

第4回授業 レポート課題

テキスト (p.57~59) の問題演習 12 から：問題 12-1(5)を「地面より 5.0[m]低い位置にある」, (6)を「自然長から 0.30[m]縮めたとき」, に変更して答えよ。(5)改で地面から 5.0[m]低い位置まで落ちるときに取り出すことができる仕事, (6)改で自然長から 0.30[m]縮めるときにばねに与える仕事を求めよ。問題 12-9 を解け。問題 12-9 (5) は, 力がどのように働くかを正確に見抜く必要があり, 理解度の深さが問われる問題である。この問題 12-9 の答案を (ヒントなしで) 適切に分かりやすく作成できれば, 保存力と位置エネルギーに関する理解に対して一定の自信をもって良い。(追加の間(3.5)と間(4.5)はヒントである。)

注意 1: 計算式だけでなく, 説明文 (必要なら適切な図も) を加えて答案を作成すること。答案作成力も見る。
注意 2: 最初はこの問題がよく解けなかったとしても構わない。しかし, 次の確認テストまでに何度も復習し, 適切な答案を作れるようにすることを強く勧める。

提出×切: 答案用紙を, 授業と同じ週の金曜日 (13:00) までに提出

提出場所: D0308 (原科) 研究室前のレポート提出用の木箱

注意事項: 自分の答案をノートに記入するか, コピーをとって, 次の授業に持ってくる。

第5回 力学的エネルギーとその保存則: テキスト第13章**1. 今回の授業の目的**

力学 2 の前半は, 力学的エネルギーの理解を目指している。前回までの授業で, 力学的エネルギーを理解する準備がそろった。今回の授業の目的は, 力学的エネルギーと, 力学的エネルギー保存則を理解することである。

2. 授業の進行: テキスト第13章とこのプリントを合わせて理解を深める

(1) 状況設定: テキスト第13章 p.60 の図 (3つある) のように, 物体に様々な力が働いて運動する場合を考える。

今回は, 摩擦力や空気抵抗 (非保存力) が働いて仕事をする場合と仕事をしない場合の区別が重要になる。(テキストには, 物体に保存力だけが働く場合の力学的エネルギーの扱っただけが説明されており, 非保存力も働く場合の力学的エネルギーの扱いが説明されていない。テキストを見る際に注意する。)

(2) 力学的エネルギー (第13章 p.60): 物体に保存力がいくつか働き (重力とばねの力と電気力など), その合力を \vec{F}_C とし, それぞれの保存力による位置エネルギーの和を U とする。物体に働く非保存力 (摩擦力と空気抵抗など) の合力を \vec{F}_n とする。また, 物体の速度を \vec{v} とする。前回の授業まで以下の3つが分かった:

- 非保存力 \vec{F}_n による仕事は物体からエネルギーを奪ったり, 物体にエネルギーを与えたりするが, 位置エネルギーとみなすことはできない。(例えば, 熱や音などの形で物体のエネルギーを奪う。エンジンの動力として物体にエネルギーを与える。)
- 保存力 \vec{F}_C による仕事は位置エネルギーの和 U として物体に蓄えられる。
- 速度 \vec{v} で運動しているとき, 運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ が物体に蓄えられている。

運動に伴って物体に蓄えられるエネルギーに注目しよう。運動とは, 位置の変化と速度の変化である。この物体に蓄えられるエネルギーの総和を力学的エネルギーという。力学的エネルギーは, 運動エネルギーと各種の位置エネルギーの総和である。

$$\text{力学的エネルギー: } E = K + U \quad [\text{J}] \quad \text{ただし, } \begin{cases} K = \frac{1}{2}mv^2 & (\text{運動エネルギー}) \\ U = \text{「各種の位置エネルギーの和」} \end{cases} \quad (5.1)$$

(3) 演習 1: 次の2問に取り組む。この演習は, 項目(4)の「力学的エネルギー保存則」への導入である。

(a) テキスト第11章の問題演習, 問題 11-8 (p.52) の設定で考える。(前回の授業で扱った問題である。)

