

第 2 回授業 レポート課題

テキスト (p.57~58) の問題演習 12 から, 問 1 : 問題 12-2(1) (ただし問題文に「…物体に水平方向に 5.0N の一定の…」と追加修正する。), 問 2 : 問題 12-5, 問 3 : 問題 12-6(1)(2)(3), を解け。(問 2 (1)(2) で求める仕事をそれぞれ W_1 , W_2 とする。問 3 (2)(3) で求める仕事をそれぞれ W_3 , W_4 とする。)

問 4 : 問題演習 23 の問題 23-6 (p.94) について, 各ベクトルの大きさ $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = b$ と内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

角度 θ を求める所までは要求しない。

注意 : テキストの解答は略解であり, 答案として必要な部分が省略されている場合がある。説明文や適切な図を加えて, 答案を作成することを心がけよ。答案作成力も見ろ。

提出×切 : 答案用紙を, 授業と同じ週の金曜日 (13 : 00) までに提出

提出場所 : D0308 (原科) 研究室前のレポート提出用の木箱

注意事項 : 自分の答案をノートに記入するか, コピーをとって, 次の授業に持ってくる。

第 3 回 運動エネルギー : テキスト第 12, 20, 23 章**1. 今回の授業の目的**

力学 2 の前半の目的は, 力学的エネルギーの理解である。その第一歩として前回は『仕事』の基礎事項を扱った。今回の授業の目的は, 仕事をもう一段深く考えて, 運動エネルギーを理解することである。次回は位置エネルギーを扱い, 次々回に力学的エネルギーを扱う。

2. 授業の進行 : テキスト第 12, 20, 23 章とこのプリントを合わせて理解を深める

- (1) 状況設定 : 前回は力が一定ベクトルの場合の仕事を扱った。しかし今回は, 力 $\vec{F}$ が一定とは限らない (向きや大きさが変化する) とする。また, テキスト p.54 の図のように (前回と同様に) 物体が x 軸上を運動する場合を主に考えるが, 曲線軌道を描く場合にも一般化する。

※積分を用いて一般的な説明を行う。積分を使って証明された公式を用いて (理解して) 計算ができれば, 力学 2 では合格レベルである。しかし, 工学で必要となる積分の考え方, 計算の仕方にも, 徐々に親しんで慣れてほしい。

- (2) 定積分 (第 20 章 p.84~85) : 一定とは限らない力 $\vec{F}$ が物体に与える仕事の計算には定積分が役に立つ。
不定積分の確認 : 変数 x の関数 $f(x)$ の不定積分は (積分して得られる関数を $F(x)$ として),

$$\text{不定積分 : } F(x) = \int f(x) dx \quad \left[\Leftrightarrow F(x) \text{ は } \frac{dF(x)}{dx} = f(x) \text{ を満たす任意の関数} \right] \quad (3.1)$$

力学 1 で扱ったように, この積分では積分定数が現れる。例えば, $f(x) = 15x^4 - 4x + 1$ の場合,

$$F(x) = \int (15x^4 - 4x + 1) dx = \quad (C \text{ は積分定数}) \quad (3.2)$$

となる。このように値が定まらない (不定な) 定数が現れるので『不定積分』である。なお, この C の値は, 初期条件のように積分計算とは別の (問題文から読み取ったりして得る) 条件で決めるしかない。

定積分 : 関数 $f(x)$ の積分をする際に変数 x の変動の仕方を指定する積分を定積分という。式 (3.1) と

同様に, $f(x)$ の不定積分を $F(x) = \int f(x) dx$ とすると, 変数 x を $x = a \rightarrow b$ と動かした場合の関数 $f(x)$ の定積分 (の計算結果) S とは, 次のように定義される値である :

$$\text{定積分 : } S = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = \int_a^b f(x) dx \quad \left[\begin{array}{l} \text{変数が } x = a \rightarrow b \text{ と} \\ \text{変化する際の不定} \\ \text{積分 } F(x) \text{ の変化量} \end{array} \right] \quad (3.3)$$

注意 1 : 定積分 (3.3) の記号 $[F(x)]_a^b$ は $F(b) - F(a)$ を略した表示である。また, 記号 $\int_a^b f(x) dx$ は,

定積分 $S = F(b) - F(a)$ の $F(x)$ が不定積分 (3.1) であることを端的に表し, かつインテグラル

$\int_a^b$ の下端 a と上端 b は変数 x の動き『 $x = a \rightarrow b$ (下端の値から上端の値へ動く)』を端的に表して

いる。学生には、記号の意味を正しく把握し、記号の使い方を間違えずに適切な答案を書くことを要請する。

注意 2: 定積分 (3.3) の計算結果は $F(b) - F(a)$ という値 (数値) である。一方、不定積分 (3.1) の計算結果は式 (3.2) のように関数 $F(x)$ である。不定積分と定積分では、計算結果が関数なのか値なのかという違いがあることに注意。

