

第 3 回授業 レポート課題

テキスト (p.57～58) の問題演習 12 の

問 1 : 問題 12-2 (ただし問題文に「…物体に水平方向に 5.0N の一定の…」と追加修正する。), 問 2 : 問題 12-4, 問 3 : 問題 12-7, 仕事と運動エネルギーを使って解け。

注意 1 : 計算式だけでなく, 説明文 (必要な適切な図も) を加えて答案を作成すること。答案作成力も見る。

注意 2 : 最初はこの問題がよく解けなかったとしても構わない。しかし, 次の確認テストまでに何度も復習し, 適切な答案を作れるようにすることを強く勧める。

提出〆切 : 答案用紙を, 授業と同じ週の金曜日 (13:00) までに提出

提出場所 : D0308 (原科) 研究室前のレポート提出用の木箱

注意事項 : 自分の答案をノートに記入するか, コピーをとって, 次の授業に持ってくる。

第 4 回 位置エネルギー : テキスト第 12, 20, 23 章**1. 今回の授業の目的**

力学 2 の前半では力学的エネルギーの理解を目指す。前回と前々回でそれぞれ『仕事』と『運動エネルギー』を扱った。今回の授業の目的は, 位置エネルギー (とそのために不可欠な保存力と非保存力も合わせて) を理解することである。次回に力学的エネルギーを扱う。

2. 授業の進行 : テキスト第 12, 20, 23 章とこのプリントを合わせて理解を深める

(1) 今回の概要 : 前は, 仕事の定義式に現れる力 $\vec{F}$ に運動方程式 $\vec{F} = m\vec{a}$ を適用することで, 仕事を速度で表し (前回プリント項目 2 の (5) の式 (3.5)), そして運動エネルギー (前回の式 (3.6)) という考え方に到達した。今回は, 仕事の定義式に現れる力 $\vec{F}$ に (運動方程式でなく) 力学 1 で学んだ何種類かの具体的な力を適用し, 位置エネルギーという考え方を学ぶ。その位置エネルギーの理解に必要な不可欠なことは, 様々な種類の力が大きく 2 つのグループ, 『保存力 (例 : 重力, バネの力, 電気力)』あるいは『非保存力 (例 : 摩擦力, 空気抵抗)』に分けられることの理解である。(テキストには, エネルギーにおける非保存力の役割はきちんと説明されていないので, テキストを見る際に注意すること。)

(2) 保存力と非保存力 (第 12 章 p.55) : 物体に力が働いて, 初めの位置 $\vec{r}_1$ (時刻 t_1 の位置) から最後の位置 $\vec{r}_2$ (時刻 t_2 の位置) に移動したとする。この移動の間に力が物体に与える仕事 W の値が, 物体の移動経路の形によって変わるかどうかで, 力を大きく 2 種類に分ける。

保存力 (というグループ) : 『初めの位置 $\vec{r}_1$ と最後の位置 $\vec{r}_2$ を変えなければ, 途中の移動経路が変わっても力が物体に与える仕事の値 W が変わらない』ような力を保存力 (というグループに属する) という。保存力の例は, 重力, バネの力, 電気力など。

→ 大雑把には, 力の法則 (力のベクトル $\vec{F}$ を決める公式) が速度に依存しないような力は保存力だと思ってよいだろう。(例外もある。) 重力もバネの力も (基礎物理 A を受講している学生は電気力も) 力の法則は速度に依存しないことを確認せよ。

非保存力 (というグループ) : 『初めの位置 $\vec{r}_1$ と最後の位置 $\vec{r}_2$ を変えなくても, 途中の移動経路が変わると力が物体に与える仕事の値 W も変わる』ような力を非保存力 (というグループに属する) という。非保存力の例は, 摩擦力, 空気抵抗, 張力, 垂直抗力など。

→ 大雑把には, 力の法則 (力のベクトル $\vec{F}$ を決める公式) が速度に依存するような力は非保存力だと思ってよいだろう。(例外もある。) 摩擦力も空気抵抗も力の向きは速度と逆向き, つまり速度に依存して力のベクトルが決まることを確認せよ。

