第７回授業　レポート課題

まず問１として①$\sin(-\pi/6)$，②$\cos(2\pi/3)$，③$\sin(3\pi/2)$，④$\cos 3\pi$を求めよ。次に第 18 章，問題演習 18 の問題 18-1(2)(4)(6)，18-2，18-3（p.78）に取り組む。ただし，変数xの範囲は全ての実数（$-\infty < x < \infty$）として，可能な解を全て示すこと（整数$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$などを使って表す)。なお，第 7 回授業プリントの定義（7.2）のような図（単位円）を描いて答案をまとめよ。記号が混乱しないように注意。

［アドバイス：まずは$0 \leq x < 2\pi$の範囲で解を求めてから，$-\infty < x < \infty$に広げて考えるのがよい。］

注意 1：計算式だけでなく，説明文（必要なら適切な図も）を加えて答案を作成すること。答案作成力も見る。

注意 2：最初はこの問題がよく解けなかったとしても構わない。しかし，次の確認テストまでに何度も復習し，適切な答案を作れるようにすることを強く勧める。

提出〆切：答案用紙を，授業と同じ週の金曜日（１３：００）までに提出

提出場所：Ｄ０３０８（原科）研究室前のレポート提出用の木箱

注意事項：自分の答案をノートに記入するか，コピーをとって，次の授業に持ってくる。

第８回　単振動２（運動方程式を解く）：テキスト第 5，6，10，18，20 章

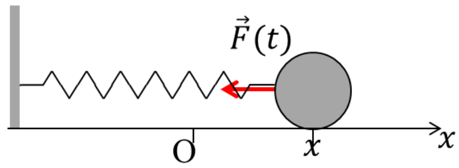
1. 今回の授業の目的

前回から始まり３回分の授業で，ニュートン力学で実際の運動を理解する具体例として，単振動を扱っている。前回には前提知識として必要な三角関数の基礎事項を学んだ。そこで今回の授業の目的は，力学の基本パターン（第 6 章の手順）に従って運動方程式を解いて，物体の単振動を理解することである。

2. 授業の進行：テキスト第 5，6，10，18，20 章とこのプリントを合わせて理解を深める

(1) 状況設定： 以下の設定で，ばねに結ばれた物体の運動を考える。（単位は国際単位系で示す。）

＜テキスト第 10 章 p.43 の上図と同様な図を描け＞



- テキスト第 10 章 p.43 の図（上側の図）と同じ設定を考える。ばねは水平方向に伸び縮みし，**摩擦と空気抵抗はない**とする。この場合，ばねの弾性力だけが物体に働く。このように，ばねの弾性力だけで実現する運動を単振動（あるいは調和振動）という。
- 物体の質量をm [kg]，ばねのばね定数をk [N/m] とする。
- x軸の原点は，ばねの自然長の位置（物体に働く合力がゼロの位置)。x軸の向きは，ばねが伸びる方向を正の向きにとる。物体はx軸上を運動するので，**位置・速度・加速度・力のベクトルは全てx成分だけを考えればよい**。右下の添え字xを省略するが，記号は大きさではなく成分を表していることを，常に意識していること。
- 初期条件は次の通り。ただし，t_0，v_0，x_0は定数とする。（時刻t_0 [s]はゼロにとることも多い。）

$$\text{初期条件：時刻}\, t = t_0 \text{ [s] で，} v(t_0) = v_0 \text{ [m/s]，} x(t_0) = x_0 \text{ [m]} \tag{8.1}$$

注意：テスト問題では，定数t_0，v_0，x_0やm，kに具体的な値を決めて出題する。しかし，このプリントでは，数学的な記号の扱いの訓練という意味も込めて，出来るだけ定数は記号t_0，v_0，x_0やm，kのままで解説を続けていく。どの記号が定数で，どの記号が変数で，どの記号が三角関数などを示す記号なのか，という区別に注意して計算を進めていこう。

(2) 力学の基本パターン（第 6 章 p.25 の手順）の実行：

物体に働く力 $F(t)$（p.25 の①，②）： 第 10 章 p.43 の図（上側の図）に示されるように，ばねの力が物体に働く。時刻 t [s] での物体の位置（ベクトルのx成分）を$x(t)$[m] とすると，時刻tで物体に働く力（のx成分）$F(t)$[N] は，ばねの弾性力を決める法則（第 2 章）から次のようになる。

$$F(t) = -kx(t)$$

物体の位置$x(t)$の時間変動に伴って，力$F(t)$も時間変動することが分かる。

運動方程式（p.25 の③）： 時刻tでの物体の加速度（のx成分）を$a(t)$[m/s^2] とすると，運動方程式は（m，$F(t)$，$a(t)$で表して），

$$ma(t) = F(t)$$

加速度 $a(t)$（p.25 の④）： 力の法則と運動方程式，そして加速度は位置の 2 階微分であること（力学 1「微分の基礎事項と速度・加速度の定義」のプリント参照）から，2 階微分$\dfrac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}$を$x(t)$で表すと，