注意 3: 定積分 (3.3) には積分定数が現れないことが分かる。例えば、 $f(x) = 15x^4 - 4x + 1$ の範囲 $-1 < x < 2$ の定積分を S とすると、式 (3.2) より、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (15x^4 - 4x + 1) dx = F(2) - F(-1) \\ &= \left\{ \frac{15}{5}x^5 - \frac{4}{2}x^2 + x + C \right\} - \left\{ \frac{15}{5}x^5 - \frac{4}{2}x^2 + x + C \right\} \quad (\text{下線部の数値を計算せよ}) \\ &= \underline{\hspace{10em}} \quad (\text{下線部の数値を計算せよ}) \end{aligned}$$

となる。最後の等号では、積分定数は引算で打ち消し合ってしまう。従って、定積分には積分定数が現れない。(値が不定な積分定数が現れず、 S の値が定まるので『定積分』と言うのだろう。)

(3) 演習 1: テキストの問題演習 20 の問題 20-6 (p.85) に取り組む。

(4) 物体に働く力 $\vec{F}$ が (物体に) 与える仕事の一般的な定義 (第 12 章 p.54): 前回、テキスト p.54 の図 (下側) の状況設定で、物体に働く力 $\vec{F}$ が一定ベクトルかつ物体は直線上を運動する場合の仕事を取った。今回は、力 $\vec{F}$ が一定ベクトルでない (向きも大きさも変化し得る) 場合を扱う。そして、初めに物体が直線上を運動する場合、次に物体が曲線軌道を描く運動をする場合へと一般化する。

物体が直線上 (x 軸上) を運動する場合 (p.54 の図の設定): 項目 (1) で確認したように、力が一定でない場合の仕事は単純な掛算『力 $\times$ 距離』では計算できない。そこで、まず、力 $\vec{F}$ が一定と見なせるほど微小な移動距離 dx の間に力 $\vec{F}$ が物体に与える「微小な仕事 dW 」を考える。次に、微小仕事 dW を物体の移動距離あるいは移動時間の間で足し上げる (これは定積分の考え方と同じ!)。

まず微小仕事 dW は、微小距離 dx だけ移動する間は力 $\vec{F}$ が一定とみなせるので、前回プリント項目 2 の (2) の式 (2.1) が適用できる。

$$[\text{微小距離 } dx \text{ の間の微小仕事}] : dW = F(x) \cos \theta(x) dx \quad [\text{J}]$$

ただし、力 $\vec{F}$ は物体の位置に応じて向きも大きさも変化し得るので、大きさ $|\vec{F}| = F(x)$ も、 x 軸との間の角 $\theta(x)$ も位置 x の関数だと考えなければならない。そして、物体が $x = x_1 \rightarrow x_2$ と移動する間の仕事 W を、微小仕事を足しあげること得る。

$$\left(\begin{array}{l} x \text{ 軸上の運動だが} \\ \text{力 } \vec{F} \text{ が変化する} \\ \text{場合の仕事} \end{array} \right) W = \int_{x_1}^{x_2} dW = \int_{x_1}^{x_2} \{F(x) \cos \theta(x)\} dx = \int_{x_1}^{x_2} F_x(x) dx \quad [\text{J}] \quad (3.4)$$

ただし、 $F_x(x) = F(x) \cos \theta(x)$ は、力 $\vec{F}$ の x 成分である。

(5) 運動エネルギー (第 12 章 p.54~55): 物体に力を加えると (運動方程式に従って) 加速度が生じて速度が変化する。つまり、力が物体に与える仕事と物体の速度に関係があるはずである。その関係式を導こう。

物体が x 軸上を運動する場合 (p.54 の図の設定): 運動方程式の x 成分 $F_x(t) = ma_x(t)$ と仕事の一般的な定義 (3.4) より、

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_1}^{x_2} ma_x(t) dx = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{dv_x(t)}{dt} v_x(t) dt \leftarrow \left[\begin{array}{l} a_x = dv_x/dt \text{ 代入し, } v_x = dx(t)/dt \text{ より} \\ dx = v_x dt \text{ として積分の変数を } x \text{ から } t \text{ に変更} \end{array} \right] \\ &= \int_{v_{x_1}}^{v_{x_2}} m v_x dv_x \leftarrow \left[\begin{array}{l} \text{分母と分子の } dt \text{ を約分して, 微小量を } dt \text{ から } dv_x \text{ に変更} \\ \text{それに伴い, 積分の変数も } t \text{ から } v_x \text{ に変更。} \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{2} m v_{x_2}^2 - \frac{1}{2} m v_{x_1}^2 \leftarrow \left[\begin{array}{l} \text{定積分を } v_x = v_{x_1} \rightarrow v_{x_2} \text{ の範囲で実行。} \\ \text{ただし, } v_{x_1} = v_{x_1}(t_1); v_{x_2} = v_{x_2}(t_2) \end{array} \right] \end{aligned}$$

