

第8回授業 レポート課題 (試験でもこのような問題を問う)

問1 次の三角関数の1階微分と2階微分を求めよ。

$$(1) f(x) = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \quad (2) x(t) = 5 \cos\left(3t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

問2 水平なx軸に沿ったばね(ばね定数10 [N/m])に物体(質量5.0 [kg])が結ばれている。ばねの自然長の位置で $x = 0$ 、バネが伸びたとき $x > 0$ 、縮んだとき $x < 0$ とする。物体の運動は常にx軸に沿った方向なので、ベクトルは全てx成分だけ考えればよい。

時刻 t [s]での位置(ベクトルのx成分)を $x(t)$ 、速度(のx成分)を $v(t)$ とする。初期条件は、時刻 $t = 0$ [s]で位置 $x(0) = 0$ [m]、速度 $v(0) = 8.0$ [m/s]とする。摩擦力、空気抵抗は無視できる。

(a) 時刻 t [s]で物体に作用する力(のx成分) $F(t)$ を $x(t)$ で表せ。

(b) 時刻 t [s]での物体の加速度(のx成分) $a(t) \left(= \frac{d^2x(t)}{dt^2} \right)$ を $x(t)$ で表せ。

(c) $x(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$ [m] (A, ω, α は定数)として、下の三角関数の2階微分の重要な性質を導け。

$$\frac{d^2\{A \sin(\omega t + \alpha)\}}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \alpha) \quad \text{すなわち} \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$$

(d) 問(b)の結果と問(c)三角関数の2階微分の性質を比べると、 $x(t)$ は三角関数 \sin を使って次のようになる：

$$x(t) = A \sin([\quad]t + \alpha) \text{ [m]} \quad (A, \alpha \text{は積分定数})$$

d-1) 上の式のカッコの中の値を計算し、解答用紙のカッコに代入せよ。

d-2) A, α を含んだままで、物体の速度 $v(t)$ を、単位を付けて求めよ。(計算が問(c)の解答に示されているならば、繰り返さないで「問(c)を導く過程と同様に」と略してもよい。)

(e) 問(d)の $x(t)$ と $v(t)$ と初期条件より、次の連立方程式が得られる：
$$\begin{cases} A \sin \alpha = [\quad] \\ A \cos \alpha = [\quad] \end{cases}$$

e-1) 上の連立方程式のカッコの中の値を求め、解答用紙のカッコに代入せよ。

e-2) 連立方程式を解いて、 A, α の値を求めよ。

〔 前回学んだ三角関数の定義で示したような半径1の円周上の点を適切に作図して、その図を使って三角関数を考えること。 〕

e-3) 以上のように求められた $x(t)$ を単位を付けて書け。

(f) 物体の振動の周期 T を求めよ。

(g) 物体の位置 $x(t)$ の $x-t$ グラフを描け。ただし、グラフの特徴的な点(t, x 軸を通る点、グラフの山や谷の位置)も分かるよう作図せよ。

注意1: 計算式だけでなく、説明文(必要なら適切な図も)を加えて答案を作成すること。答案作成力も見る。

注意2: 最初はこの問題がよく解けなかったとしても構わない。しかし、次の確認テストまでに何度も復習し、適切な答案を作れるようにすることを強く勧める。

提出×切：答案用紙を、授業と同じ週の金曜日(13:00)までに提出

提出場所：D0308(原科)研究室前のレポート提出用の木箱

注意事項：自分の答案をノートに記入するか、コピーをとって、次の授業に持ってくる。

第9回 単振動3 (問題演習：テキスト第5, 6, 10, 18, 20章)

1. 今回の授業の目的

前回、ニュートン力学で実際の運動を理解する具体例として単振動を扱った。今回の授業の目的は、前回の授業の内容を定着させるための問題演習である

2. 授業の進行

(1) 演習1：テキスト第10章、問題演習10の問題10-1(p.45)に取り組む。まず、ばね定数 k 、物体の質量 m 、単振動の角振動数 ω 、単振動の周期 T の間の関係式を整理すること。

- (2) 演習 2： 問題演習 10 の問題 10-3 (p.45) に取り組む。ただし、ばねの自然長の位置を原点として、ばねが伸びる方向に x 軸を設定する。始めに次の追加問題に答えてからテキストの問いに取り組むこと。

追加問題： 物体から手を放した瞬間を時刻 $t = 0$ [s] とする。問題文の状況から、時刻 $t = 0$ [s] における物体の位置 (の x 成分) $x(0)$ [m]、速度 (の x 成分) $v_x(0)$ [m/s] を答えよ。

注意： 問(2) では、「力学の基本パターン」(力学1の授業、第6章の手順)に従って、**答案を前回のレポート課題(問2)の答案例のように作る**こと。その際、追加問題の答えが初期条件となる。なお、テキストとこの授業では、位相の定義が少し違うことに注意(前回プリント項目(4)の注意2を参照)。

- (3) 演習 3 (単振動をエネルギーの考え方で扱う：試験でもこのような問題を問う)： 水平面上で、ばね(ばね定数 $k = 2.0$ [N/m]) の先に小物体(質量 $m = 6.0$ [kg]) を付けて単振動させる。ばねの自然長の位置を原点にして、バネの向きに x 軸をとる。ばねを $x_i = 3.0$ [m] まで伸ばして、速度 $v_i = 2.0$ [m/s] で振動を始めさせる。空気抵抗と摩擦力は無視できる。

(a) 力学的エネルギー保存則が成立するかどうか、理由をつけて答えよ。(成立条件に注意)

(b) 振動を始めた瞬間の物体の運動エネルギー K_i 、位置エネルギー U_i 、力学的エネルギー E_i を求めよ。

(c) 単振動の振幅を A とする。

c-1) $x = A$ での物体の力学的エネルギー E_a を、 A を使って求めよ。

c-2) 問い(a), (b), c-1) から、 A を求めよ。

(d) 物体が原点 $x = 0$ を通過する瞬間の速さ(速度の大きさ) v_0 を、単位をつけて求めよ。

(e) 最後に、床と物体の間に摩擦力が働く状況で、上記の初期位置 x_i と初速度 v_i で運動を始めさせた。しばらくして、つり合いの位置 ($x = 0$) で物体は止まった。物体が運動を始めてから静止するまでの間に、摩擦力が物体に与えた仕事 W と、摩擦熱などの形で物体が失ったエネルギー Q を求めよ。

- (4) 演習 4： 物体が x 軸上を単振動しており、その位置が $x(t) = -0.5 \cos\left(4t + \frac{\pi}{7}\right)$ [m] だとする。この単振動の、位相 $\theta(t)$ 、振幅 $|A|$ 、角振動数 ω 、振動数 f 、周期 T を求めよ。