以下の問いでは, 斜面に沿って距離 l だけ滑り降りた位置を, 重力による位置エネルギーの基準 (位置エネルギーがゼロの高さ) とする。

a-1) 物体が斜面をすべり降りる前に持つ力学的エネルギー E_1 を求めよ。

a-2) 物体が滑らかな斜面に沿って距離 l だけすべり降りたときに持つ力学的エネルギー E_2 を求めよ。

そして、斜面が滑らかな場合（非保存力が仕事をしない場合）は、 $E_1 = E_2$ となることを確かめよ。

(b) 今度は、問題 12-8 で、斜面が滑らかでなく物体との間に動摩擦力が働き、動摩擦係数 $\mu' = 1/10$ とする。重力による位置エネルギーの基準は問(a)と同じである。この場合、物体がすべり降りる前に持つ力学的エネルギー E_1 は（速度ゼロなので）問(a)の E_1 と同じである。

b-1) 物体に働く動摩擦力 \vec{f} の大きさ f を求めよ。また、 \vec{f} を表す矢印をテキスト p.52 と同じ図に描け。

b-2) 物体が斜面に沿って距離 l だけ滑り降りる間に、動摩擦力 \vec{f} が物体に与える仕事 W_f を求めよ。この W_f が負の値の場合、物体が初めに持つ力学的エネルギー E_1 のうち、絶対値 $|W_f|$ だけのエネルギーが摩擦熱などによって消費される（奪われる）ことを意味する。

b-3) 物体が斜面に沿って距離 l だけ滑り降りたときに持つ力学的エネルギー E_2' を求めよ。そして、斜面が滑らかでない場合（非保存力が仕事をする場合）は、 $E_1 \neq E_2'$ であることを確かめよ。

(4) 力学的エネルギー保存則（第 13 章 p.60）： 項目(3)の問題演習では、保存力の具体例として重力、非保存力の具体例として摩擦力（空気抵抗は無視した）、垂直抗力を扱った。この問題演習から、重力と摩擦力、垂直抗力に限らず、一般に次のようになることが予想される。

非保存力が仕事をする場合： 物体が初めに持っている力学的エネルギーを E_1 、何らかの運動をした後に持つ力学的エネルギーを E_2 、非保存力の仕事を W_n とする。物体が運動中に摩擦力のような非保存力によって（熱や音などの形で）消費した（奪われた）エネルギーは $Q = -W_n$ であり（プリント最後の補足 3 も参照）、運動前後の力学的エネルギーの関係は $E_2 = E_1 + W_n = E_1 - Q$ となる。（非保存力によってエネルギーが奪われるとき $W_n < 0$ 、エネルギーが与えられるとき $W_n > 0$ である。補足 1 を参照。）

非保存力が仕事をしない場合： 非保存力によってエネルギーが奪われ（与えられ）ないので、物体が持つ力学的エネルギーの値は変化しない。物体が初めに持っている力学的エネルギーを E_1 、運動後に持つ力学的エネルギーを E_2 とすると、 $E_2 = E_1$ である。

これらの予想が実際に正しいことは既に証明されている（項目(6)で示す）。まとめると、次の法則を得る：

力学的エネルギー保存則：

物体に保存力だけが働く場合（または非保存力が仕事をしない場合）、運動のあいだ常に、 (5.2)
物体が持つ力学的エネルギーの値が不変 ($E = K + U = \text{一定}$) である。

この力学的エネルギー保存則で、保存力として重力だけを考える場合、ばねの力だけを考える場合、重力とばねの力を考える場合、の 3 例がテキスト p.54 に示されているので、確認せよ。

注意 1： 力学的エネルギー保存則は、非保存力が仕事をしなければ『 E の値が不変』と言っているものであり、決して運動エネルギー K あるいは位置エネルギー U の値が不変とは言っていない。

例えば $E = 100$ [J] の場合、非保存力が仕事をしなければ、物体の運動中は任意の時刻 t において、 $E(t) = 100$ [J] であるが、運動エネルギー $K(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2$ の値と位置エネルギー $U(t)$ の値は時々刻々と変化することもある。ただし、非保存力が仕事をしない場合、 $K(t)$ と $U(t)$ の時間変化の仕方は『足すと一定： $E = K(t) + U(t) = \text{一定}$ 』となるように絶妙に調整されるのである。非保存力が仕事をすると、そのような絶妙な調整はなく、 $K(t)$ と $U(t)$ だけでなく $E(t)$ も時々刻々と変化し得る。

補足 1： 物体に非保存力が仕事をして、運動中にエネルギーが（熱や音などの形で） Q だけ奪われると、運動前の力学的エネルギー $E_{\text{前}}$ と運動後の力学的エネルギー $E_{\text{後}}$ は、

$$[\text{エネルギーが } Q \text{ だけ散逸する（奪われる）場合}] : E_{\text{後}} = E_{\text{前}} - Q \quad (5.3)$$

となる。

また（摩擦力や空気抵抗の有無に関わらず）運動中に、他の物体に押し引きされたり、衝突されたりして（速度が増加して）エネルギーが与えられる場合もある。他の物体などから付与されるエネルギー（仕事）を W_n とすると、付与前の力学的エネルギー $E_{\text{前}}$ と付与後の力学的エネルギー $E_{\text{後}}$ は、

$$[\text{エネルギーが } W_n \text{ だけ与えられる場合}] : E_{\text{後}} = E_{\text{前}} + W_n \quad (5.4)$$

