

授業予定(変更されたシラバス)

- ①力の合成・分解の実験的理解
- ②ベクトルの基礎事項と力
- ③基本的な力:有効重力, バネの力, 摩擦力 (小)
- ④力の合成・分解, 力のつり合い (小)
- ⑤ベクトルと力の総合演習 (小)
- ⑥微分の基礎事項と速度・加速度の定義
- ⑦積分の基礎事項と位置・速度・加速度の関係 (小)
- ⑧微分積分と位置・速度・加速度の総合演習 (+確認試験1)
- ⑨平面運動の位置・速度・加速度とベクトル・微分積分
- ⑩力学の3つの基本法則1 : 導入 (小)
- ⑪力学の3つの基本法則2 : 問題演習 (小)
- ⑫放物運動1 : 運動方程式を解く (小)
- ⑬放物運動2: 問題演習1 (小)
- ⑭(確認試験2+) 問題演習2
- ⑮まとめ
- ⑯期末試験

力学1 ≪ 学習到達目標 ≫

- 1) 力の合成・分解をベクトルを使って説明できる。
- 2) 基本的な力の法則(重力, ばねの力, 摩擦力)の法則を説明できる。
- 3) 速度, 加速度の定義を説明できる。
- 4) 力学の3つの基本法則を説明できる。
- 5) 放物運動の運動方程式を解き, その運動を説明できる。

第12回目 放物運動1:運動方程式を解く

今日の授業の目的

前回までの授業で、ベクトルと微分積分に基づいて位置・速度・加速度・力を把握した上で、ニュートン力学の3つの基本法則を理解した。これでニュートン力学の理論体系の基礎事項がようやくそろったことになる。そこで、今回の授業の目的は、ニュートン力学で実際の運動を理解する具体例として、地表付近での放物運動を理解することである。

(1) 状況設定:

(授業プリント p.1)

- ① 空気抵抗は無視でき、物体に働く力は重力だけ。
地表付近で重力だけが働くことで実現する運動 $\Rightarrow$ 放物運動
- ② 物体の質量を m [kg], 重力加速度の大きさを g [m/s²]
(g も正の定数)
- ③ x 軸を水平方向に, y 軸を鉛直上向きに設定する。
物体は xy 平面内を運動する。

- ④ 初期条件: 時刻 $t = 0$ [s]で,

$$\vec{v}(0) = (v_{0x}, v_{0y}) [\text{m/s}], \quad \vec{r}(0) = (x_0, y_0) [\text{m}] \quad (12.1)$$

ただし, v_{0x}, v_{0y}, x_0, y_0 は定数。

注意1: テスト問題では, 初期条件の定数 v_{0x}, v_{0y}, x_0, y_0 に具体的な値を決めて出題する。

$$\begin{aligned} \vec{v}(0) &= (3.0, 4.0) [\text{m/s}], \quad \vec{r}(0) = (-5.0, 12.0) [\text{m}] \\ m &= 10 [\text{kg}] \end{aligned}$$

(2) 力学の基本パターン(第6章p.25の手順)の実行

以下, 作図や積分計算を実行しながら, 解説していく。

物体に働く力 $\vec{F}(t)$

⇒ 作図し, 成分で表せ。

$$\begin{aligned}\vec{F}(t) &= (0, -mg) \text{ [N]} \\ &= (0, -98) \text{ [N]}\end{aligned}$$