物体が x 軸上を運動するとき $\vec{v} = (v_x, 0)$ なので $v_x^2 = |\vec{v}|^2 = v^2$ となるから、次の関係式を得る。

$$\text{仕事と運動エネルギー (3.6) の関係: } W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad [\text{J}] \quad (3.5)$$

※この W は物体に働くすべて力がする仕事の和

ただし、 $v_1 = |\vec{v}(t_1)|$, $v_2 = |\vec{v}(t_2)|$ であり、右辺の各項の量を運動エネルギーという：

$$\text{運動エネルギー: } K(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2 \quad [\text{J}] \quad (3.6)$$

運動エネルギーの意味： 関係式 (3.5) で $v_1 = 0$ や $v_2 = 0$ の場合を考えると、運動エネルギーの意味を端的に表す状況となる。

式 (3.5) で $v_1 = 0$ ： この場合 $W = \frac{1}{2}mv_2^2$ となる。これは、静止した物体 ($v_1 = 0$) に力を加えて速度 $\vec{v}_2$ [m/s] まで加速する間に、力が物体に与えた仕事（エネルギー）が $W = \frac{1}{2}mv_2^2$ [J] であることを意味する。そして、 $W > 0$ は物体が持つエネルギーが（力を受けて仕事を与えられたことで）増えたことを意味する。

式 (3.5) で $v_2 = 0$ ： この場合 $W = -\frac{1}{2}mv_1^2$ となる。これは、速度 $\vec{v}_1$ で運動する物体が、他の物体に（衝突などして）力を加えて仕事を与える場合、最大限（速度ゼロになるまでに）与えることができる仕事（エネルギー）が $\frac{1}{2}mv_1^2$ であることを意味する。そして、 $W < 0$ は物体が持つエネルギーが（他の物体に仕事をしたことによって）減少することを意味する。

(6) 演習 2： 例題 12.2 (p.56) に取り組む。さらに問題演習 12 の問題 12-8 (p.58) に取り組む。

(発展的内容)

(2)'定積分 (のつづき)

補足 1： 変数 x を $x = b \rightarrow a$ のように（式 (3.3) とは逆に）動かした場合の関数 $f(x)$ の定積分を S' とすると、

$$\left(\begin{array}{l} \text{積分の変数の動き} \\ \text{を逆にする} \end{array} \right) \quad S' = \int_b^a f(x)dx = [F(x)]_b^a = F(a) - F(b) = -S \quad (3.7)$$

このように、定積分 (3.3) において、変数が動く向きを逆にすると定積分の計算結果の符号が逆になる。この性質 (3.7) は、次回以降に位置エネルギーや力学的エネルギーを理解する上で必要になる。

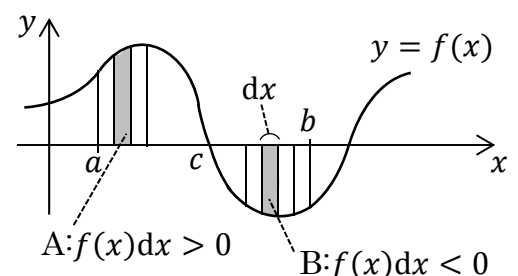
補足 2： 定積分 (3.3) の値 S は、テキスト p.84 の図のように、関数 $f(x)$ と x 軸で囲む面積に対応する。しかし、テキストの記述だけでは不十分なので、定積分とグラフの面積の関係を補足する：

力学 1 (あるいは数学) で学んだように、不定積分 (3.1) は『微小量 $f(x)dx$ (変数 x の微小な変化量 dx が掛算されているので $f(x)dx$ も微小量) を足しあげる (インテグラル $\int$ は英語の和 Sum の頭文字 S をモチーフにした「微小量を足しあげる」という意味の記号)』という意味である。同様に定積分 (3.3) は『微小量 $f(x)dx$ を、 $x = a \rightarrow b$ と動かしながら足しあげる』という意味である。この意味に従って、定積分 (3.3) とグラフの面積の関係を理解しよう。

$$x = a \rightarrow b (> a): dx > 0$$

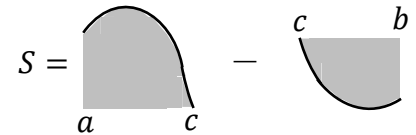
定積分 (3.3) で $a < b$ の場合： この場合、変数 $x = a \rightarrow b$ と動くとき x は増加するので、変化量 $dx > 0$ である。したがって、次のことが分かる (右図を参照)。

