

授業予定(変更されたシラバス)

- ①力の合成・分解の実験的理解
- ②ベクトルの基礎事項と力
- ③基本的な力:有効重力, バネの力, 摩擦力 (小)
- ④力の合成・分解, 力のつり合い (小)
- ⑤ベクトルと力の総合演習 (小)
- ⑥微分の基礎事項と速度・加速度の定義
- ⑦積分の基礎事項と位置・速度・加速度の関係 (小)
- ⑧微分積分と位置・速度・加速度の総合演習 (+確認試験1)
- ⑨平面運動の位置・速度・加速度とベクトル・微分積分
- ⑩力学の3つの基本法則1 : 導入 (小)
- ⑪力学の3つの基本法則2 : 問題演習 (小)
- ⑫放物運動1 : 運動方程式を解く (小)
- ⑬放物運動2 : 問題演習1 (小)
- ⑭(確認試験2+)問題演習2
- ⑮まとめ
- ⑯期末試験

力学1 ≪ 学習到達目標 ≫

- 1) 力の合成・分解をベクトルを使って説明できる。
- 2) 基本的な力の法則(重力, ばねの力, 摩擦力)の法則を説明できる。
- 3) 速度, 加速度の定義を説明できる。
- 4) 力学の3つの基本法則を説明できる。
- 5) 放物運動の運動方程式を解き, その運動を説明できる。

第8回目 微分積分と位置・速度・加速度の総合演習

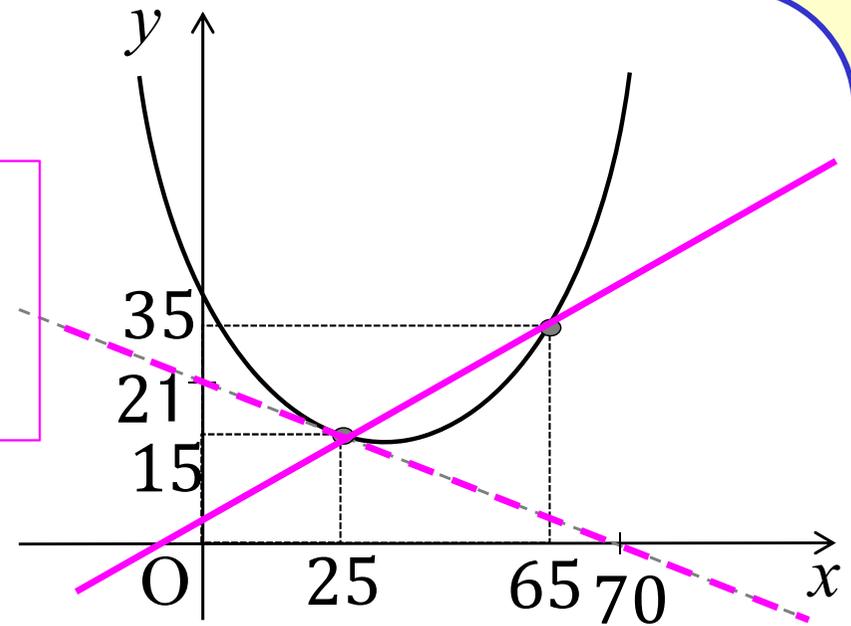
今日の授業の目的

前回までの授業で、物体の位置・速度・加速度が微分積分によってお互いに関係付くことを理解し、同時に微分積分の基礎事項も理解した。そこで、今回の授業の目的は、これまでの授業内容を定着させるための問題演習である。

(0) 微分とは(確認)

$f(25) = 15$, $f(65) = 35$ である。
 $x = 25$ と $x = 65$ の区間の平均変化率 $\Delta y / \Delta x$ を求めよ。

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(65) - f(25)}{65 - 25} \\ &= \frac{35 - 15}{65 - 25} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$



