

授業予定(変更されたシラバス)

- ①力の合成・分解の実験的理解
- ②ベクトルの基礎事項と力
- ③基本的な力:有効重力, バネの力, 摩擦力 (小)
- ④力の合成・分解, 力のつり合い (小)
- ⑤ベクトルと力の総合演習 (小)
- ⑥微分の基礎事項と速度・
加速度の定義
- ⑦積分の基礎事項と位置・速度・
加速度の関係 (小)
- ⑧微分積分と位置・速度・加速度
の総合演習 (+確認試験1)
- ⑨平面運動の位置・速度・加速度
とベクトル・微分積分
- ⑩力学の3つの基本法則1
:導入 (小)
- ⑪力学の3つの基本法則2
:問題演習 (小)
- ⑫放物運動1
:運動方程式を解く (小)
- ⑬放物運動2:問題演習1 (小)
- ⑭力学の3つの基本法則・放物運動
の総合演習 (+確認試験2)
- ⑮まとめ
- ⑯期末試験

力学1 ≪ 学習到達目標 ≫

- 1) 力の合成・分解をベクトルを使って説明できる。
- 2) 基本的な力の法則(重力, ばねの力, 摩擦力)の法則を説明できる。
- 3) 速度, 加速度の定義を説明できる。
- 4) 力学の3つの基本法則を説明できる。
- 5) 放物運動の運動方程式を解き, その運動を説明できる。

第6回目 微分の基礎事項と速度・加速度の定義

今日の授業の目的

ニュートンが17世紀に確立した「力学」という理論体系の基礎を身に付けることを目指す。「力学」の目的は次のように言える。

「力学」の目的: 物体がどんな条件でどんな運動をするか知ること
物体の運動を知る上で最も重要な知識(法則)は, 第5, 6章で扱う運動方程式である。運動方程式には既に扱ってきた「力」と, 今回扱う「加速度」が登場する。この加速度を正しく理解・計算するためには, 数学の「微分積分」が必要である。そこで, 今回の授業の目的は, ①微分の基礎事項を身に付けること, ②微分を使った速度・加速度の定義を身に付けることである。

(1)関数 (テキスト第17, 20章)

量と量の関係

⇒ 関数 $y = f(x)$

1次関数 直線のグラフ

変化率:

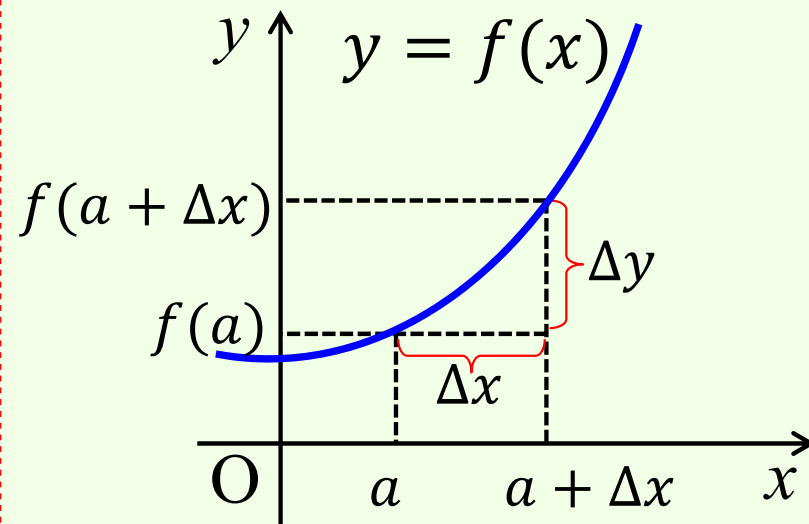
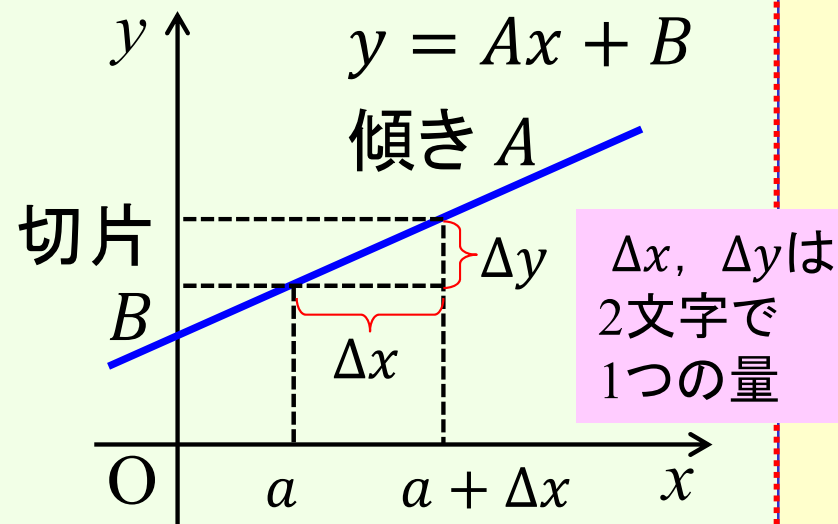
横軸の量が変わったときの、
縦軸の量の変化の激しさ

$$\Rightarrow \text{傾き } A = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