重力が保存力であること : 図 1 のように, 物体を軌道 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ に沿って運動させる場合と, 軌道 $A \rightarrow E \rightarrow D$ に沿って運動させる場合を考える。(物体の質量は m , 重力加速度の大きさは g , x 軸は水平方向, y 軸は鉛直上向きである。) これらの運動中に (手で持つ力など様々な力が物体に働くが, 特に) 重力 $\vec{F}_g = (0, -mg)$ が物体に与える仕事に注目し, 軌道 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$

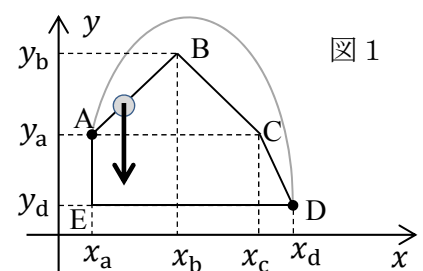


図 1

の場合の仕事 W_{ABCD} と軌道 $A \rightarrow E \rightarrow D$ の場合の仕事 W_{AED} が等しいことを導く。

- 図1の $A \rightarrow B$ の上昇部分における仕事 W_{AB} は(重力と鉛直移動のなす角が鈍角で、 $s \cos \theta = -(y_b - y_a)$ なので) $W_{AB} = -mg(y_b - y_a) < 0$ であり、 $B \rightarrow C$ の下降部分における仕事 W_{BC} は(重力と鉛直移動のなす角が鋭角で、 $s \cos \theta = (y_b - y_a)$ なので) $W_{BC} = mg(y_b - y_a) > 0$ である。よって、 $A \rightarrow B \rightarrow C$ と運動する間の仕事は打ち消しあうてゼロになる： $W_{ABC} = W_{AB} + W_{BC} = 0$
- したがって、運動全体の仕事は、 $W_{ABCD} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} = W_{CD}$ である。ここで、 W_{CD} は $C \rightarrow D$ の運動部分だけの仕事であり、 W_{BC} と同様に考えて $W_{CD} = mg(y_a - y_d)$ である。よって、 $W_{ABCD} = mg(y_a - y_d)$ である。

次に、軌道 $A \rightarrow E \rightarrow D$ の仕事 W_{AED} を計算する。

- 重力 $\vec{F}_g$ は常に鉛直下向きなので、 $A \rightarrow E$ の部分の仕事 W_{AE} は(重力と移動方向が同じ向きなので)正の値 $W_{AE} = mg(y_a - y_d)$ となり、 $E \rightarrow D$ の部分の仕事 W_{ED} は(重力と移動方向が垂直なので)ゼロ $W_{ED} = 0$ である。よって、 $W_{AED} = W_{AE} + W_{ED} = mg(y_a - y_d)$ である。

以上から、 $W_{ABCD} = W_{AED} = mg(y_a - y_d)$ となる。

点Aと点Dを結ぶ軌道が図1の2つだけでなく、どんな曲線軌道であっても、重力が物体に与える仕事 $W_{A \rightarrow D}$ という同一の値になることが証明できる。(曲線軌道を微小な階段に分解することで計算する。階段の水平部分と鉛直部分をどんどん短くし、階段の数をどんどん増やせば、曲線軌道になる。)

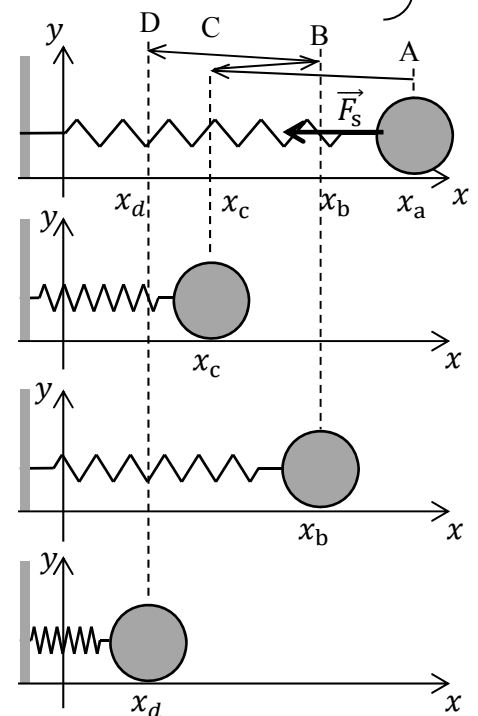
これは、重力が保存力であることを意味する。

ばねの力が保存力であること：図2のように、ばねに結び付いた物体を位置 $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D$ の順にBC間で一往復してAからDに運動させる場合と、位置 $A \rightarrow D$ の順に往復せず素直にAからDに運動させる場合を考える。(ばね定数は k 、ばねの自然長からの伸びは x である。)これらの運動中に(手で持つ力など様々な力が物体に働くが、特に)ばねの力 $\vec{F}_s = (-kx, 0)$ が物体に与える仕事に注目し、路 $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D$ の場合の仕事 W_{ACBD} と経路 $A \rightarrow D$ の場合の仕事 W_{AD} が等しいこと $W_{ACBD} = W_{AD}$ を導く

