第 6 回授業　レポート課題

今回は，確認テスト 1［仕事、運動エネルギー、位置エネルギー、力学的エネルギーとその保存則］へ向けて解答練習したものをレポートとします。ただしこのレポートは，確認テスト 1 が終了した，授業終了時に集めます。レポート用紙などを用いて，1 枚目の上部に学籍番号と氏名を書く。複数枚の場合は必ずホッチキスで止めること。
＊提出方法や提出場所・期限が通常と異なるので注意せよ。

第 7 回　単振動 1（定性的な理解と三角関数）＋確認試験 1：テキスト第 5，6，10，18，20 章

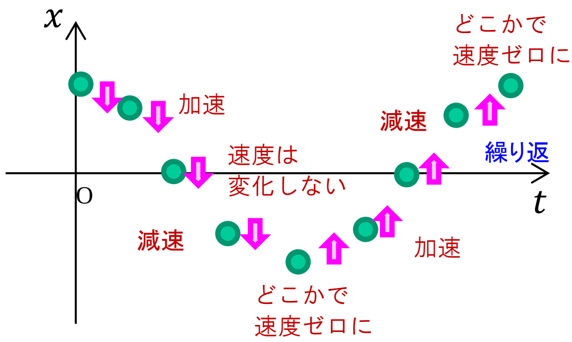
1. 今回の授業の目的

力学 1 で学んだように，力学の目的は『物体の運動を知ること』であり，その目的を達成するための最も基礎となる項目はニュートン力学の 3 つの基本法則（第 5，6 章）である。今後 3 回の授業で，ニュートン力学で実際の運動を理解する具体例として，単振動を理解していく。今回の授業の目的は，単振動を理解する上で欠かせない三角関数の基本的な性質と微分を身に付けることである。

2. 授業の進行：テキスト第 5，6，10，18，20 章とこのプリントを合わせて理解を深める

(1) 振動運動：木や橋が風に吹かれると振動する。車のボディは，エンジン（内のクランクやギアなど）の回転に伴って振動する。身の回りには様々な物体の振動現象が見られ，機械の駆動部分の多くはギアの回転やクランクの振動運動（周期運動）などの組合わせで動作する。振動運動は物体の運動の中でも非常に基礎的で大切な運動である。また，電気回路の交流電流を理解する上で，物体の振動運動に対する理解が非常に役立つ。そこで，今回を含めて 3 回の授業で，物体の振動運動の単純な例として，ばねに結びついた物体の運動（ばねの弾性力だけで生じる振動運動）を考える。これを単振動（あるいは調和振動）という。

準備演習： 単振動の状況設定として，テキスト第 9 章 p.36 の図（上側の図）を考える。物体には，ばねの力だけが働き，摩擦などは無視できるとする。x軸の原点は，ばねの自然長（ばねに何の力も加えない状態での長さ）の位置である。以上の設定で物体が単振動するときの位置（ベクトルのx成分）$x(t)$を考える。この $x(t)$ の時間変動を表す x-t グラフの予測を右図に描け。（必要なら，単振動の振幅を A，周期を Tとしてよい。）



この準備演習の予測グラフ（適切な予測が出来ていれば）は三角関数のグラフであることが，次回の授業で導かれる。つまり，単振動は三角関数で表されることが次回の授業で分かる。

(2) 弧度法・ラジアン（テキスト第 18 章 p.77）： 半径 r の円周上の長さ ℓ の弧を見込む角 θ をラジアン単位（円の弧の長さに基づいて角度の値を決める方法，弧度法）で測るとは，次の定義である。

$$\text{ラジアン単位の角度の定義：}\ \theta = \frac{\ell}{r}\ [\mathrm{rad}] \tag{7.1}$$

この定義（7.1）から，

ラジアンという単位： [rad] = [m/m] = [1]

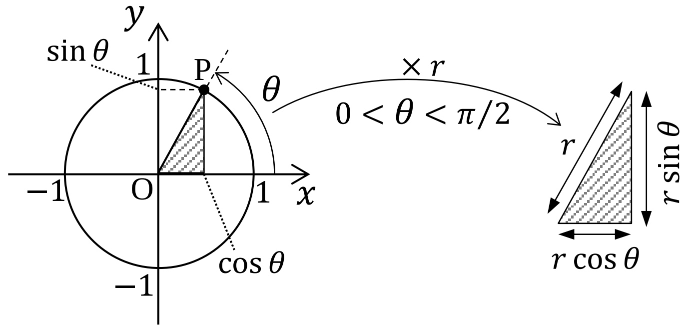
である。ただし，単位の 1 は「単位なし」（難しく言えば 無次元）を意味する。
円周上を一周分のラジアン単位の角度： 円周の長さは $2\pi r$ なので，円一周分のラジアン単位の角度は $2\pi r/r = 2\pi$ である。つまり，角度 360° は 2π [rad] に対応する。
注意：「ラジアン」だけでなく「個数」も単位がない（無次元の）量である。単位なしの量にも幾つか種類があるので，その種類の区別を明確にするために，ラジアンの単位を[1] でなく[rad] と書く。（個数という意味を明示したいときは[個] と書く。）しかし，単位計算では[rad] も[個] も， [1] と同じである。