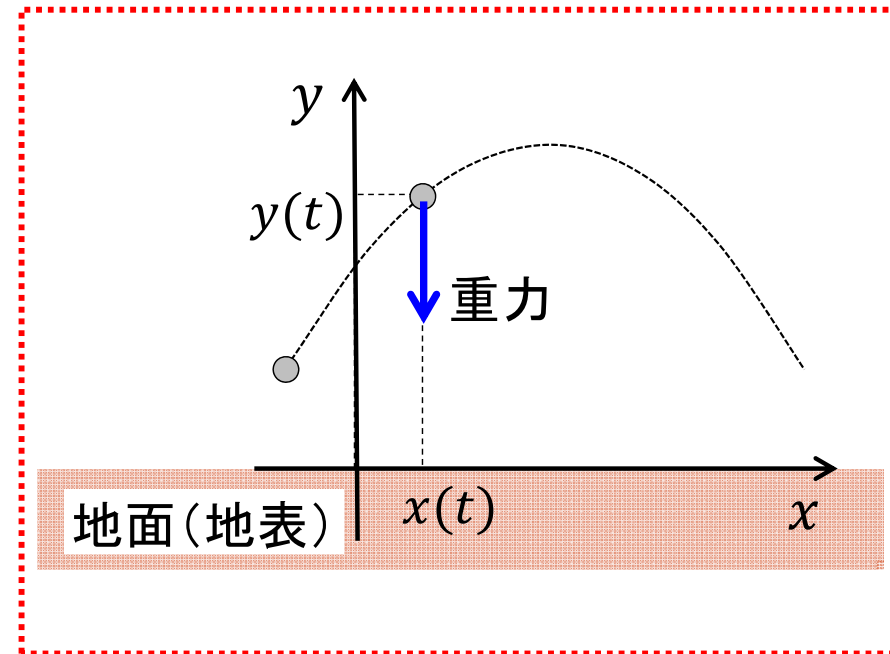
運動方程式を立てる

⇒ $m, \vec{F}(t), \vec{a}(t)$ で表せ。

$$\rightarrow m\vec{a}(t) = \vec{F}(t)$$

$\vec{F}(t)$ と連立させると

$$\begin{aligned}m\vec{a}(t) &= (0, -mg) \\ 10\vec{a}(t) &= (0, -98)\end{aligned}$$



(2) 力学の基本パターンの実行

運動方程式

$$m\vec{a}(t) = (0, -mg)$$

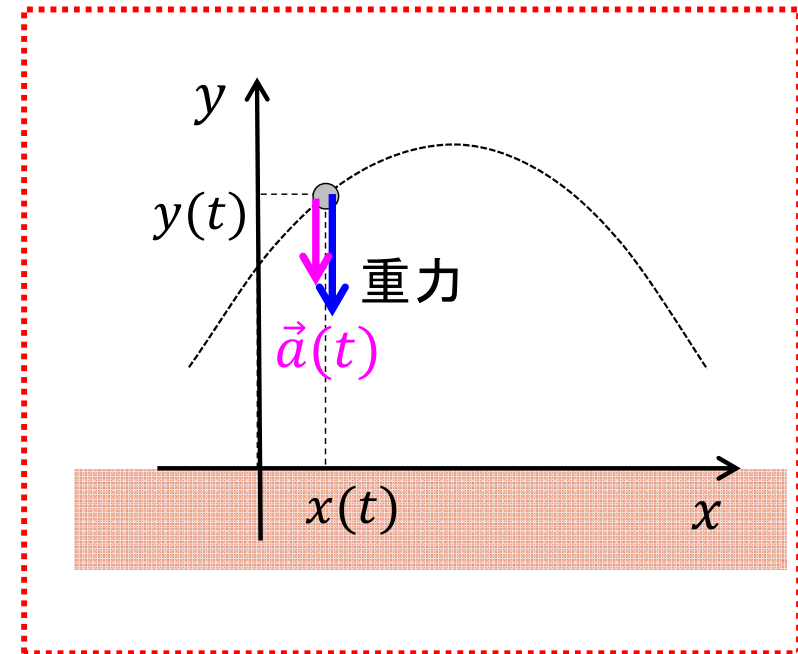
加速度 $\vec{a}(t)$ を求める

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \left(\frac{0}{m}, \frac{-mg}{m} \right) \\ &= (0, -g) \quad [\text{m/s}^2] \\ &= (0, -9.8) \quad [\text{m/s}^2]\end{aligned}$$

成分ごとに

$$\begin{cases} a_x(t) = 0 & [\text{m/s}^2] \\ a_y(t) = -g & [\text{m/s}^2] \end{cases}$$

注意1: $x(t)$ は「加速度ゼロの運動(等速度運動)」,
 $y(t)$ は「加速度が一定の運動(等加速度運動)」



(2) 力学の基本パターンの実行

加速度 $\vec{a}(t)$ 成分ごとに

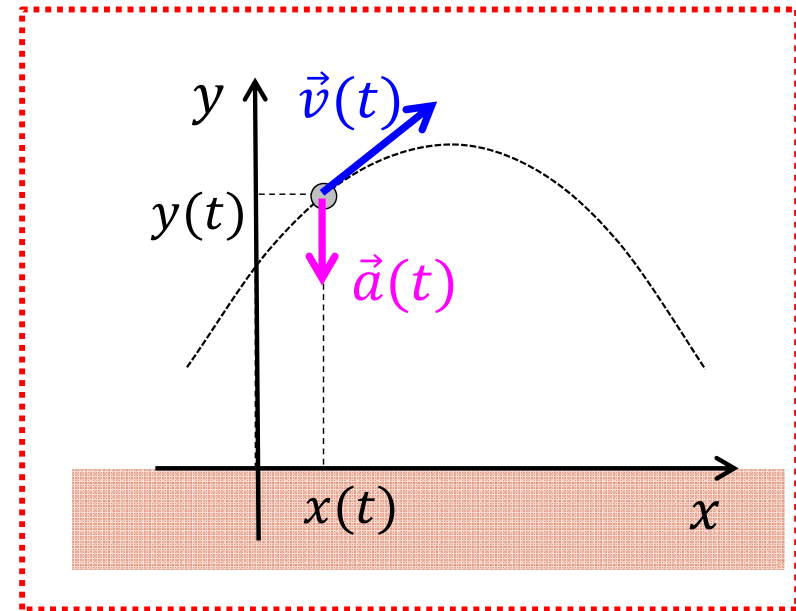
$$\begin{cases} a_x(t) = 0 & [\text{m/s}^2] \\ a_y(t) = -g & [\text{m/s}^2] \end{cases}$$