となる。他の物体との衝突による衝撃力なども、非保存力の一つとみなせる。

以上のように、エネルギーの様々なやりとりを考える上で最も基本的な量の 하나가、力学的エネルギーである。物理の工学的応用において、エネルギーの考え方は大変重要な要素になるので、力学的エネルギーを十分に良く理解しておく必要がある。

(5) 演習 2: 問題演習 13 の問題 13-1(1)(3)(5) (p.61), 13-4 (p.62), 13-8 (p.63) に取り組む。

補足 2: 問題 13-4 のような投げ上げ運動は、力学 1 では運動方程式を使って解いた。力学 1 では (1 回目授業で復習したように) 運動方程式と力の法則から加速度を導き、積分を繰り返して速度、位置を得た。そして、放物運動の頂点の高さや速度だけでなく、頂点に来る時刻まで含めて、運動の様子が完全に把握できた。一方、今回のようにエネルギーを使う方法だけでは、積分は行なわないので計算の難易度は下がったものの、頂点に来る時刻は計算できない。『エネルギーを使うと積分計算をいくつか回避できるが、運動の情報の一部が計算できない』ことになる。積分計算はいつでも容易に実行できるとはかぎらない。『エネルギーを使うと積分計算を回避して、運動の情報の一部が得られる』ことはとても大きなメリットである。

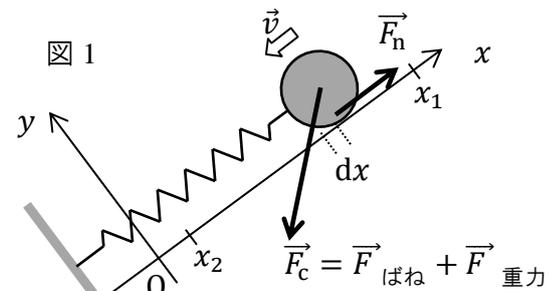
(6) 力学的エネルギー保存則の証明 (導出): 探究的内容

これは授業時間が足りない場合は省略。その場合、各自でチャレンジしてほしい。この証明を十分理解することは、今後の専門科目にとって十分な基礎力を培う。

状況設定を単純化して、物体が x 軸上を運動する場合を考えよう。 x 軸は、水平でも鉛直でも斜面上でも、どの方向でもよい。図 1 には一例として、斜面上で、ばねに結び付いた物体が、ばねの力と重力 (保存力) さらに摩擦力和空気抵抗 (非保存力) が働きながら運動する場合を例として描いた。

以下の設定で考える:

- 物体に働く保存力の合力: $\vec{F}_C = (F_{Cx}(x), 0)$
→ 物体の位置によって変化し得る。(例: ばねの力)
- 物体に働く非保存力の合力: $\vec{F}_n = (F_{nx}(x), 0)$
→ 物体の位置によって変化し得る。
(例: 動摩擦係数が位置によって変わる場合)
- 運動の初めの位置: $x = x_1$ と速度: $\vec{v}_1 = (v_{1x}, 0)$
- 運動の終わりの位置: $x = x_2$ と速度: $\vec{v}_2 = (v_{2x}, 0)$
- 位置エネルギーの基準の位置: $x = x_0$! 注: x_0, x_1, x_2 の間の大小関係に制限はない。



この設定で、初めの位置 x_1 から終わりの位置 x_2 まで物体が運動する間に、物体に働く全ての力の和が物体に与える仕事 W は、前々回 (3 回目授業) のプリント項目 (4) の式 (3.4) で計算できて (微小仕事を足し上げて定積分),

$$W = \int_{x_1}^{x_2} (F_{Cx}(x) + F_{nx}(x)) dx = \int_{x_1}^{x_2} F_{Cx}(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} F_{nx}(x) dx \quad (5.5)$$

まず、この右辺の第 1 項を考える。第 1 項 $\int_{x_1}^{x_2} (F_{Cx}(x)) dx$ は保存力の定積分である。前回の授業で学んだように、保存力が物体に与える仕事 (位置エネルギー) は、最初と最後の位置を変えなければ、途中の移動経路をどのように変更しても構わないのである。そこで、式 (5.5) の第 1 項の定積分の経路を $x = x_1 \rightarrow x_2$ から $x = x_1 \rightarrow x_0 \rightarrow x_2$ のように基準点 x_0 を通過するように変更しても、第 1 項の積分の値は変わらない。

$$\text{式 (5.5) の右辺第 1 項: } \int_{x_1}^{x_2} F_{Cx}(x) dx = \int_{x_1}^{x_0} F_{Cx}(x) dx + \int_{x_0}^{x_2} F_{Cx}(x) dx$$