$ma(t) = F(t)$ より， $a(t) = \dfrac{F(t)}{m}$

$$\left(a(t) =\right) \frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{F(t)}{m} = \frac{-kx(t)}{m} = -\frac{k}{m}x(t) \qquad (8.2)$$

これは，未知関数$x(t)$が満たすべき微分方程式（微分を含んだ関係式）である。

速度 $v(t)$と**位置**$x(t)$（p.25 の⑤，⑥）： 未知関数$x(t)$が微分方程式（＊）を満たすことが分かったので，前回授業の最後に学んだ定理が適用できる。（前回の定理で，$c = k/m$と置き換えればよい。）よって，

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x(t) \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha\right)$$

$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$ ただし，$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$であり， A，αは積分定数 （8.3）

注意：力学 1 の放物運動の授業の演習問題やレポート問題では，位置$\vec{r}(t)$を求めるまでに積分を 2 回実行する必要があった（$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)\,\mathrm{d}t$ と $\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t$ の計算）。しかし，前回に学んだ三角関数の定理によって，単振動の場合には積分を具体的に実行することなく位置 $x(t)$が得られたのである。積分の計算を回避できるという意味で，単振動の扱いは簡単である。（ただし，積分計算を回避する代わりに，三角関数を良く理解することが必要になる。一般的な方法の積分計算では求められないという意味では，単振動の取り扱いの方が難しいともいえる。）

注意：試験で，単振動の運動方程式を解く問題では，「定理より」解を求めるだけではなく，定理が成り立つことを微分計算で示せる力を問う。三角関数の微分に習熟しておくこと。

定数 A，α**の決定**： 定数A，αは初期条件（8.1）から決められる。初期条件を利用するために，速度（のx成分）$v(t)$ [m/s] を定数A，α で表そう。式（8.3）を微分して（前回授業の演習 4 参照），

$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$ $\theta(t) = \omega t + \alpha$ と置く。

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}(\omega t + \alpha)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}(A\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \omega\cdot A(-\sin\theta) = -\omega A\sin(\omega t + \alpha)$$

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -\omega A\sin(\omega t + \alpha) \qquad (8.4)$$

（8.3）と（8.4）と，初期条件（8.1）を用いて，積分定数A，αを決めるための関係式（方程式）を導く。 $x(t)$, $v(t)$に$t=t_0$を代入して

$$x(t_0) = A\cos(\omega t_0 + \alpha)$$
$$v(t_0) = -\omega A\sin(\omega t_0 + \alpha)$$

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ v(t_0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\cos(\omega t_0 + \alpha) = \underline{\quad x_0 \quad} \\ A\sin(\omega t_0 + \alpha) = \underline{\quad -\dfrac{v_0}{\omega} \quad} \end{cases}$$

この連立方程式を解けば，A，αが得られる。

(3) 演習 1：A（$A\neq 0$）とαの連立方程式 $\begin{cases} A\cos(0.3+\alpha) = 0 \\ A\sin(0.3+\alpha) = 7 \end{cases}$ を解け。
ただし，三角関数を扱う際は，前回学んだ三角関数の定義で示したような半径 1 の円周（単位円）上の点を適切に作図して，その図を使って三角関数を考えること。

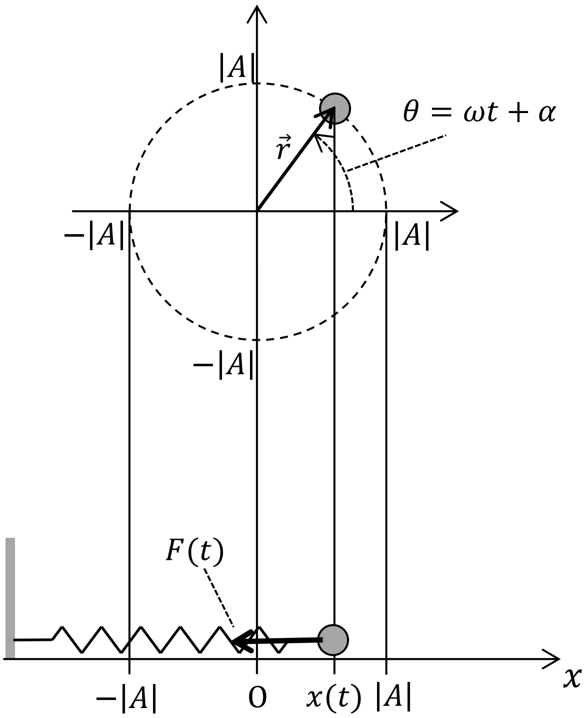
(4) 単振動の特徴： 式（8.3）で導いたように，単振動する物体の位置は，$\omega=\sqrt{k/m}$ かつ積分定数を A，αとして

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \alpha) \quad [\mathrm{m}]} \tag{8.5}$$

である。これに基づいて，単振動の特徴をまとめる。

注意 1： 式（8.3）では，式（8.5）と違う形にまとめたかもしれない。しかし，式（8.3）を正しく導けていれば，この式（8.5）と同じ形に変形できる。前回プリントの式（7.5）やテキスト p.43，p.78 などを参照。