一般の関数 曲線のグラフ

$$\text{平均変化率: } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(テキスト p.74, p.83)



(2) 微分係数 (テキスト第20章)

一般の関数 曲線のグラフ

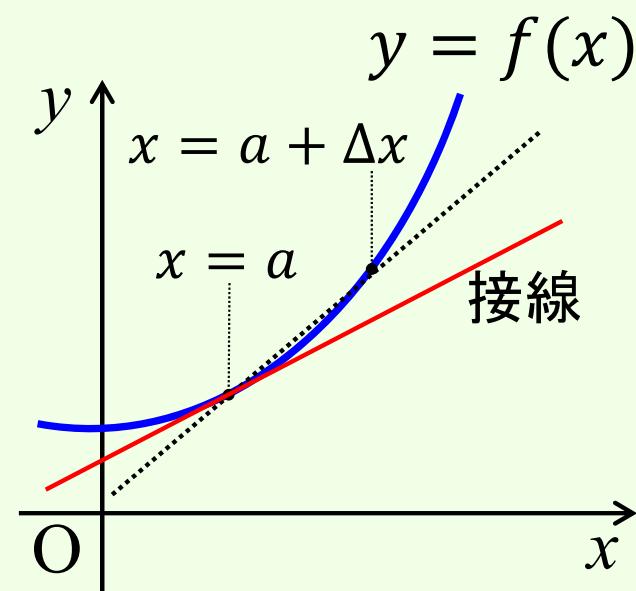
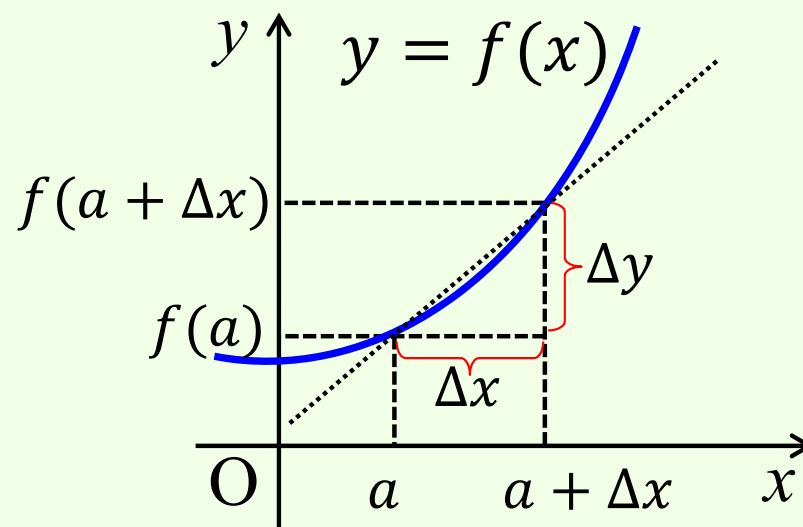
平均変化率: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

微分係数(変化率):