ところで、前回プリントの項目 2 の (6) の式 (4.5) より、次のように位置エネルギー $U(x)$ と関係が付く。

$$\int_{x_1}^{x_0} F_{Cx}(x) dx = U(x_1) = U_1 \quad \text{とおく}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} F_{Cx}(x) dx = - \int_{x_2}^{x_0} F_{Cx}(x) dx = -U(x_2) = -U_1 \quad \text{とおく}$$

(一つ目の等号では 3 回目授業プリントの式 (3.7) 参照)

従って、次のようになる。

$$\text{式 (5.5) の右辺第 1 項: } \int_{x_1}^{x_2} F_{Cx}(x) dx = U_1 - U_2 \quad (5.6)$$

次に、式 (5.5) の右辺の第 2 項を考えると、これまさに非保存力 \vec{F}_n が物体に与える仕事 W_n である。

$$\text{式 (5.5) の右辺第 2 項: } \int_{x_1}^{x_2} F_{nx}(x) dx = W_n \quad (5.7)$$

さらに、式 (5.5) の左辺を考える。初めの位置での速度 \vec{v}_1 と終わりの位置での速度 \vec{v}_2 を使うと、前々回 (3 回目) プリントの項目(5) の式 (3.5) で学んだ、仕事と運動エネルギーの関係が成立する。

$$\text{式 (5.5) の左辺: } W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = K_2 - K_1 \quad \text{とおく} \quad (5.8)$$

以上、式 (5.6), (5.7), (5.8) を式 (5.5) に代入すると、

$$K_2 - K_1 = U_1 - U_2 + W_n \iff K_1 + U_1 + W_n = K_2 + U_2$$

よって、運動の初めと終わりの力学的エネルギーをそれぞれ E_1 , E_2 とすると、

エネルギー収支の式: $E_1 + W_n = E_2$

(5.9)

これは、注目する物体が始めに持つエネルギー E_1 と運動中に周りの物体や環境とやりとりするエネルギー (= 仕事) W_n を全て足せば、終わりのエネルギー E_2 になることを意味する。つまり、注目する物体だけでなく他の物体や環境を含めて全てを考えれば、全体のエネルギーの収支はバランスが取れている (何も無いところからエネルギーだけ湧き出したり無くなったりはしない) ことを意味する。(熱力学の「熱力学第 1 法則」に関連していく事実である。)

ここまでは、非保存力も仕事をする一般的な場合を考えてエネルギー収支の式 (5.9) を導いてきた。ここで、非保存力が仕事をしない場合を考えよう。この場合、仕事 $W_n = 0$ となる。従って、エネルギー収支の式 (5.9) より、

$$\text{非保存力仕事をしない場合: } W_n = 0 \implies E_1 = E_2 \quad (5.10)$$

これは、非保存力が仕事をしない場合は注目している物体の力学的エネルギーが不変であることを意味する。力学的エネルギー保存則 (5.2) が導けた。[証明終わり]

補足 3: 摩擦力によって熱や音などの形でエネルギーが消費される (奪われる) こと (エネルギー散逸) を、エネルギー収支の式 (5.9) の仕事 W_n との関連で理解しておこう:

熱は、物体がすべる床などを構成する要素 (原子や分子などの小さな素片) が、乱雑な振動運動によって持つ力学的エネルギーである。音は空気の振動で、この空気分子も力学的エネルギーを持つ。したがって、摩擦によって熱や音が発生するということは、物体の周辺環境の構成要素 (床や空気) に力が加わって運動が引き起こされていることを意味する。その力は、注目する物体に働く摩擦力 \vec{F}_n の反作用 $-\vec{F}_n$ である (作用・反作用の法則を参照)。よって、熱や音のエネルギー Q は、摩擦力の反作用 $-\vec{F}_n$ が周辺環境に与える仕事に等しい。 (式 (5.7) 参照)

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} -F_{nx}(x) dx = -W_n$$

これが、項目(4) の「非保存力が働く場合」の中に現れる関係式 $Q = -W_n$ である。

摩擦力は機械製品や建築物の様々な要素 (部材) の働きを理解する上で極めて基礎的な要素である。ネジやナットを絞めて部材を固定する重要な力の一つは摩擦力である。部材の運動を止めたり (ブレーキ)、止まっている部材を動かしたりする際に、部材に直接的に働く力の一つは摩擦力である。また、摩擦によるエネルギー散逸は、エンジンや発電機のエネルギー生成効率を下げる大きな要因の一つである。このように、工学において摩擦は重要である。摩擦力に対する理解を深めることは、工学を学ぶ上で役立つだろう。