- $f(x) > 0 \Rightarrow f(x)dx = \text{『右図の長方形 A の面積』}$
- $f(x) < 0 \Rightarrow f(x)dx = \text{『右図の長方形 B の面積』}$



これらの（幅が微小 dx で縦に細長い）長方形の面積（あるいはそのマイナス値）を $x = a$ から $x = b$ で足しあがるのが定積分 (3.3) である。よって、定積分 (3.3) の値 S は、 $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲む領域で、

$S = \text{『}x\text{軸より上側の面積』} - \text{『}x\text{軸より下側の面積』}$ となる（右図参照）。



定積分 (3.3) で $a > b$ の場合： この場合、変数 $x = a \rightarrow b$ と動くとき x は減少するので、変化量 $dx < 0$ である。よって、 $a < b$ の場合と同様に考えて、

$S = - \text{『}x\text{軸より上側の面積』} + \text{『}x\text{軸より下側の面積』}$ となる。

注意：テキスト p.84 の定積分とグラフの面積の説明は、 $a < b$ であり、かつ $a < x < b$ において常に $f(x) > 0$ という場合を想定した文言になっている。

(4)' 仕事の一般的な定義（のつづき）

仕事 W を仕事率 $P(t)$ の時間積分で表す

物体の速度 $\vec{v}$ は x 方向（ y 成分はゼロ）なので、 $\vec{v} = (v_x, 0)$, $v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ （ $x(t)$ は時刻 t での物体の位置）となる。また、物体が $x = x_1 \rightarrow x_2$ と移動する際の時間変化を $t = t_1 \rightarrow t_2$ とする（ $x(t_1) = x_1$; $x(t_2) = x_2$ ）。このとき式 (3.4) より、

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \{F(x) \cos \theta(x)\} dx = \int_{t_1}^{t_2} \{F(t) \cos \theta(t)\} v_x(t) dt \quad \leftarrow \begin{cases} v_x = dx/dt \text{より } dx = v_x dt \text{ を使って式変形。さらに微小量が } dx \text{ から } dt \text{ に変更されたことに伴い、積分変数を } x \text{ から } t \text{ に変更。} \end{cases}$$

なお、前回プリント項目 2 の(6)の仕事率の式(2.2)より、力 $\vec{F}(t)$ が物体に与える仕事率は $P(t) = \{F(t) \cos \theta(t)\} v_x(t)$ [J/s]である。したがって、今回の項目(4)の仕事の一般的な定義(3.4) は次の形でも表せる。

$$\text{[仕事の一般的な定義(3.4)の式変形]}: \quad W = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt \quad [\text{J}] \quad (3.8)$$

物体が曲線軌道を描く場合（状況設定の図を自分で描いてみよ）： 直線運動の場合の仕事の式(3.4) は、積分の変数が x （物体の直線軌道に沿った座標）である。したがって、式(3.4) は物体が曲線軌道を描く（必ずしも x 軸に沿うとは限らない）場合の仕事には適用できない。しかし、仕事を式(3.8) で表した場合、積分の変数が時刻 t なので、式(3.8) は必ずしも直線軌道に限らず曲線軌道の場合にも適用できる。ただし、積分される仕事率 $P(t)$ の計算には注意が必要で、次のようになる。（ $\vec{F}(t)$ と $\vec{v}(t)$ の間の角を $\alpha(t)$ とする。）

$$\left(\begin{array}{l} \text{曲線軌道を描き} \\ \text{力 } \vec{F} \text{ が変化する} \\ \text{場合の仕事} \end{array} \right) \quad W = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt \quad [\text{J}] \quad \begin{array}{l} P(t) = F(t) v(t) \cos \alpha(t) \\ = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) \end{array} \quad (3.9)$$

ここで、仕事率 $P(t)$ の 2 つ目の等号には、前回プリント項目 2 の(7) で扱ったベクトルの内積を使っている。

(5)' 運動エネルギー（のつづき）

物体が曲線軌道を描く場合（状況設定の図を自分で描いてみよ）： 仕事 (3.9) に対して、関係式 (3.5) を導く計算と同様の計算を行えば、最終的に関係式 (3.5) と運動エネルギー (3.6) を再び得る。関係式 (3.5) と運動エネルギー (3.6) は、直線運動だけでなく曲線軌道を描く運動についても成立する。ただし、 $v^2 = |\vec{v}|^2$ というベクトルの大きさを考えることを忘れてはいけない。