(3) 三角関数の定義（p.77）： テキスト第 18 章には明確に書いてないが，三角関数を次の定義で理解するのが便利である。なお，単振動の単元では角の値は全てラジアン単位（7.1）で測ることにする
下の図のように，xy面上で半径 1 の円周上で「x軸から左回りに角 θだけ周った位置」の点 P を考える

と，三角関数は次のように定義できる。

三角関数の定義：$\begin{cases} \cos\theta = & ［図の点P　の x 座標］ \\ \sin\theta = & ［図の点P　の y 座標］ \end{cases}$ （7.2）

この定義により，三角関数を**半径１の円（単位円）を描くことで視覚的に理解**できる。
三角関数は図で理解しよう！
補足：　右図に描いたように，点 P の角 $0 < \theta < 2\pi$ [rad] の範囲で，図の斜線部分の直角三角形を相似比 r で拡大（r 倍に拡大）すれば，テキスト第 18 章 p.77 の「三角比」が再現される。



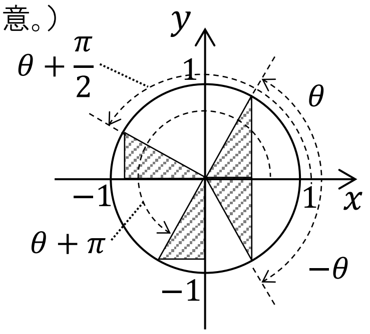
(4) 演習 1（定義から分かる三角関数の基本性質）：演習形式で，三角関数の基本性質を定義から導こう。

(a) 三角関数の定義（7.2）の図で，xy 平面上の点 P の位置ベクトルを $\vec{r}$ とする。この位置ベクトルの大きさ（線分 OP の長さ）を考えることで，三角関数の次の関係式を導け。

$|\vec{r}| = 1$ より，　$\underline{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$ （7.3）

ここで，三角関数の n 乗の書き方の約束は，$(\cos\theta)^n = \cos^n\theta$，$(\sin\theta)^n = \sin^n\theta$，である。

(b) 三角関数の定義（7.2）の図の点 P の位置を，左下図のように角 $-\theta$, $\theta + \pi/2$，$\theta + \pi$ [rad] の位置に変えた場合を考えて，次の関係式を導け。（左下図で斜線部分の直角三角形が全て合同であることに注意。）



$\cos(-\theta) = \cos\theta$　，$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ （7.4）

$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$　，$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$ （7.5）

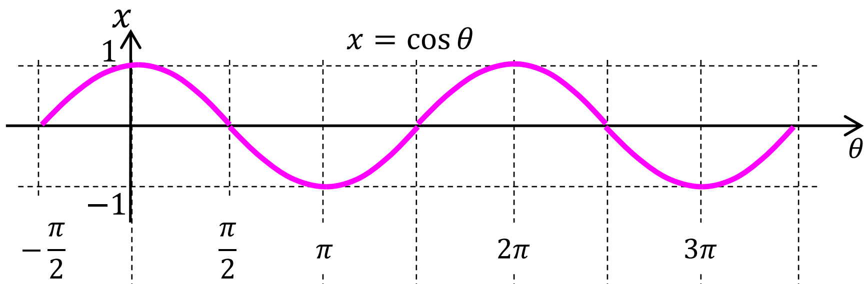
$\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$　，$\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$ （7.6）

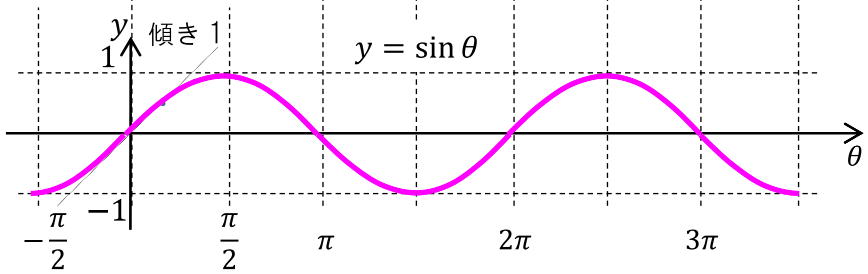
他にも，$\cos(\theta - \pi/2) = \sin\theta$，$\sin(\theta - \pi/2) = -\cos\theta$ などの関係が，合同な直角三角形を適切に考えることで導ける。