曲線のグラフ $y = f(x)$ の
 $x = a$ の点での変化の激しさ

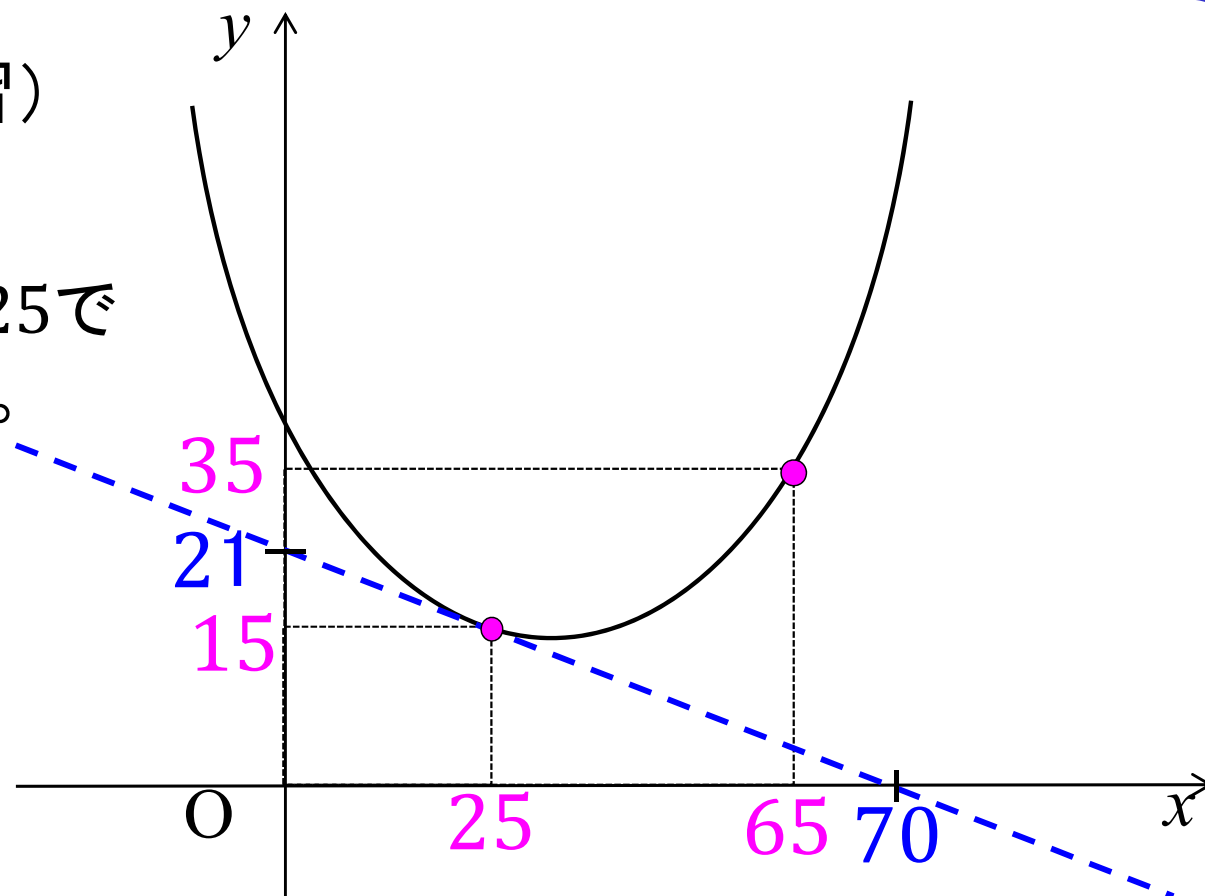
$\Rightarrow$ 接線の傾き $f'(a)$

(テキスト p.83)



(2) 微分係数 (練習)

破線の直線は $x = 25$ で
グラフに接している。



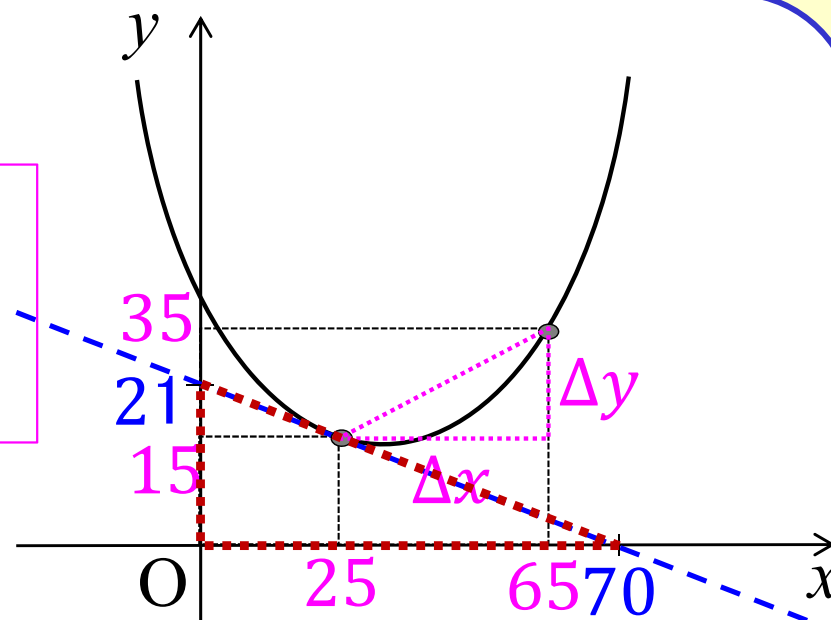
$f(25) = 15$, $f(65) = 35$ である。
 $x = 25$ と $x = 65$ の区間の平均変化率 $\Delta y / \Delta x$ を求めよ。

$x = 25$ における微分係数 $f'(25)$ を求めよ。

(2) 微分係数 (練習)

$f(25) = 15$, $f(65) = 35$ である。
 $x = 25$ と $x = 65$ の区間の平均変化率 $\Delta y / \Delta x$ を求めよ。

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(65) - f(25)}{65 - 25} \\ &= \frac{35 - 15}{65 - 25} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$