- 往復経路の仕事は $W_{ACBD} = W_{AB} + W_{BCB} + W_{BD}$ と分解できる。ただし、 W_{AB} は物体が $A \rightarrow B$ と移動する間に力 $\vec{F}$ が(物体に)与える仕事、 W_{BCB} は物体が $B \rightarrow C \rightarrow B$ とBC間を一往復する間の仕事、 W_{BD} は物体が $B \rightarrow D$ と移動する間の仕事である。よって、一往復の仕事 $W_{BCB} = 0$ を示せば、 $W_{ACBD} = W_{AB} + W_{BD} = W_{AD}$ となり、 $W_{ACBD} = W_{AD}$ が導ける。

- 一往復の仕事 W_{BCB} がゼロであることを示そう。そのために、BC間の微小距離(図2参照)だけ物体が移動する間の微小仕事 $dW_{BCB} = -kx dx$ に注目する。物体が $B \rightarrow C$ の向きに移動する場合、 x が減少するので変化量は負 $dx < 0$ となり、 $dW_{BCB} > 0$ である(力と移動方向が同じ向きなので仕事が正であることに合致する)。また、物体が $C \rightarrow B$ の向きに移動する場合、 x が増えるので変化量は正 $dx > 0$ となり、 $dW_{BCB} < 0$ である(力と移動方向が逆向きなので仕事が負であることに合致する)。よって、ある微小区間(例えば図2に示す dx の区間)を左向きに動く場合の微小仕事 $dW_{BCB} (> 0)$ と右向きに動く場合の微小仕事 $dW_{BCB} (< 0)$ は、絶対値は等しいが($|dW_{BCB}| = |kx dx|$)符号が逆なので、足すとゼロである。ところで、一往復の仕事 W_{BCB} は、微小仕事 dW_{BCB} を一往復 $B \rightarrow C \rightarrow B$ の間で足し上げたもの(積分)である。従って、 $B \rightarrow C$ 向きの微小仕事と $C \rightarrow B$ 向きの微小仕事が打ち消しあう(足してゼロである)ことから、一往復の仕事はゼロである。 $W_{BCB} = 0$ が示せた。

図2



以上のように、一往復の仕事 $W_{BCB} = 0$ なので、 $W_{ACBD} = W_{AD}$ が成立することが分かる。同様に、点 A から D への移動経路が BC 間の一往復だけでなく様々な任意の往復をする経路であっても、ばねの力が物体に与える仕事は往復しない経路の仕事 W_{AD} に等しいことが分かる。これは、ばねの力が保存力であることを意味する。

摩擦力が非保存力であること： テキスト問題演習 12 の問題 12-5 は、摩擦力が非保存力であることを示す具体例である。物体の移動経路が、素直に直進するか、一度折り返すかで、摩擦力が物体に与える仕事の値が異なることが分かる。また、摩擦のある面上を物体が曲線軌道を描いても、摩擦力は常に速度と逆向きの力なので、重力のように微小仕事がゼロになったり、ばねの力のように往復運動で仕事が打ち消すようなことは起こらず、物体の移動距離が長くなればなるほど摩擦力の仕事は大きくなる。従って、初めの位置 x_1 ($\vec{r}_1$) と最後の位置 x_2 ($\vec{r}_2$) が同じでも途中の経路の長さによって摩擦力が物体に与える仕事の値は異なる。これは、摩擦力が非保存力であることを示す。

確認演習： 問題演習 12 の問題 12-5 に再び取り組み（前々回レポートの解答を確認し）、摩擦力が非保存力であることを確かめよ。

(3) 位置エネルギー（保存力が物体に与える仕事、第 12 章 p.55～56）：物体が初めの位置 $\vec{r}$ から基準点 $\vec{r}_0$ へ移動する間に保存力 $\vec{F}_C$ が物体に与える仕事 U を（保存力 $\vec{F}_C$ による）位置エネルギーという。重要な具体例として、重力による位置エネルギー U_g とばねの力による位置エネルギー U_s の表式を導く。