速度 $\vec{v}(t)$ を求める

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t) dt$$

成分ごとに

$$\begin{cases} v_x(t) = \int 0 dt = A_x & [\text{m/s}] \\ v_y(t) = \int (-g) dt = -gt + A_y & [\text{m/s}] \end{cases} \quad (12.2)$$



(授業プリント p.2)

(2) 力学の基本パターンの実行

速度 $\vec{v}(t)$ 成分ごとに

$$\begin{cases} v_x(t) = A_x \text{ [m/s]} \\ v_y(t) = -gt + A_y \text{ [m/s]} \end{cases} \quad (12.2)$$

初期条件 (12.1) から A_x , A_y を求める。

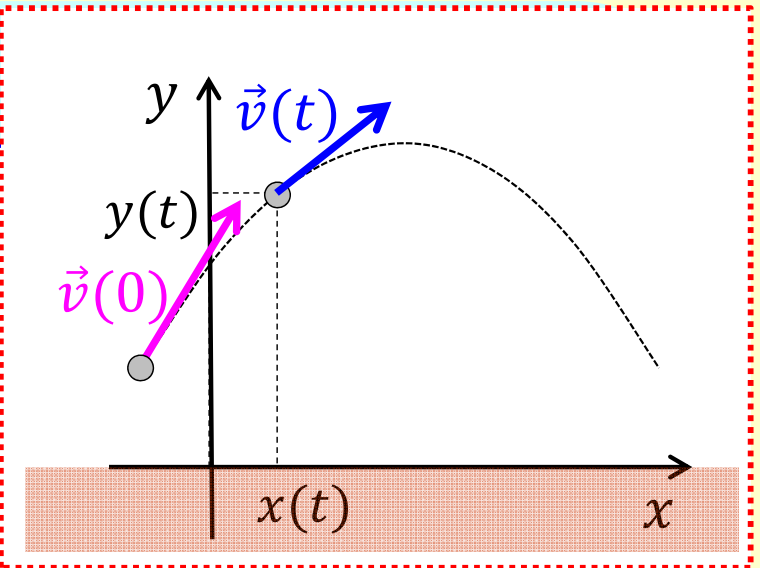
$$\begin{aligned} (12.1) \quad v_x(0) &= v_{0x} & (12.2) \text{ で } t = 0 \text{ とおく。} & \quad v_x(0) = A_x \\ &= 3 \text{ m/s} & \text{初期条件と比較して} & \Rightarrow A_x = v_{0x} = 3 \text{ m/s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (12.1) \quad v_y(0) &= v_{0y} & (12.2) \text{ で } t = 0 \text{ とおく。} & \\ &= 4 \text{ m/s} & v_y(0) = -g \times 0 + A_y = A_y & \end{aligned}$$

よって,

$$\text{初期条件と比較して} \Rightarrow A_y = v_{0y} = 4 \text{ m/s} \quad (12.3)$$

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \left(\underline{v_{0x}}, \underline{-gt + v_{0y}} \right) \text{ [m/s]} & (12.4) \\ &= \left(3, -9.8t + 4 \right) \text{ [m/s]} \end{aligned}$$



(2) 力学の基本パターンの実行

(授業プリント p.2)

速度 $\vec{v}(t)$ 成分ごとに

$$\begin{cases} v_x(t) = A_x \quad [\text{m/s}] \\ v_y(t) = -gt + A_y \quad [\text{m/s}] \end{cases}$$

再び A_x , A_y のまま進める。

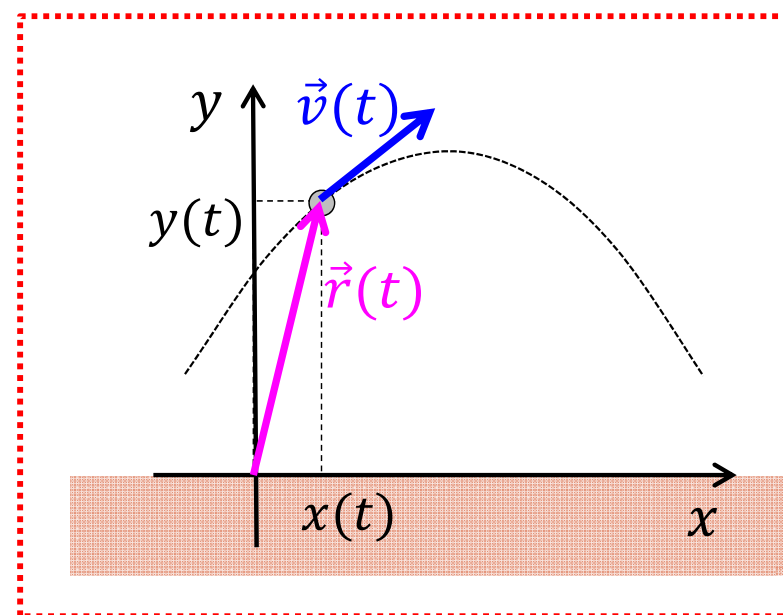
位置 $\vec{r}(t)$ を求める

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t) dt$$

成分ごとに

$$\begin{cases} x(t) = \int A_x dt = A_x t + B_x \quad [\text{m}] \\ y(t) = \int (-gt + A_y) dt = -\frac{1}{2}gt^2 + A_y t + B_y \quad [\text{m}] \end{cases} \quad (12.5)$$