破線の直線は $x = 25$ で
グラフに接している。

$x = 25$ における微分係数 $f'(25)$ を求めよ。

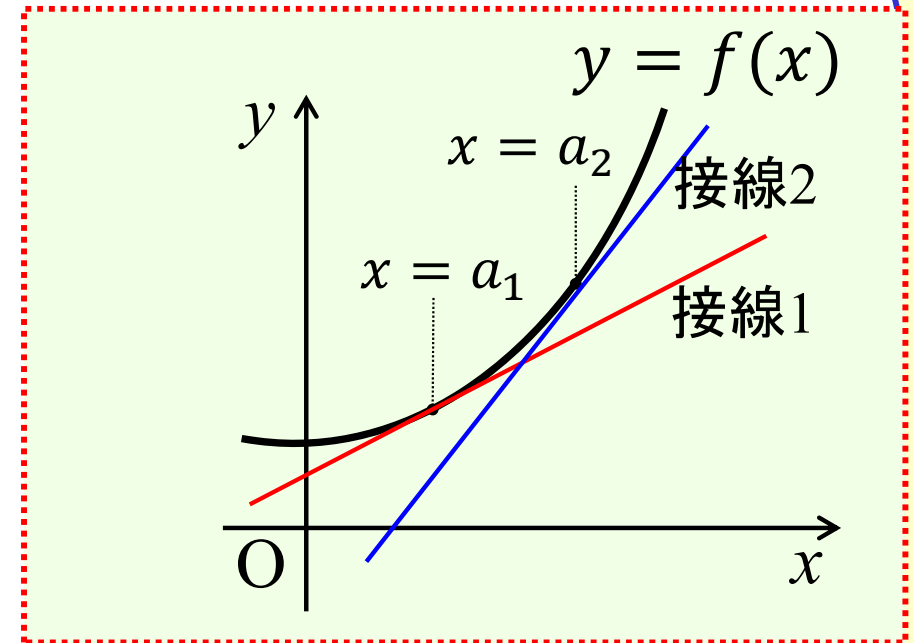
接線の傾きを求めればよい $(0, 21) \Rightarrow (70, 0)$

$$f'(25) = \frac{0 - 21}{70 - 0} = \frac{-21}{70} = -\frac{3}{10}$$

(テキスト p.83)

(3) 導関数 (テキスト第20章)

関数 $y = f(x)$ のグラフの、
接線の傾きは、グラフ上の
点ごとに異なる。



$y = f(x)$ のグラフ上の各点 x に対して
接線の傾きを対応させる関数

導関数: $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d}{dx} f(x)$

導関数を求めること・・・微分する

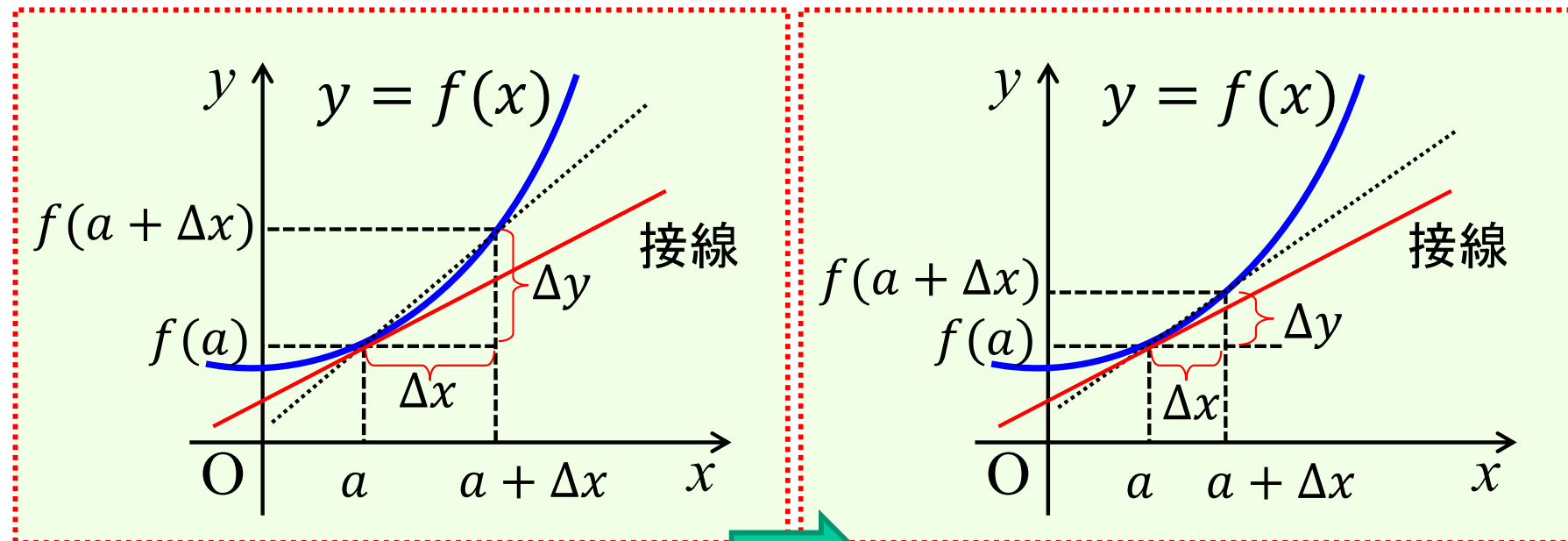
注意: この授業では $f'(x)$ はやむを得ない場合以外使わない。

(テキスト p.83)

(3) 導関数 (テキスト第20章)

関数 $y = f(x)$ の微分 (導関数) の定義:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (6.1)$$



Δx を小さくする ($\Delta x \rightarrow 0$)

注意1(関数への代入):

例えば $f(x) = 3x^3 - 2x + 7$ のとき,

$$f(1+4) = 3(1+4)^3 - 2(1+4) + 7$$

$$f(a+2) = 3 \times (a+2)^3 - 2 \times (a+2) + 7$$

$$f(x+\Delta x) = 3(x+\Delta x)^3 - 2(x+\Delta x) + 7$$

注意2: dx 「変数 x のすごくすごく小さな変化量」

dx , $df(x)$ は2文字(以上)で1つの量を表す。

分離したり, $\frac{df(x)}{dx}$ を約分したりできない!