破線の直線は $x = 25$ で
グラフに接している。

$x = 25$ における微分係数 $f'(25)$ を求めよ。

接線の傾きを求めればよい

$$f'(25) = \frac{0 - 21}{70 - 0} = \frac{-21}{70} = -\frac{3}{10}$$

(テキスト p.78)

◇ べき関数の微分と不定積分の公式

べき関数の微分

$$(at^b)' = \frac{d[at^b]}{dt} = abt^{b-1} \quad (\#)$$

べき関数の積分(不定積分)

$$\int at^p dt = \frac{a}{p+1} t^{p+1} + C \quad (\heartsuit)$$

(C は積分定数または任意定数)

積分定数 C は、数学では省略することがあるが、
理工学では省略しないで書く！

(テキスト p.17)

◇ 位置・速度・加速度の関係

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \text{ [m/s]} \longleftrightarrow x(t) = \int v(t)dt \text{ [m]} \quad (\text{b})$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \text{ [m/s}^2\text{]} \longleftrightarrow v(t) = \int a(t)dt \text{ [m/s]}$$

(テキスト p.19)

[1] 問題演習4 の問題4-4, 4-5 に取り組む。

問題4-4 速度18.0 [m/s]で運動 0 [s]から一定の加速度の
大きさ1.2 [m/s²]で減速

(1) 停止するまでの時間は？ (2) 7.0 [s]後の速度は？

問題4-5 等加速度運動する物体 加速度は？

(1) はじめ右向き 3.0 [m/s], 6.0 [s]後に右向き 15.0 [m/s]

(2) はじめ右向き 5.0 [m/s], 4.0 [s]後に左向き 7.0 [m/s]

右向きを正の向きとして
符号も考えよ。

通分

[1] 演習1: 問題4-4

問題4-4 速度18.0 [m/s]で運動 0 [s]から一定の加速度の
大きさ1.2 [m/s²]で減速 $a = -1.2$ [m/s²]

$$(1) a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow -1.2 \text{ [m/s}^2\text{]} = \frac{(0 - 18.0) \text{ [m/s]}}{\Delta t}$$

$$\rightarrow \Delta t = \frac{-18.0 \text{ [m/s]}}{-1.2 \text{ [m/s}^2\text{]}} = 15 \text{ [s]}$$

$$(2) -1.2 \text{ [m/s}^2\text{]} = \frac{\{v(7.0) - 18.0\} \text{ [m/s]}}{7.0 \text{ [s]}}$$

$$\rightarrow v(7.0) = 18.0 \text{ [m/s]} + (-1.2 \text{ [m/s}^2\text{]}) \times 7.0 \text{ [s]} \\ = 9.6 \text{ [m/s]}$$

$$\Delta v = a \cdot \Delta t$$

$$v_2 = v_1 + a \cdot \Delta t$$

[1] 演習1: 問題4-5

問題4-5 等加速度運動する物体 加速度は？

(1) はじめ右向き 3.0 [m/s] , 6.0 [s]後に右向き 15.0 [m/s]

$$v(0) = 3.0[\text{m/s}], v(6.0) = 15.0[\text{m/s}]$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(15.0 - 3.0) [\text{m/s}]}{6.0 [\text{s}]} = \frac{12.0 [\text{m/s}]}{6.0 [\text{s}]} = 2.0[\text{m/s}^2]$$

(2) はじめ右向き 5.0 [m/s] , 4.0 [s]後に左向き 7.0 [m/s]

$$v(0) = 5.0[\text{m/s}], v(4.0) = -7.0[\text{m/s}]$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\{(-7.0) - 5.0\} [\text{m/s}]}{4.0 [\text{s}]} = \frac{-12.0 [\text{m/s}]}{4.0 [\text{s}]} \\ &= -3.0[\text{m/s}^2] \end{aligned}$$

(テキスト p.19)

[2] 問題演習4 の問題4-3 (2)(4) を関数を変えて取り組む。

微分により加速度 $a(t)$ を, 不定積分により位置 $x(t)$ を求める。

(2)改 $v(t) = -t^3$ [m/s]