積分定数を用いて表した解を, 「一般解」という。運動方程式 $m\vec{a}(t) = (0, -mg)$ に従うすべての運動を表す。



(2) 力学の基本パターンの実行

位置 $\vec{r}(t)$ 成分ごとに

$$\begin{cases} x(t) = A_x t + B_x \quad [\text{m}] \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + A_y t + B_y \quad (12.5) \quad [\text{m}] \end{cases}$$

初期条件 (12.1) から B_x , B_y を求める。

$$(12.1) \quad \begin{aligned} x(0) &= x_0 & (12.5) \text{ で } t = 0 \text{ とおく。} \\ &= -5 \text{ m} \end{aligned}$$

$$x(0) = A_x \times 0 + B_x = B_x$$

$$\text{初期条件と比較して} \Rightarrow B_x = x_0 = -5 \text{ m}$$

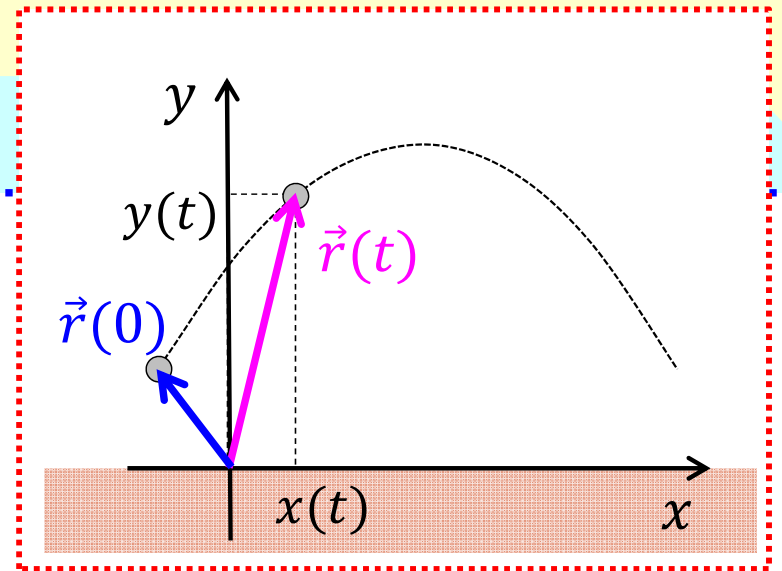
$$(12.1) \quad \begin{aligned} y(0) &= y_0 & (12.5) \text{ で } t = 0 \text{ とおく。} \\ &= 12 \text{ m} \end{aligned}$$

$$y(0) = -\frac{1}{2}g \times 0^2 + A_y \times 0 + B_y = B_y$$

$$\text{初期条件と比較して} \Rightarrow B_y = y_0 = 12 \text{ m} \quad (12.6)$$

よって,

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \left(\underline{v_{0x}t + x_0}, \quad \underline{-\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0} \right) [\text{m}] \quad (12.7) \\ &= \left(3t - 5, \quad -4.9t^2 + 4t + 12 \right) [\text{m}] \end{aligned}$$



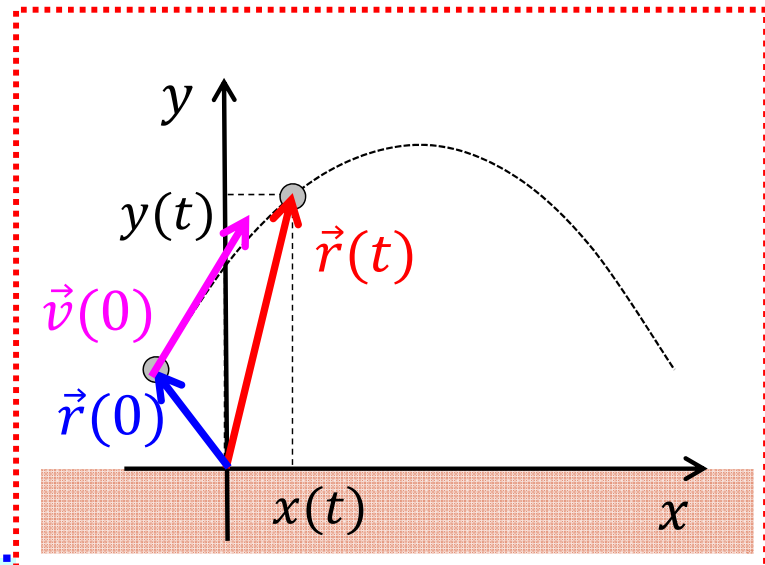
(2) 力学の基本パターンの実行

$$\vec{r}(t) = \left(\underline{v_{0x}t + x_0}, \underline{-\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0} \right) [\text{m}] \quad (12.7)$$