(c) 三角関数の定義（7.2）の図の点 P の位置が円周上でグルグル廻る運動を想像して，

$x = \cos\theta$,　　$y = \sin\theta$

のグラフを右図に描け。テキスト p.77 のグラフが再現できることを確かめよ。





三角関数のグラフと，項目(1) の準備演習で描いたグラフが，似ていることを確認せよ。次回の授業で，単振動する物体の位置 $x(t)$ は三角関数になることが運動方程式から導かれる。

(5) 三角関数の周期性：三角関数の定義（7.2）の図で点 P が円周上を一周だけ回った（角が 2π [rad] だけ変化した）場合を考えれば，点 P は元の位置に戻るので，$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$, $\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$ である。さらに，点 P が円周上を左回りに何周しても，右回りに何周しても，元の位置に戻るので，次の関係式を得る。

$\cos(\theta \pm 2\pi n) = \underline{\cos\theta}$　，$\sin(\theta \pm 2\pi n) = \underline{\sin\theta}$　ただし，$n = 1,2,3,\cdots$ （7.7）

ここで，$+2\pi n$ [rad] は，点 P が左回り（θが増える方向）にn周することを意味し，$-2\pi n$ [rad] は，点 P が右回り（θが減る方向）にn周することを意味する。このように三角関数は「角が2π [rad] だけ変化する毎に同じ値に戻る」という周期性をもつ。

(6) 演習 2： 以下の問題に取り組む

(d) 変数xの方程式 $\cos(x) = 1/2$ を解け。ただし，定義（7.2）のような**半径 1 の円周（単位円）を描き，点 P の位置を適切に設定し，その図から方程式の答えを読み取る**こと。つまり，**答案には図が必要**である。

注意： この方程式の変数xは，定義（7.2）の図のxy座標のxとは違う！！ 変数がxやyの方程式を解く際には，定義（7.2）の図を（例えば）s軸とt軸で描くst面（xをsに置き換え，yをtに置き換え）などに変更して，記号の混乱を避けること！！

(e) 関数 $f(x) = 3\cos(9x + 7)$ の「変数xに関する周期」を求めよ。（変数xの値が幾ら変化したら関数 $f(x)$の値はもとに戻るかということ。）項目(5) から，三角関数$\sin\theta$ ，$\cos\theta$の角 θ（今の場合は$\theta = 9x + 7$）の周期は2πであることに注意して考えよ。

ヒント（答案例の途中まで記載）：$\theta(x) = 9x + 7$とすると，$f(x) = 3\cos\theta(x)$ である。さらに，求める「変数xに関する周期」をpとすると，$f(x + p) = f(x)$でなければならない。よって（項目(5) より），

$$f(x + p) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \theta(x + p) = \theta(x) + 2\pi$$

だと分かる。（ここまでは答案の最初の部分としてよい。答案の続きを自力で作成せよ。）

(7) 三角関数の微分： 第 20 章 p.83 に掲載されている三角関数の微分は，微分の定義（力学 1 参照）

$$\boxed{\text{関数 } f(x) \text{の微分（導関数）の定義：} \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \qquad (7.8)$$

から導ける。その導出は数学の授業で学んでもらうことにして，以下では三角関数の微分をグラフに基づいて視覚的に把握する。（正確な把握は，数学の授業で学ぶように，微分の定義に従った計算である。）

三角関数のグラフの接線：力学 1 で学んだように，微分はグラフの接線の傾きに対応する。項目(4) の問題(c) で描いたグラフから，三角関数の微分の符号（接線の傾きの符号）が次の表のようになることを確認せよ。（参考のために三角関数そのものの符号も記載。）

θ	…	$-\frac{\pi}{2}$	…	0	…	$\frac{\pi}{2}$	…	π	…	$\frac{3\pi}{2}$	…	2π	…	$\frac{5\pi}{2}$	…	3π	…	$\frac{7\pi}{2}$	…
$\frac{\mathrm{d}[\cos\theta]}{\mathrm{d}\theta}$	+	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+
$\sin\theta$	−	−	−	0	+	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+	0	−	−	−
$\cos\theta$	−	0	+	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+	0	−	−	−	0	+
$\frac{\mathrm{d}[\sin\theta]}{\mathrm{d}\theta}$	−	0	+	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+	0	−	−	−	0	+

三角関数の微分：上の表から$\left\{\begin{array}{l}\text{微分 } \dfrac{\mathrm{d}[\cos\theta]}{\mathrm{d}\theta} \text{の符号は } \sin\theta \text{と逆符号で周期的に変動} \\ \text{微分 } \dfrac{\mathrm{d}[\sin\theta]}{\mathrm{d}\theta} \text{の符号は } \cos\theta \text{と同符号で周期的に変動}\end{array}\right.$ が読み取れる。