重力による位置エネルギー $U_g(y)$ （高さ $y = 0$ を基準とする場合）：図 1 のように、鉛直上向きに y 軸をとり、高さ $y = 0$ の位置を基準点とする。項目(2)の『重力が保存力であること』より、水平方向に移動する間に重力が物体に与える仕事はゼロである。よって、高さ y の位置における重力による位置エネルギー $U_g(y)$ は、鉛直方向に高さ y から 0 まで移動する間に重力が物体に与える仕事である。重力 $\vec{F}_g = (0, -mg)$ は一定ベクトルなので、仕事は y 成分（鉛直方向）の単純な掛算で計算できる（高さの変化量 $\Delta y = 0 - y = -y$ に注意）。

$$\text{重力による位置エネルギー： } U_g(y) = F_{gy}\Delta y = mgy \quad [\text{J}] \quad (4.1)$$

ただし、 m は物体の質量、 g は重力加速度の大きさである。

ばねの力による位置エネルギー $U_s(x)$ （自然長の位置 $x = 0$ を基準とする場合）：図 2 のように、ばねの伸びを x とし、自然長の位置 $x = 0$ を基準点とする。ばねの力 $\vec{F}_s = (-kx, 0)$ は一定ではないので、前回プリント項目 2 の(4)の式 (3.4) のように微小仕事の定積分で計算する。また、項目(2)の『ばねの力が保存力であること』より、位置 x_1 におけるばねの力による位置エネルギー $U_s(x_1)$ は、 x 軸に沿って位置 x_1 から基準点 0 まで往復せずに素直に移動する場合の仕事である。よって、位置の微小変化 dx の間の微小仕事は $dW = F_{sx}dx = -kxdx$ であることに注意して、次のようになる。

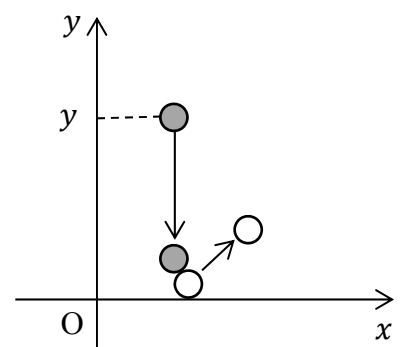
$$\int_{x_1}^0 dW = \int_{x_1}^0 (-kx)dx = \left[-\frac{1}{2}kx^2 \right]_{x_1}^0 = -\frac{1}{2}k \cdot 0^2 - \left(-\frac{1}{2}kx_1^2 \right) = \frac{1}{2}kx_1^2$$

$$\text{ばねの力による位置エネルギー： } U_s(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad [\text{J}] \quad (4.2)$$

ただし、 k はばね定数である。

位置エネルギーの意味： 以上のように得られる位置エネルギーは、初めの位置 $\vec{r}$ にある物体に保存力 $\vec{F}_C$ が与える仕事（エネルギー）である。そして、物体が持つ位置エネルギーを他の物体に与えることもできる。

例えば重力では、高さ y にある物体が重力だけで落下して基準の高さにある他の物体に（衝突などで力を加えることで）仕事を与える。このようにして他の物体に与えられる仕事（エネルギー）の最大値が mgy である。そして、その最大値 mgy だけのエネルギーが既に物体に蓄えられていた、と考えることもできる。このよう

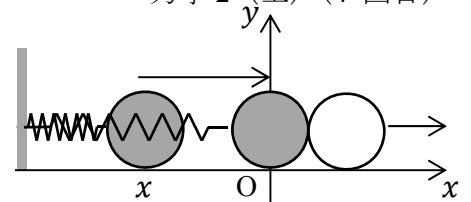


に高さ y の位置で物体に蓄えられるエネルギーが位置エネルギー $U_g(y) = mgy$ だと言える。

同様に考えて、ばねの伸び x の位置で物体に蓄えられるエネルギーが位置エネルギー $U_s(x) = (1/2)kx^2$ だと言える。

では、このエネルギーがどのようにして物体に蓄えられたのか。

基準から高さ y に物体を持ち上げたり、自然長からばねを x 伸び縮みさせたりするには、手などで力を加えて仕事 W を与える必要がある。この仕事 W が物体やばねに位置エネルギー U として蓄えられるのである。(問題 12-6 を解いて理解せよ。)