成分ごとに

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}t + x_0 [\text{m}] \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0 [\text{m}] \end{cases} \quad (12.7 \text{成分})$$

初期条件に合うように積分定数を決定した解を、「特解」という。

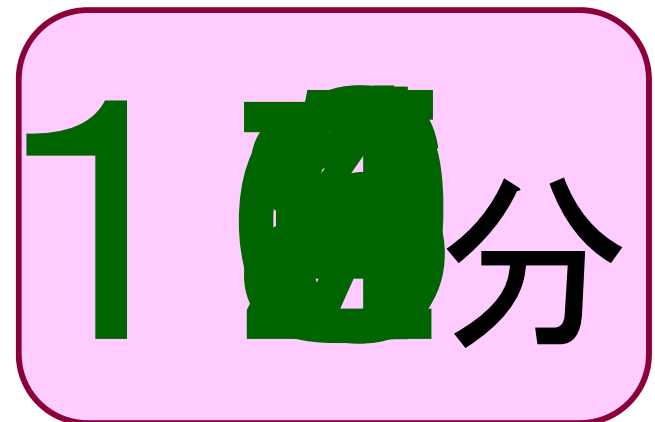


◇ここまでの確認練習

(授業プリント p.1~3)

地表付近で、物体 ($m = 5.0$ [kg]) の放物運動を考える。水平方向に x 軸、鉛直上向きに y 軸をとる。初期条件は、 $\vec{r}(0) = (-12, 0)$ [m], $\vec{v}(0) = (6.0, 24.5)$ [m/s] である。重力加速度の大きさ $g = 9.8$ [m/s²] とする。また、空気抵抗は無視できる。

- (a) 0 [s] 以降の運動は、一旦上昇して下降するか、あるいは上昇せず下降し続けるか、理由を付けて答えよ。(ヒント: 速度の初期条件)
- (b) 作用する重力 $\vec{F}(t)$ を求めよ。
- (c) 加速度 $\vec{a}(t)$ を求めよ。(運動方程式を立ててから求める)
- (d) 速度 $\vec{v}(t)$ を求めよ。
(はじめ積分定数を使って解を求め、
後に初期条件を適用せよ)
- (e) 位置 $\vec{r}(t)$ を求めよ。
(初期条件を適用した(d)の解からはじめて、
積分定数を使って解を求め、
初期条件を適用せよ)



◇ここまでの確認練習

(授業プリント p. 1~3)

(a) 作図して状況を把握する

初速度の y 成分が正(上向き) $\Rightarrow$ 一旦上昇して下降する

(b) 物体に働く重力 $\vec{F}(t)$

$$\vec{F}(t) = (0, -mg) \text{ [N]}$$

(c) 運動方程式を立てる

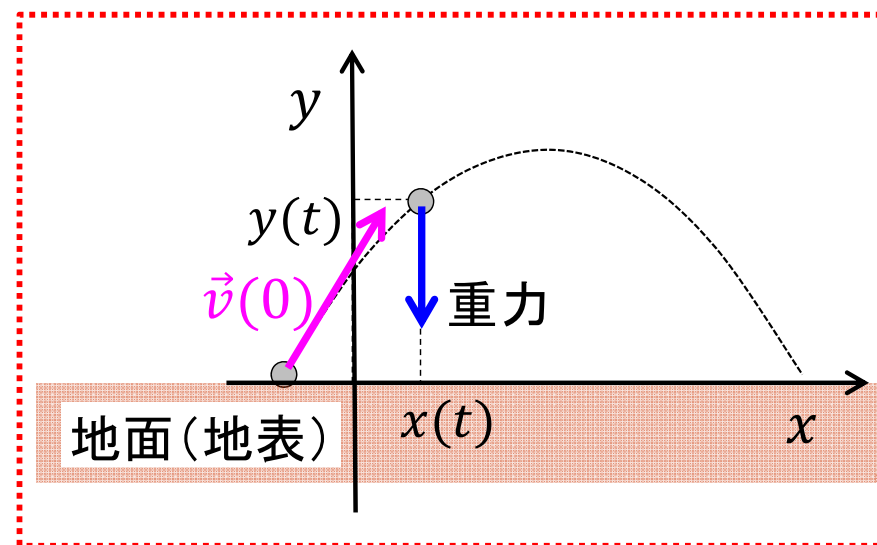
$$m\vec{a}(t) = \vec{F}(t)$$

$$\Rightarrow m\vec{a}(t) = (0, -mg)$$

加速度 $\vec{a}(t)$ を求める

$$\vec{a}(t) = \left(\frac{0}{m}, \frac{-mg}{m} \right) = (0, -g) \text{ [m/s}^2\text{]}$$

$$\text{成分ごとに} \begin{cases} a_x(t) = 0 & [\text{m/s}^2] \\ a_y(t) = -g & [\text{m/s}^2] \end{cases}$$