これを踏まえると，次の三角関数の微分に現れる符号が理解できる。（微分の正確な導出は，数学の授業で学ぶように，微分の定義に基づいて計算しなければならない。）

$$\boxed{\text{三角関数の微分：} \frac{\mathrm{d}[\cos\theta]}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}[\sin\theta]}{\mathrm{d}\theta} = \cos\theta} \qquad (7.9)$$

学生には，この微分を覚えて使えるようになることを要請する。

注意：三角関数の微分（と積分）を扱うときは，角度は必ずラジアン単位で表さなければならない。な

ぜならば，横軸の単位が変わると数値が変わり，傾きも変わってしまうからである。微分がグラフの接線の傾きを求める計算であったことを思い出せ。（横軸の数値が2πから360に変わると傾きがどう変化するか考えよ。）

(8) 演習 3：第 20 章，問題演習 20 の問題 20-9（p.86）に取り組む。

(9) 演習 4：変数 tの関数 $f(t) = 3\cos(9t+7)$ ， $g(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$ ， $h(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$ の微分を求めよ。（A，ω，αは定数）　※合成関数の微分の公式（テキスト 84 ページ）を使う。

$f(t)$の微分の計算だけ解答例を示すので，$g(t)$，$h(t)$ の微分を同様に実行せよ。

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}[3\cos(9t+7)]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}[3\cos\theta]}{\mathrm{d}t} = 3\cdot\frac{\mathrm{d}[\cos\theta]}{\mathrm{d}t} \qquad \text{ただし，} \theta = 9t+7$$

$$= 3\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}[\cos\theta]}{\mathrm{d}\theta} \quad \Leftarrow$$

微分は元々，[微小量]／[微小量]，という分数の意味を持っているので，$\mathrm{d}\theta$という微小量を分母と分子に敢えて登場させた。これで，三角関数の微分（7.9）が利用できる形が見えてきた。

$$= 3\cdot\frac{\mathrm{d}[9t+7]}{\mathrm{d}t}\cdot(-\sin\theta) = 3\times 9\cdot(-\sin\theta) = -27\sin(9t+7)$$

(10) 演習 5：上の演習の関数 $g(t)$，$h(t)$ の 2 階微分を計算して，次の重要な性質を導け。（A，ω，αは定数）

$$\boxed{\text{三角関数の微分の重要な性質：}\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2[A\cos(\omega t+\alpha)]}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t+\alpha)\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}^2[A\sin(\omega t+\alpha)]}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 A\sin(\omega t+\alpha)\end{cases}} \qquad (7.10)$$

三角関数を 2 階微分すると「元の関数のマイナス定数倍」になる。

(11) 次回の単振動を理解する上で必要な定理： 微分の性質(7.10) から次の定理が得られる。

定理：変数tの未知関数$x(t)$が，次の微分を含む関係式（微分方程式）を満たすことが分かったとする。

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -cx(t) \qquad \text{ただし，}c\text{は正の定数（}c>0\text{）}$$

この場合，三角関数の性質（7.10）より，関数$x(t)$は必ず次の三角関数，

$$x(t) = A\cos(\sqrt{c}t + \alpha) \qquad \text{（}A\text{，}\alpha\text{は定数）}$$

で表すことができる。[定理終わり]

注意 1：不定積分の積分定数と同様に，初期条件が与えられれば定数 A，α の具体的な値が求まる。この定数 A，α も「積分定数」と言ってよい。

注意 2：上記の定理の記述では，$x(t) = A\cos(\sqrt{c}t+\alpha)$と cos で答えを表したが，$x(t) = A\sin(\sqrt{c}t+\alpha)$ と sin で表してもよい。項目(4) の基本性質（7.5）から分かるように，cos と sin のどちらで$x(t)$ を表したかに応じて，積分定数 A，α の具体的な値が修正されるだけである。

注意 3：この定理は，(7.10) の ω が，関係式（方程式）中のcを用いて $\sqrt{c}$ で表されることを示している。ただし，次回以降力学 2 の授業では，この定理を暗記して ω を求めるのではなく，ωが$\sqrt{c}$で表されることを，運動方程式を解く手順の中で微分を用いて示すことを要求する。したがって，微分公式（7.9）と「合成関数の微分の公式」は絶対に覚えること。

(12) 各自で確認しておくこと。360°＝2π [rad] より，

180° ＝ $\underline{\pi}$ [rad]　　90° ＝ $\underline{\frac{\pi}{2}}$ [rad]　　45° ＝ $\underline{\frac{\pi}{4}}$ [rad]

120° ＝ $\underline{\frac{2\pi}{3}}$ [rad]　　60° ＝ $\underline{\frac{\pi}{3}}$ [rad]　　30° ＝ $\underline{\frac{\pi}{6}}$ [rad]