［第９回目］運動方程式４：単振り子

≪考える内容≫

・　限定された軌道を運動する物体の運動 ⇒ xyz 座標系より便利な座標系はないか？

≪物理用語≫

・　自然座標系（基本ベクトル $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$）

＝質点の運動とともに座標軸の向きが変化し，常に１つの座標軸 $\boldsymbol{t}$ が運動方向を向く

≪今日の授業の目標≫

◎　単振り子の運動方程式とその解［単振動の式］

働く力は重力 mg と張力 S　　※ x は鉛直下向き，振り子は xy 平面内を運動する

運動方程式：
$$\begin{cases} \text{接線成分} \quad m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg\sin\theta \\ \text{法線成分} \quad m\dfrac{v^2}{l} = S - mg\cos\theta \end{cases}$$

⇩

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \xrightarrow{\theta\text{ が小さいとき}} \boxed{\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\theta}$$

☆単振動と同じ形！

一般解：$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\dfrac{g}{l}}t + \alpha\right)$　　※ cos の（）の中身の単位は rad（ラジアン）

周期：$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ ［s］は，振幅：θ_0［rad］によらない（ 振り子の等時性）

学習到達目標（3）運動方程式を立てられる。
学習到達目標（4）自由落下，放物運動，単振動，単振り子の場合に，
運動方程式を満たす解としての運動を求められる。

次回予定［第１０回目］運動エネルギーと仕事（教科書 68 ページまで）

＊＊

レポート問題　第９回目（右側の半分の解答用紙を切り取って提出しなさい）

数値で計算する問題は，答えにも必ず単位をつける！MKS 単位系で答えること！

問　教科書の図 1.87 のように，単振り子をつるし，座標軸を定める。

① 合力の接線成分 F_t を mg，θ で表せ。また，法線成分 F_n を mg，S，θ で表せ。

② 加速度の接線成分 a_t と法線成分（向心加速度）a_n を書け。

③ ①と②の結果から，単振り子の運動方程式の接線成分と法線成分を書け。［教科書の式（1.142）と（1.143）］

④ 運動方程式を回転角 θ の方程式で表せ。［教科書の式（1.144）］

⑤ 回転角 θ が小さいとき，$\sin\theta$ の近似式を書け。

⑥ 回転角 θ が小さいときの回転角 θ の方程式を書け。［教科書の式（1.145）］

⑦ 単振り子の一般解（回転角 θ の時間変化の式）を書き，周期 T を l，g で表せ。

⑧ 糸の長さが l = 1.5m の振り子の周期 T を求めよ。

⑨ 振幅 θ_0 を大きくし，式（1.145）で近似できなくなるとき，周期 T はどうなるか。

解答用紙　学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

解答スペースが足らなければ，続きを裏に書くか，他の紙に書いてホッチキスでとめて提出しなさい

数値で計算する問題は，答えにも必ず単位をつける！MKS 単位系で答えること！

① 合力　$F_t =$

合力　$F_n =$

② 接線成分（速さの変化率）$a_t =$

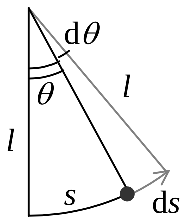
法線成分（向心加速度）　$a_n =$

③ 運動方程式は

接線成分 $ma_t = F_t$ より

法線成分 $ma_n = F_n$ より

④ 接線成分の式に，$v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\square}{\mathrm{d}t} = \square$ を代入して，両辺を ml で割ると，



⑤ $\sin\theta$

⑥

⑦ 一般解

周期　$T =$

⑧ 周期　$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\square}{\square}} =$　[　]

⑨ 振幅 θ_0 が小さくて $\sin\theta$　 θ が成り立ち，復元力（運動方程式の接線成分の右辺）が回転角 θ に比例し $-mg\theta$ と表されるとき，振り子の等時性が成り立つ。振幅 θ_0 が大きくなると，回転角 θ の大きいところでは $\sin\theta < \theta$ となるので，復元力 $|-mg\sin\theta|$ が $|-mg\theta|$ よりも小さくなる。すなわち，加速度の接線成分の大きさが小さくなり，質点が減速して逆向きに振れ始めるまでに時間が余分にかかるようになる。したがって，振幅 θ_0 が大きくなると，周期 T は　　　　なる。