◇ここまでの確認練習

(d) **速度** $\vec{v}(t)$ を求める

成分ごとに

$$\begin{cases} v_x(t) = \int a_x(t) dt = \int 0 dt = A_x \text{ [m/s]} \\ v_y(t) = \int a_y(t) dt = \int (-g) dt = -gt + A_y \text{ [m/s]} \end{cases} \quad (\text{ア})$$

初期条件から A_x , A_y を求める。

$$v_x(0) = 6.0 \text{ [m/s]} \quad (\text{ア}) \text{ より } v_x(0) = A_x$$
$$\text{比較して } \therefore A_x = 6.0 \text{ [m/s]}$$

$$v_y(0) = 24.5 \text{ [m/s]} \quad (\text{ア}) \text{ より } v_y(0) = A_y$$
$$\text{比較して } \therefore A_y = 24.5 \text{ [m/s]}$$

$$\vec{v}(t) = (6.0, -gt + 24.5) = (6.0, -9.8t + 24.5) \text{ [m/s]}$$

◇ここまでの確認練習

(e) **位置** $\vec{r}(t)$ を求める

成分ごとに

$$\begin{cases} x(t) = \int v_x(t) dt = \int 6.0 dt = 6t + B_x \text{ [m]} \\ y(t) = \int v_y(t) dt = \int (-gt + 24.5) dt \end{cases} \quad (\text{イ})$$
$$= -\frac{1}{2}gt^2 + 24.5t + B_y \text{ [m]}$$

初期条件から B_x , B_y を求める。

$$x(0) = -12 \text{ [m]} \quad (\text{イ}) \text{より } x(0) = B_x \text{ 比較して } \therefore B_x = -12 \text{ [m]}$$

$$y(0) = 0 \text{ [m]} \quad (\text{イ}) \text{より } y(0) = B_y \text{ 比較して } \therefore B_y = 0 \text{ [m]}$$