(4)改 $v(t) = -t^4 + 5t^2 - 3$ [m/s]

積分

[2] 演習2: 問題4-3 (2)(4)を関数を変えて取り組む。

$$(2)\text{改} \quad a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d[-t^3]}{dt} = -3t^2 [\text{m/s}^2]$$

$$x(t) = \int v(t)dt = \int (-t^3) dt = \frac{3}{4}t^4 + C [\text{m}]$$

$$(4)\text{改} \quad a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d[-t^4 + 5t^2 - 3]}{dt}$$
$$= -4t^3 + 5t [\text{m/s}^2]$$

$$x(t) = \int v(t)dt = \int (-t^4 + 5t^2 - 3)dt$$
$$= -\frac{1}{5}t^5 + 5 \times \frac{1}{2}t^2 - 3 \times \frac{1}{1}t^1 + C$$
$$= -\frac{1}{5}t^5 + \frac{5}{2}t^2 - 3t + C [\text{m}]$$

◇ 初期条件

$$v(t) = \int a(t)dt = f(t) + C$$

(C, C' は積分定数)

$$x(t) = \int v(t)dt = g(t) + C'$$

不定積分で得られた速度 $v(t)$ や位置 $x(t)$ の積分定数 C, C' を決めるための条件は、ある時刻(例えば時刻 $t = 0$ [s])における速度と位置の値($v(0)$ と $x(0)$ の値)である。

初期条件: $v(0) = \blacktriangle\blacktriangle$ [m/s], $x(0) = \triangle\triangle$ [m]

→ $f(0) + C = \blacktriangle\blacktriangle$ から C が決まる。

ただし、「初期」といっても、必ずしも時刻 $t = 0$ [s] でなくても良く、どんな時刻における速度と位置の値でも良い。

(テキスト p.20)

[3] 問題演習4 の問題4-10 に取り組む。

初期条件は, $v(0) = 0$ [m/s] と $x(0) = 0$ [m]

(1) $a(t) = 2t^2$ [m/s²] $v(t)$ は?

(2) $v(t) = t^3 + t$ [m/s] $x(t)$ は?

(3) $a(t) = 2$ [m/s²] $x(t)$ は?

時間の関係
で省略

題分

[2] 演習2: 問題4-10

$$(1) v(t) = \int a(t)dt = \int 2t^2 dt = 2 \times \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{2}{3}t^3 + C \text{ [m/s]}$$

この式に $t = 0$ を代入すると, $v(0) = \frac{2}{3} \times 0^3 + C = C$

初期条件 $v(0) = 0$ [m/s] より, $C = 0 \quad \therefore v(t) = \frac{2}{3}t^3$ [m/s]

$$(2) x(t) = \int v(t)dt = \int (t^3 + t) dt = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + C \text{ [m]}$$

この式に $t = 0$ を代入すると, $x(0) = \frac{1}{4} \times 0^4 + \frac{1}{2} \times 0^2 + C = C$

初期条件 $x(0) = 0$ [m] より, $C = 0 \quad \therefore x(t) = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2$ [m]

[2] 演習2: 問題4-10

$$(3) v(t) = \int a(t)dt = \int 2 dt = 2t + C \text{ [m/s]}$$

この式に $t = 0$ を代入すると, $v(0) = 2 \times 0 + C = C$

初期条件 $v(0) = 0 \text{ [m/s]}$ より, $C = 0 \quad \therefore v(t) = 2t \text{ [m/s]}$

$$x(t) = \int v(t)dt = \int 2t dt = 2 \times \frac{1}{2}t^2 + C' = t^2 + C' \text{ [m]}$$

この式に $t = 0$ を代入すると, $x(0) = 0^2 + C' = C'$

初期条件 $x(0) = 0 \text{ [m]}$ より, $C' = 0$

$$\therefore x(t) = t^2 \text{ [m]}$$

(テキスト p.20)

[4] 問題演習4 の問題4-10(追加)に取り組む。

初期条件は, $v(0) = 7[\text{m/s}]$ と $x(0) = -8[\text{m}]$

(1) $a(t) = 2t^2 [\text{m/s}^2]$ $v(t)$ は?