(テキスト p.83, 授業プリント p.2)

(5) べき関数 $f(x) = ax^b$ の微分(導関数) 定義に従って求めよう

⊙ $a = 1, b = 2$ の場合 $f(x) = x^2$ の微分(導関数)

$$\begin{aligned}\frac{df(x)}{dx} &= \frac{d[x^2]}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2x + \Delta x) \cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + 1 \times \Delta x) = 2x\end{aligned}$$

横軸の値が x のときの, x^2 のグラフの接線の傾きは $2x$

(テキスト p.83, 授業プリント p.2)

⊙ $a = 1, b = 3$ の場合 $f(x) = x^3$ の微分(導関数)

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d[x^3]}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - \cancel{x^3}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2) \cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(3x^2 + 3 \times \Delta x + 1 \times (\Delta x)^2 \right) = 3x^2$$

横軸の値が x のときの, x^3 のグラフの接線の傾きは $3x^2$

(テキスト p.83, 授業プリント p.2)

⊙ a, b の値が任意の定数の場合:

べき関数 $f(x) = ax^b$ の微分

$$\frac{d[ax^b]}{dx} = (ax^b)' = abx^{b-1}$$

時間 t を考えることが多い。変数を x から t に置き換えて、

べき関数 at^b の変数 t による微分:

$$\frac{d[at^b]}{dt} = (at^b)' = abt^{b-1} \quad (6.2)$$

$(ax^b)'$, $(at^b)'$ と書いたが, $\frac{d\odot}{d\bigcirc}$ の書き方をマスターして使うこと。 $(\odot)'$ の書き方は正解としない。

(テキスト p.85)

(6) 演習1 テキスト問題演習20の問題20-3を解答する。

ただし、導関数 $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ は公式(＃)を使って
求めればよい。 $x = 2$ における微分係数 $f'(2) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=2}$
も求める。ここでは $f'(2)$ の記法を使ってよい。

$$(1) f(x) = x^2 + 3x - 2 \quad (2) f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 2$$

題分

(テキスト p.85)

(6) 演習1 テキスト問題演習20の問題20-3を解答する。

$$\begin{aligned}(1) \frac{df(x)}{dx} &= \frac{d[x^2 + 3x - 2]}{dx} \quad \left(= f'(x) \right) \\&= \frac{d[x^2]}{dx} + \frac{d[3x]}{dx} + \frac{d[-2]}{dx} = \frac{d[x^2]}{dx} + \frac{d[3x^1]}{dx} + \frac{d[-2x^0]}{dx} \\&= 2x^{2-1} + 3 \times 1x^{1-1} + (-2) \times 0x^{0-1} = 2x + 3 \\f'(2) &= 2 \times 2 + 3 = 7 \quad \left(= \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=2} \right)\end{aligned}$$

(テキスト p.85)

(6) 演習1 テキスト問題演習20の問題20-3を解答する。

$$\begin{aligned}(2) \quad \frac{df(x)}{dx} &= \frac{d[3x^4 - 5x^3 + 2]}{dx} \quad \left(= f'(x) \right) \\ &= \frac{d[3x^4]}{dx} + \frac{d[-5x^3]}{dx} + \frac{d[2]}{dx} \\ &= 3 \times 4x^{4-1} + (-5) \times 3x^{3-1} + (2 \times 0) = 12x^3 - 15x^2 \\ f'(2) &= 12 \times 2^3 - 15 \times 2^2 = 36 \quad \left(= \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=2} \right)\end{aligned}$$

(7) 位置と変位 (第4章)

物体が x 軸上で直線運動する場合を考える。

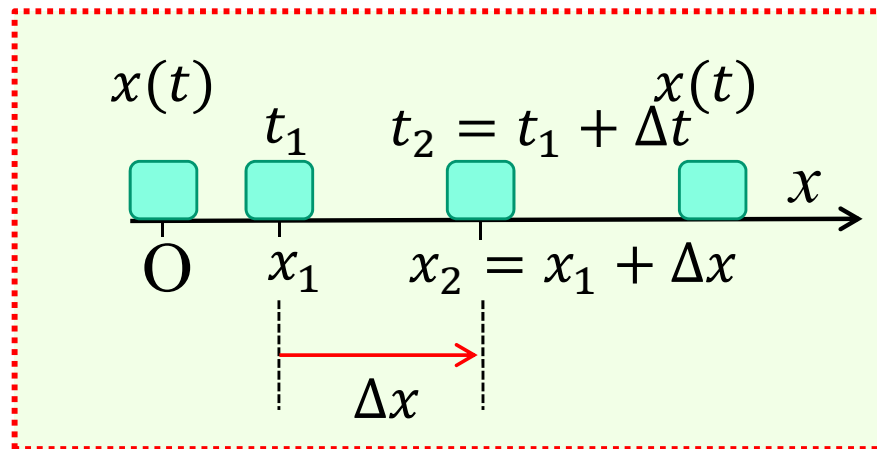
位置 (座標) x は時間 t の **関数** $x(t)$ で表わされる。

例えば, $x(t) = -2t^2 + 7t + 1$ [m]