$$\vec{r}(t) = \left(6t - 12 \quad , \quad -4.9t^2 + 24.5t \right) \text{ [m]}$$

(3) 放物運動の特徴：放物運動の特徴を理解していく。

軌道曲線(テキストp.33)：

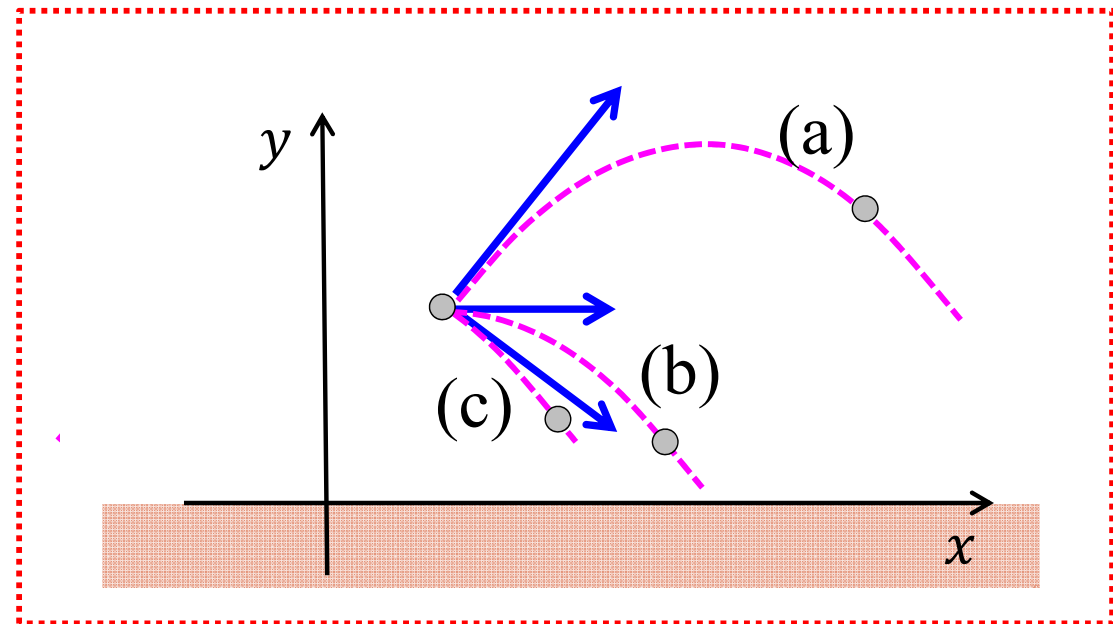
準備演習1：初期条件の速度で、 $v_{0x} > 0$ とする。

このとき、次のそれぞれの場合で、物体が xy 面上に描く軌道曲線の概形(大まかな形)の予想をノートに描け。

(a) $v_{0y} > 0$ の場合、

(b) $v_{0y} = 0$ の場合、

(c) $v_{0y} < 0$ の場合



予想した軌道曲線を表す式 $y = f(x)$ を求めていく。

座標(位置ベクトルの成分) x と y の関係式 $y = f(x)$ を求めれば、それが軌道曲線を表す方程式である。 t を消去する。

$$\begin{cases} x = v_{0x} t + x_0 & \dots \textcircled{1} \\ y = -\frac{g}{2} t^2 + v_{0y} t + y_0 & \dots \textcircled{2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad t = \frac{x - x_0}{v_{0x}}$$

①式から得られる t を②式に代入して、

$$y = -\frac{g}{2} \left(\frac{x - x_0}{v_{0x}} \right)^2 + v_{0y} \left(\frac{x - x_0}{v_{0x}} \right) + y_0$$

軌道を表す方程式 $y = f(x)$ は、($y = ax^2 + bx + c$ の形で)

$$y = -\frac{g}{2v_{0x}^2} x^2 + \left[\frac{gx_0}{v_{0x}^2} + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \right] x + \left[-\frac{gx_0^2}{2v_{0x}^2} - \frac{v_{0y}x_0}{v_{0x}} + y_0 \right]$$

軌道は、上に凸の2次曲線(2次の係数が負の2次関数のグラフ)

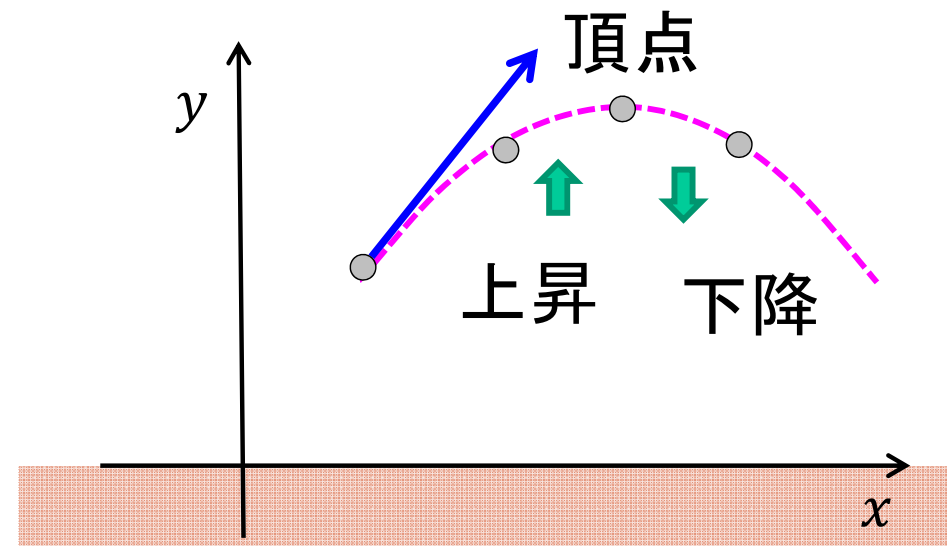
$v_{0y} > 0$ の場合の軌道の頂点を通過する時刻 t_1 :

軌道曲線 $y = f(x)$ の頂点を考える。軌道をイメージせよ。

上昇から下降に変化する瞬間 $y(t)$ で表される運動の
速度 $v_y(t)$ が、その一瞬だけゼロ

$$v_y(t_1) = 0 \Rightarrow -gt_1 + v_{0y} = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{v_{0y}}{g}$$