(2) $v(t) = t^3 + t [\text{m/s}]$ $x(t)$ は?

(3) $a(t) = 2 [\text{m/s}^2]$ $x(t)$ は?

~~4~~ 分

[2] 演習2: 問題4-10

$$(1) v(t) = \int a(t)dt = \int 2t^2 dt = \frac{2}{3}t^3 + C \text{ [m/s]}$$

この式に $t = 0$ を代入すると, $v(0) = \frac{2}{3} \times 0^3 + C = C$

初期条件 $v(0) = 7 \text{ [m/s]}$ より, $C = 7 \therefore v(t) = \frac{2}{3}t^3 + 7 \text{ [m/s]}$

$$(2) x(t) = \int v(t)dt = \int (t^3 + t) dt = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + C' \text{ [m]}$$

この式に $t = 0$ を代入すると, $x(0) = \frac{1}{4} \times 0^4 + \frac{1}{2} \times 0^2 + C = C'$

初期条件 $x(0) = -8 \text{ [m]}$ より, $C' = -8$

$$\therefore x(t) = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2 - 8 \text{ [m]}$$

[2] 演習2: 問題4-10

$$(3) v(t) = \int a(t)dt = \int 2 dt = 2t + C \text{ [m/s]}$$

この式に $t = 0$ を代入すると, $v(0) = 2 \times 0 + C = C$

初期条件 $v(0) = 7$ [m/s] より, $C = 7 \quad \therefore v(t) = 2t + 7$ [m/s]

$$x(t) = \int v(t)dt = \int (2t + 7) dt = 2 \times \frac{1}{2}t^2 + 7t + C'$$

$$= t^2 + 7t + C' \text{ [m]}$$

この式に $t = 0$ を代入すると, $x(0) = 0^2 + 7 \times 0 + C' = C'$

初期条件 $x(0) = -8$ [m] より, $C' = -8$

$$\therefore x(t) = t^2 + 7t - 8 \text{ [m]}$$

第8回授業 レポート課題

- テキスト第4章の問題演習4から、問題4-2に追加する。(5) $v(t) = -2t^3$
(6) $v(t) = -5t^2 + 7$, それぞれの加速度 $a(t)$ と位置 $x(t)$ を求めよ。
- テキスト第4章の問題演習4から、問題4-10(3)を次のように変更して解け。
変更:問題文「…ただし、時刻 $t = 0$ [s] での速度を $v(0) = 14.7$ [m/s],
位置を $x(0) = -19.6$ [m] とする。」(3)ある物体の加速度が $a(t) = -9.8$
[m/s²]で表されているとき、この物体の速度 $v(t)$ と位置 $x(t)$ を求めよ。
- テキスト第4章の問題演習4から、問題4-11を次のように変更して解け。
変更:初期条件 $t = 0$ [s]における速度 $v(0) = \dots$ [m/s], 位置 $x(0) = \dots$ [m]
は、テキストの問題文と異なる値に変更する(自分で決める)。解答を作成
する際、問い(2), (3)は、初めに任意の時刻の速度 $v(t)$ や位置 $x(t)$ を求
めること。

注意:テキストの解答は略解であり、答案として必要な部分が省略されている場合がある。計算式だけでなく、説明文や適切な図を加えて、答案を作成することを心がけよ。答案作成力も見る。

提出×切:答案用紙を、次週の月曜日(17:00)までに提出

提出場所:D0308(原科)研究室前のレポート提出用の木箱

注意事項:自分の答案をノートに記入するか、コピーをとって、次の授業に持ってくる。

・前回のレポート課題（解答練習）

を提出し、

・レポート解答用紙

・次回の授業プリント

（これに今週のレポート課題も記してある。）

を必ず持って帰ること