※ 記号を節約するために $x = f(t)$ と書かない。

変位: t_1 から t_2 の間の物体の位置の変化量

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = x_2 - x_1$$



(テキスト p.17)

(8) 平均速度と速度

位置を表す関数を $x(t)$ とすると

$$\text{平均速度: } \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ [m/s]}$$

例題4.1

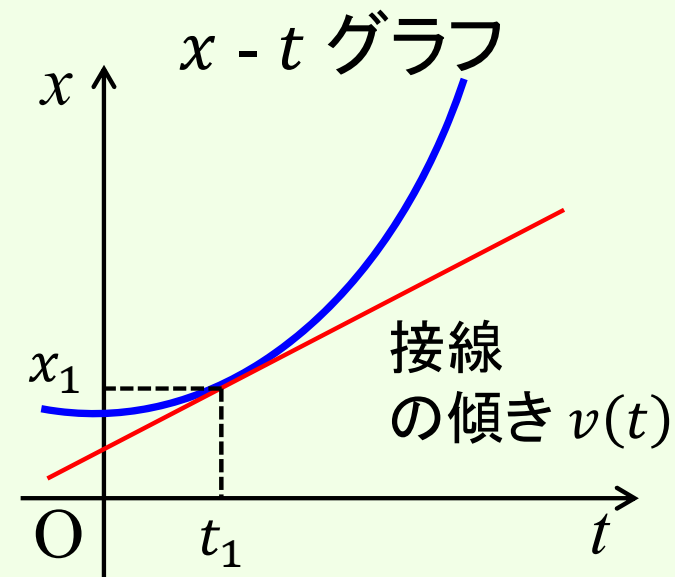
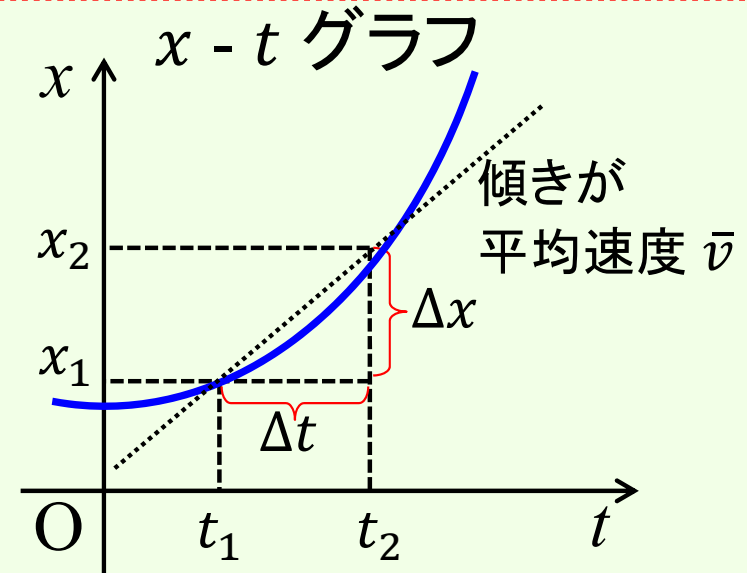
初め $x_1 = 0.0$ [m], $x_2 = 8.0$ [m] まで
2.0 [s] かけて移動。平均速度は？

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(8.0 - 0.0) \text{ [m]}}{2.0 \text{ [s]}} = 4.0 \text{ [m/s]}$$

ある時刻の(瞬間の)速度は？

物体の**速度**の定義:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \text{ [m/s]} \quad (6.3)$$



(テキスト p.18)

(10) 平均加速度と加速度

速度の関数 $v(t)$ が求まれば,

$$\text{平均加速度: } \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ [m/s}^2\text{]}$$

