルが、 $\vec{r}(t) = (2t - 1, t^2 - 3)[\text{m}]$ だとする。

- (1)(a) 物体Aの軌道曲線を時刻 $-1[\text{s}] \sim 3[\text{s}]$ の範囲で描け。また位置ベクトル $\vec{r}(-1)$, $\vec{r}(0)$, $\vec{r}(1)$, $\vec{r}(2)$, $\vec{r}(3)$ を求め、作図せよ(矢印だけでなく記号も)。
(b) 時刻 $t = 3[\text{s}]$ のときの、原点Oと物体Aの距離を求めよ。
- (2)(a) 物体Aの速度 $\vec{v}(t)$ を求めよ。(ベクトルを求めるとは、その成分を求めることである。)
(b) 速度 $\vec{v}(0)$, $\vec{v}(1)$, $\vec{v}(2)$ を求め、(1)(a)で描いた図に加えて作図せよ(矢印だけでなく記号も)。速度の矢印の始点は各時刻の物体の位置に置き、1目盛りを $1[\text{m/s}]$ とする。
(c) 時刻 $t = 2[\text{s}]$ のときの、物体の速さ $v(2)$ を求めよ。
- (3)(a) 物体Aの加速度 $\vec{a}(t)$ を求めよ。(ベクトルを求めるとは、その成分を求めることである。)
(b) 加速度 $\vec{a}(0)$, $\vec{a}(1)$, $\vec{a}(2)$ を求め、(1)(a)で描いた図に加えて作図せよ(矢印だけでなく記号も)。速度の矢印の始点は各時刻の物体の位置に置き、1目盛りを $1[\text{m/s}^2]$ とする
(c) 時刻 $t = 1[\text{s}]$ のときの、物体の加速度の大きさ $a(1)$ を求めよ。

提出×切: 答案用紙を、次週の水曜日(13:00)までに提出

提出場所: D0308(原科)研究室前のレポート提出用の木箱

注意事項: 自分の答案をノートに記入するか、コピーをとって、次の授業に持ってくる。

- ・レポート解答用紙

- ・次回の授業プリント

（これに今週のレポート課題も記してある。）

を必ず持って帰ること