- (4) 演習 1: 問題演習 12 (p.57~58) の問題 12-1(5)(6), 問題 12-6 に取り組む。問題 12-8 の設定で、滑り降りた位置を高さ $y = 0$ として、滑り降りる前の高さで物体が持つ重力による位置エネルギーを求めよ。問題 12-8 (1)(2)の答えと比較して、気が付くことをまとめよ。

- (5) 演習 2: 積分を用いた仕事の計算 物体が $x = -2$ [m] から $x = 3$ [m] まで移動するあいだ、

$$\vec{F}(x) = (F_x(x), F_y(x)) = (x - 2, x^2) \text{ [N]} \text{ の力が加わった。仕事 } W = \int_{-2}^3 F_x(x) dx \text{ を求めよ。}$$

(発展的内容)

- (6) 位置エネルギーと保存力の関係 (第 12 章 p.55): 図 1 と同様に xy 座標をとると、重力 $\vec{F}_g = (0, F_{gy}) = (0, -mg)$ と位置エネルギー $U_g(y)$ には次の関係が成り立つ (式 (4.1) を参照):

$$F_{gy} = -\frac{dU_g(y)}{dy} = -mg \quad \Leftrightarrow \quad U_g(y_1) = \int_{y_1}^0 F_{gy} dy = mgy_1 \quad (4.3)$$

また、図 2 と同様に xy 座標をとると、ばねの力 $\vec{F}_s = (F_{sx}, 0) = (-kx, 0)$ とばねの力による位置エネルギー $U_s(x)$ には次の関係が成り立つ (式 (4.2) を参照):

$$F_{sx} = -\frac{dU_s(x)}{dx} = -kx \quad \Leftrightarrow \quad U_s(x_1) = \int_{x_1}^0 F_{sx} dx = \frac{1}{2} kx_1^2 \quad (4.4)$$

これら式(4.3), (4.4)の定積分は、物体の位置 (x_1 あるいは y_1) から基準点 ($x = 0$ あるいは $y = 0$) への積分である。これは、項目(3) の初めの下線部分で述べた位置エネルギーの意味 (定義) に従っている。

重力とばねの力に限らず、あらゆる保存力と位置エネルギーについて次のようになる:

- 簡単化して物体が x 軸上を運動する場合を考えて、物体の位置を x , 基準点を x_0 とする。
- 物体に働く任意の保存力の x 成分を $F_{cx}(x)$ とする。一般的に $F_{cx}(x)$ は物体の位置 x によって変化する。
- 保存力による位置エネルギーを $U(x)$ とする。

このとき、次が成立する:

$$\left(\begin{array}{l} \text{位置エネルギー} \\ \text{と保存力の関係} \end{array} \right) \quad F_{cx} = -\frac{dU_c(x)}{dx} \text{ [N]} \quad \Leftrightarrow \quad U_c(x_1) = \int_{x_1}^0 F_{cx}(x) dx \text{ [J]}$$

(4.5)

- (6) 非保存力による仕事とエネルギーの散逸 (テキストに明示されていないこと): 項目(3), (4) で、保存力が物体に与える仕事は位置エネルギーに等しいことが分かった。保存力がする仕事は経路によらないので、どこかをぐるりと一周して初めの位置に戻ってくると、仕事はゼロになる。したがって、物体が持つエネルギーは変化しない。一方、非保存力の場合は、ぐるりと一周して戻ってくる間に仕事はゼロにならない。すなわち、物体が持つエネルギーが変化したことになる。エネルギーはどうなったのだろうか? 特に非保存力による仕事が負となる場合を考えよ。

確認実験: 机上で手を滑らせて、摩擦で手が熱くなること、また音も出ることも確かめよ。この熱や音のエネルギーはどうやって供給されているのか考えよ。

この確認実験から分かるように、非保存力 (代表例は摩擦力) によって熱や音が発生するとき、そのエネルギーの供給元は、非保存力がする負の仕事によって減少した物体が持つエネルギーである。

このように仕事や物体が持つエネルギーが、非保存力がする仕事によって、熱や音などの形のエネルギーとなって減少することを、エネルギーの散逸という。