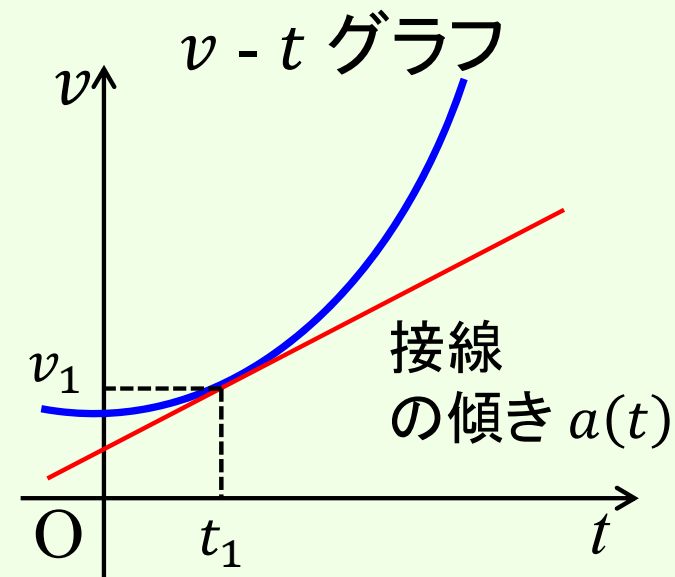
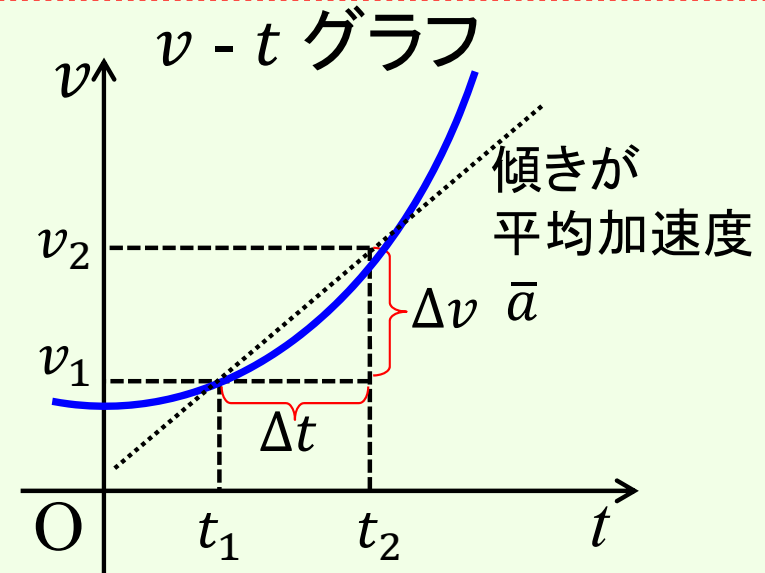
例題4.2 初め静止していて, 3.0 [s] かけて $v_2 = 6.0$ [m/s] まで加速。
平均加速度は？

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(6.0 - 0.0) \text{ [m/s}^2\text{]}}{3.0 \text{ [s]}} = 2.0 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

ある時刻の(瞬間の)加速度は？

物体の**加速度**の定義:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \text{ [m/s}^2\text{]} \quad (6.4)$$



(テキスト p.18)

(11) 演習2 テキスト例題4.3に取り組む。グラフも描く。

速度が $v(t) = t^2$ [m/s] と表されている。

(1) $t = 3$ [s] における物体の速度は？

(2) $t = 3$ [s] における物体の加速度は？

1分

(テキスト p.18)

(11) 演習2 テキスト例題4.3に取り組む。グラフも描く。

速度が $v(t) = t^2$ [m/s]

(1) $t = 3$ [s] の速度は？

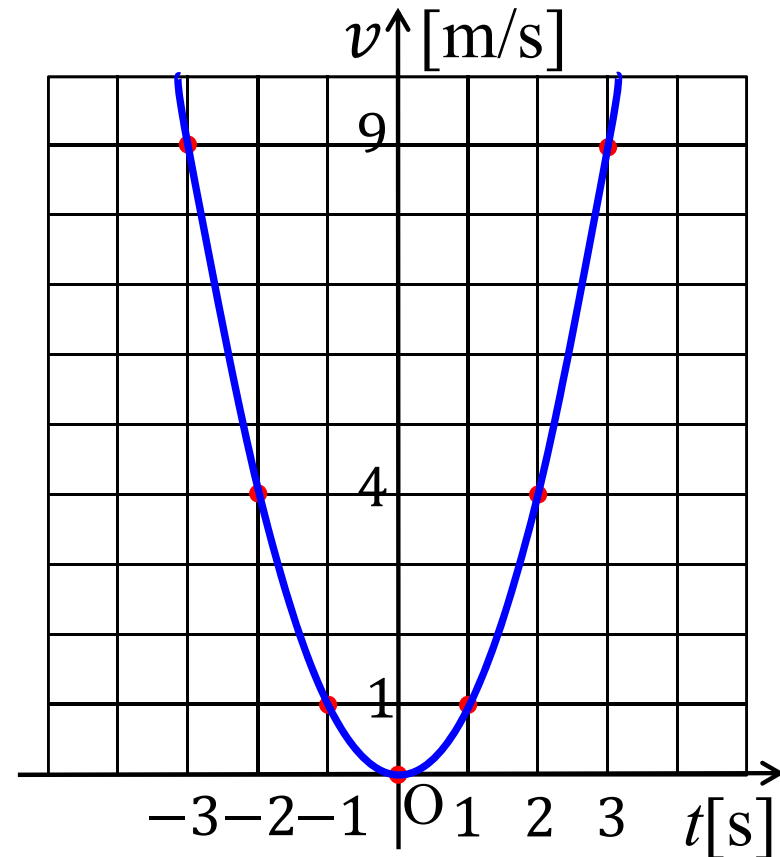
$$v(t) = t^2 \text{ に } t = 3 \text{ を代入して,}$$
$$v(3) = 3^2 \text{ [m/s]} = 9 \text{ [m/s]}$$

(2) $t = 3$ [s] の加速度は？

速度を微分して加速度を求める。

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d[t^2]}{dt} = (t^2)'$$
$$= 2t \text{ [m/s}^2\text{]}$$

$$a(t) = 2t \text{ に } t = 3 \text{ を代入して,}$$
$$a(3) = 2 \times 3 \text{ [m/s]}^2$$
$$= 6 \text{ [m/s}^2\text{]}$$