想像上の円運動： 前回学んだ三角関数の定義から，三角関数は円周上の点の座標として理解できる。よって，単振動を理解するには，右図のような「想像上の円運動」を考えるのが便利である。この「想像上の円運動」の半径は$|A|$，x軸（に平行な軸）からの位置ベクトル$\vec{r}$の回転角θは，$\theta=\omega t+\alpha$で時間変化する。また，式(8.5)は cos で位置$x(t)$を表しているので，円運動する物体の横軸座標が，単振動の位置$x(t)$に対応する。（前回学んだ三角関数の定義を参照）



位相（位相角）： 単振動（8.5）の三角関数の引数（角度に相当する）$\omega t+\alpha$ [rad] を**位相**（位相角）という。「想像上の円運動」では，物体の回転角に対応する。

注意 2： テキスト p.43 では，積分定数αを位相と呼んでいる。しかし，この授業では，「想像上の円運動」との対応させ易さを優先して，三角関数の角度部分の全体 $\omega t+\alpha$ [rad] を位相と呼ぶことにする。**「位相」の意味には，このような流儀の違いがあるので，注意が必要である**。（物理学の多くの分野では，この授業と同じ流儀で，三角関数の角度全体を位相と呼んでいる。工学系の中には，積分定数を位相と呼ぶ流儀の分野もあるだろう。）

振幅： 単振動（8.5）の三角関数の係数の絶対値 $|A|$ を振幅という（$A > 0$という条件を付けることも多い）。これは，振動の中心（$x = 0$）からの最大振れ幅である。「想像上の円運動」では，回転半径に対応する。

角振動数（角周波数）： 単振動（8.5）の1 [s] 当りの位相の変化（正確には位相の時間微分）を**角振動数**（角周波数）という。位相を$\theta(t) = \omega t + \alpha$ [rad] とすると，

$$\text{角振動数（角周波数）：}\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = \omega \ \ [\mathrm{rad/s}] \quad (\to\ [1/\mathrm{s}]\ )$$

この量は，「想像上の円運動」の場合には，**角速度**（回転角$\theta(t)$の時間的な変化率・微分，つまり速度）と名称が変わる。

振動数（周波数）： 単振動（8.5）の1 [s]当りの振動回数（往復回数） f [1/s]を**振動数**（周波数）という。「想像上の円運動」では，1 [s]当りの回転数に対応する。

注意 3： 振動数の単位の意味は[回/s]だが，JIS，SI では[回]のような単位は書かない約束にしている。振動数の単位 [1/s] には [Hz]（ヘルツ）と名前がついている。

周期： 単振動（8.5）が 1 回振動して元に戻るのに必要な時間 T [s] を**周期**という。「想像上の円運動」では， 1 回転するのに必要な時間に対応する。

単振動の基本的な関係式： 「想像上の円運動」で考える。「1 [s]当りの回転角（ラジアン単位）」である角振動数（角速度）ω [rad/s] に，円周上を一周する時間である周期 T [s] を掛けると，一周の回転角 2π [rad] に等しくなることから，

$$\underline{\omega T = 2\pi} \qquad (8.6)$$

の関係が成り立つ。また，「想像上の円運動」で 1 周するときの回転角 2π [rad] が，現実の単振動では 1 振動することに対応する。 振動数f[Hz]を求めることは，「想像上の円運動」では1 [s]当たりの回転角ω [rad/s]が何周分に相当するか（2π [rad]の何倍か）を求めることに等しいから，

$$\boxed{\underline{f = \frac{\omega}{2\pi}\left(= \frac{1}{T}\right)} \quad \text{または} \quad \underline{\omega = 2\pi f\left(= \frac{2\pi}{T}\right)}} \qquad (8.7)$$

の関係が成り立つ。（これらは波動現象を考える際にも登場する基礎的な関係式である。）

(5) 演習 2： 物体がx軸上を単振動しており，その位置は$x(t) = 2\cos(3\pi t + 0.2\pi)$ [m]だとする。この単振動の，位相$\theta(t)$，振幅$|A|$，角振動数ω，振動数 f，周期 Tを求めよ。さらに時間があれば，この単振動の速度$v(t)$と加速度$a(t)$を求めよ。

(6) 演習 3： 物体がx軸上を単振動しており，その位置$x(t) = 3\cos(4t)$ だとする。この単振動のx-tグラフを描け。（振幅と周期が分かると描きやすい。）

(7) 演習 4： 物体がx軸上を単振動しており，その位置$x(t) = 8\cos(2t + \pi/2)$ [m] だとする。この単振動のx-tグラフを描け。（前回プリントの基本性質（7.5）を使うと，グラフを描きやすい形に式変形できる。）

注意： グラフの平行移動を理解していれば，$x(t) = 8\cos[2(t + \pi/4)]$より，$\tilde{x}(t) = 8\cos[2t]$ のグラフをt軸方向に$-\pi/4$ だけ平行移動すれば，$x(t)$のグラフになることが分かる。$t = -\pi/4$のとき（）の中がゼロになることに注目する。したがって，$t = -\pi/4$の位置を新しい原点だと考えて$\tilde{x}(t) = 8\cos[2t]$ のグラフを描けばよいことが分かる。これがグラフの平行移動の考え方である。