この時刻 t_1 (t_{top}) を, 位置 (♡成分) の t に代入すれば,
頂点の位置座標も求まる。



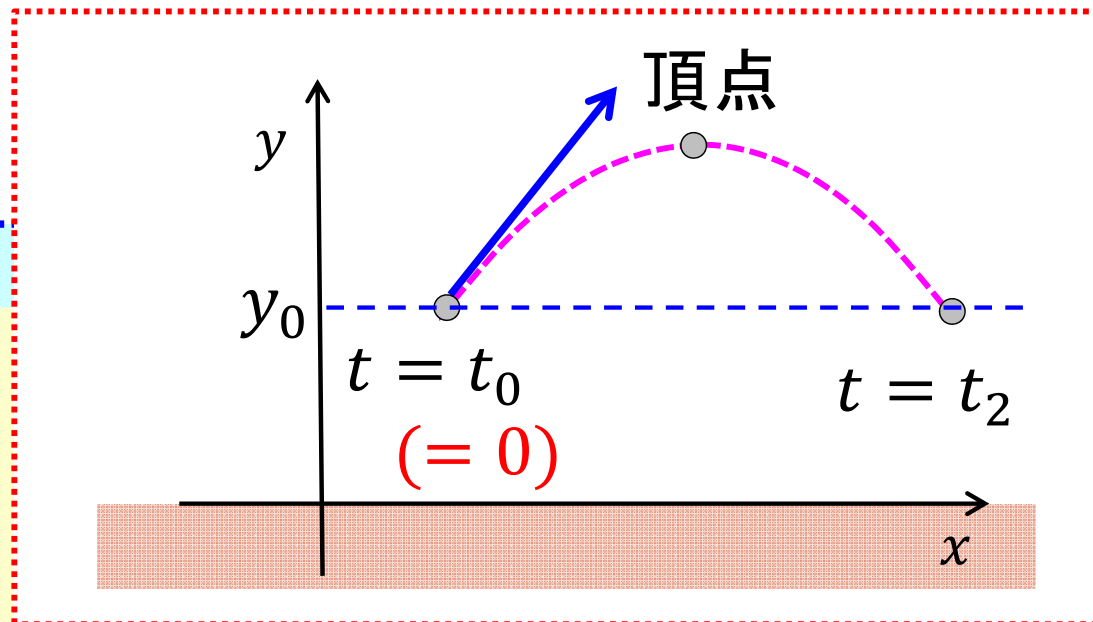
(授業プリント p.3~4)

$v_{0y} > 0$ の場合に, $t = t_0 (= 0)$ と同じ高さ y_0 に戻る時刻 t_2 :
(♡成分) の $y(t)$ を使って,

$$y(t_2) = y_0 \Rightarrow -\frac{1}{2}gt_2^2 + v_{0y}t_2 + y_0 = y_0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}gt_2 \left(t_2 - \frac{2v_{0y}}{g} \right) = 0 \quad \therefore t_2 = 0, \frac{2v_{0y}}{g}$$

$t_0 (= 0)$ でない方の解が, 求めたい t_2 。 $\therefore t_2 = \frac{2v_{0y}}{g}$



第12回授業 レポート課題

(テキストにない問題である) (e)までは答えること。

問 地表付近で、物体(質量 $m = 20$ [kg])の放物運動を考える。水平方向に x 軸、鉛直上向きに y 軸をとる。初期条件は、時刻 $t = 0$ [s] で、位置 $\vec{r}(0) = (21, 0)$ [m], 速度 $\vec{v}(0) = (-7, 29.4)$ [m/s] である。重力加速度の大きさ $g = 9.8$ [m/s²] とする。また、空気抵抗は無視できる。

- (a) 0 [s] 以降の運動は、一旦上昇して下降するか、あるいは上昇せず下降し続けるか、理由を付けて答えよ。
- (b) 時刻 t [s] で物体に作用する重力 $\vec{F}(t)$ を求めよ。
- (c) 時刻 t [s] での物体の加速度 $\vec{a}(t)$ を求めよ。
- (d) 時刻 t [s] での物体の速度 $\vec{v}(t)$ を求めよ。
- (e) 時刻 t [s] での物体の位置 $\vec{r}(t)$ を求めよ。
- (f) 物体が描く軌道は放物線であり、その頂点Pに来るときの時刻を t_1 とする。
 - f-1) 時刻 t_1 での速度の y 成分 $v_y(t_1)$ の値を答えよ。
 - f-2) t_1 を求めよ。
 - f-3) 頂点P の位置 $\vec{r}(t_1)$ を求めよ。

第12回授業 レポート課題

- (g) 物体が頂点Pを過ぎて、 $t = 0$ [s]の位置(発射点)と同じ高さまで落ちてきたときの時刻を t_2 とする。
- g-1) t_2 を求めよ。 g-2) 時刻 t_2 での物体の位置 $\vec{r}(t_2)$ を求めよ。
- (h) 物体の軌道の曲線を xy グラフに描け。ただし、グラフの特徴的な点(最低限 $t = 0; t_1; t_2$ [s] での位置)と、物体の運動の向きも分かるように記入せよ。
- (i) 頂点Pで物体に作用する重力 $\vec{F}_P$ 、頂点Pでの物体の速度 $\vec{v}_P$ を表す矢印を問 (h) の図に描き込め。ただし、どちらの矢印が重力あるいは速度なのか分かるように、記号 $\vec{F}_P$ と $\vec{v}_P$ も記入せよ。

注意: 計算式だけでなく、説明文や適切な図を加えて、答案を作成することを心がけよ。答案作成力も見る。

提出×切: 答案用紙を、次週の**水曜日(13:00)**までに提出

提出場所: **D0308**(原科)研究室前のレポート提出用の**木箱**

注意事項: 自分の答案をノートに記入するか、コピーをとって、次の授業に持ってくる。

- ・レポート解答用紙

- ・次回の授業プリント

（これに今週のレポート課題も記してある。）

を必ず持って帰ること