(12) 等速直線運動

物体が $v(t) = -3 [\text{m/s}]$ の等速直線運動を行っている。
 位置 $x(t)$ はどんな関数？ 速度の定義 (6.3) から、
 位置 $x(t)$ は微分したら -3 (定数関数) になるような関数

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -3 [\text{m/s}]$$

$$\Leftrightarrow x(t) = -3t + C [\text{m}]$$

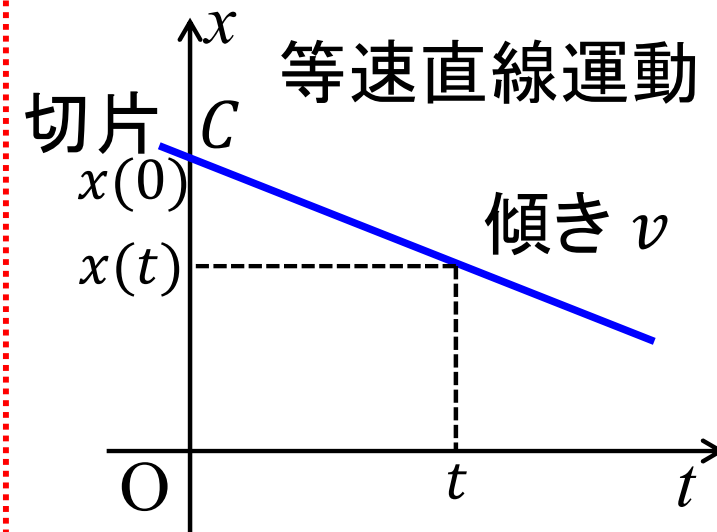
$x(t)$ を微分すると、 $v(t) = -3 [\text{m/s}]$ になることを確かめよ。

(13) 演習3

$t = 0 [\text{s}]$ での位置 $x(0) = 50 [\text{m}]$ だとする。
 この場合の定数 C の値を求めよ。

$x(t) = -3t + C$ に $t = 0$ を代入する。

$x(0) = -3 \times 0 + C = C$ $x(0) = 50 [\text{m}]$ だから、 $C = 50 [\text{m}]$



(テキスト p.85)

(14) 演習4 問題演習20 の問題20-1, 20-5に取り組む。

問題20-1 位置が $x(t) = t^4$ [m] で与えられている。

(1) べき関数の n は？ (2) t^{n-1} は？ (3) $v(t)$ は？

問題20-5 次の $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ は？ $f'(1)$ は？

(1) $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x + 1 + x^{-2}$

(2) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + 6x - 3$

4分

(14) 演習4

問題20-1 位置が $x(t) = t^4$ [m] で与えられている。

(1) べき関数の n は？ $n = 4$

(2) t^{n-1} は？ $t^{4-1} = t^3$

(3) $v(t)$ は？ $v(t) = \frac{d[t^4]}{dt} = (t^4)' = 4t^3$ [m/s]

(14) 演習4 問題20-5 次の $df(x)/dx = f'(x)$ は？

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{df(x)}{dx} &= f'(x) = \frac{d[5x^3 - 2x^2 + 3x + 1 + x^{-2}]}{dx} \\
 &= \frac{d[5x^3]}{dx} + \frac{d[-2x^2]}{dx} + \frac{d[3x]}{dx} + \frac{d[1]}{dx} + \frac{d[x^{-2}]}{dx} \\
 &= 5 \times 3x^{3-1} - 2 \times 2x^{2-1} + 3 \times 1 + 1 \times 0 + (-2)x^{-2-1} \\
 &= 15x^2 - 4x + 3 - 2x^{-3} \quad f'(1) = 12
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \frac{df(x)}{dx} &= f'(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{3} x^3 + 4x^2 + 6x - 3 \right] \\
 &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{3} x^3 \right] + \frac{d[4x^2]}{dx} + \frac{d[6x]}{dx} + \frac{d[-3]}{dx} \\
 &= \frac{1}{3} \times 3x^2 + 4 \times 2x + 6 + 0 = x^2 + 8x + 6 \\
 f'(1) &= 1^2 + 8 \times 1 + 6 = 15
 \end{aligned}$$

第6回授業 レポート課題

テキスト第4章の問題演習4 から, 問題4-1[項目(7)(8), 例題4.1参照], 問題4-2[項目(10), 例題4.2参照], 問題4-7[項目(5)(10), 例題4.3参照], 問題4-9[項目(5)(10)参照]を解け。

注意: テキストの解答は略解であり, 答案として必要な部分が省略されている場合がある。計算式だけでなく, 説明文や適切な図を加えて, 答案を作成することを心がけよ。答案作成力も見る。

提出×切: 答案用紙を, 次週の**木曜日13:00**までに提出

提出場所: **D0308**(原科)研究室前のレポート提出用の**木箱**

注意事項: 自分の答案をノートに記入するか, コピーをとって, 次の授業に持ってくる。

- ・レポート解答用紙

- ・次回の授業プリント

（これに今週のレポート課題も記してある。）

を必ず持って帰ること