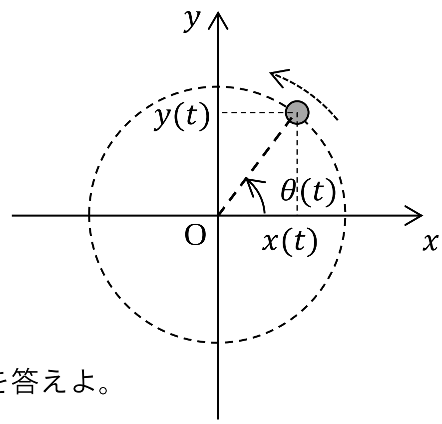
第 11 回授業　レポート課題

(A) テキスト問題演習 9 の問題 9-6（p.41）を答えよ。

(B) 右図のように，　車両 P（質量4.0×10^4 [kg] ＝ 40トン）が，水平面に敷かれた半径600 [m] の円形レール上を，角速度3.0×10^{-2} [rad/s] で等速円運動している。ただし，時刻$t = 0$[s] でのx軸からの回転角はπ [rad] である。



(a) 時刻t[s] における車両 P の（x軸からの）回転角$\theta(t)$を求めよ。

(b) 時刻t[s] における車両 P の位置ベクトル$\vec{r}(t)$を求めよ。

(c) 時刻t[s] における車両 P の速度$\vec{v}(t)$を求めよ。

(d) 時刻t[s] における車両 P の加速度$\vec{a}(t)$を求めよ。

(e) 時刻t[s] で車両 P に作用する合力$\vec{F}(t)$を求めよ。合力$\vec{F}(t)$の向きを答えよ。

(f) この等速円運動の周期Tを求めよ。

(g) 円形レールは，車両 P が円軌道から外れないように，水平向きの力で車両 P を支えなければならない。円形レールが車両 P を支える力が向心力になっている。ところで，このレールは水平向きに加わる力が10^5 [N] を超えると支えきれなくなり，車両は脱線してしまうとする。

g-1) 車両 P が円形レール上を脱線しないで等速円運動し続けられる最大の速さVを求めよ。

g-2) 次に，レールの半径を変えて，車両 P が時速252キロ（252[km/h]）で等速円運動できるようにしたい。脱線しないで等速円運動できる最小の半径Rを求めよ。ただし，レールが水平向きに支えられる最大の力は10^5 [N] で変わらないとする。

注意 1：計算式だけでなく，説明文（必要なら適切な図も）を加えて答案を作成すること。答案作成力も見る。
注意 2：最初はこの問題がよく解けなかったとしても構わない。しかし，次の確認テストまでに何度も復習し，適切な答案を作れるようにすることを強く勧める。

提出〆切：答案用紙を，授業と同じ週の金曜日（１３：００）までに提出
提出場所：Ｄ０３０８（原科）研究室前のレポート提出用の木箱
注意事項：自分の答案をノートに記入するか，コピーをとって，次の授業に持ってくる。

第１２回　力のモーメント１（実験的理解と定義）：第 3 章

1. 今回の授業の目的

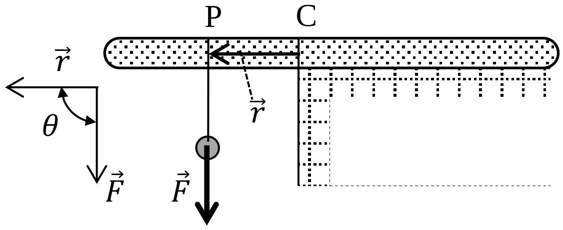
先の 2 回の授業で円運動を扱った。様々な機械製品の部品には回転するものが多いので，円運動は工学系にとって基礎的で重要な運動である。ところで，あらゆる物体の運動に対して成立する運動方程式より，速度変化（加速度）は物体に働く力で決まる。つまり，回転運動の速度が変化する場合（回転角の加速度がゼロでない場合）は必ず何らかの力の作用が存在する。物体に働く力が『物体の回転を引き起こす作用』を力のモーメントという。工学系にとって回転運動が重要だということは，力のモーメントを理解することも極めて重要であることを意味する。そこで，今回の授業の目的は，力のモーメントの定義と意味を理解することである。

2. 授業の進行：テキスト第 3 章とこのプリントを合わせて理解を深める

(1) 力が物体の回転を引き起こす作用（実験）： 授業の目的で述べたように，物体に働く力が『物体の回転を引き起こす作用』を力のモーメントという。この力のモーメントの計算方法がどんなものか，実験的に理解していく

前提・確認事項： 力学 1 から前回の授業まで，暗黙の前提として，物体は十分小さいとして（物体の大きさは無視して）物体の運動を考えてきた。つまり物体自身の回転（自転）はない場合を考えてきた。しかし，今回と次回は物体の大きさも考慮して，物体自が自転する場合を考える。例えば，歯車は軸の周りで自転する。工学系にとって，大きさをもった物体の自転運動は重要である。そのような物体（機械の部品など）に働く力が物体の自転を引き起こす場合を想定して，力のモーメントを考えるのである。ただし，物体は十分硬く，力が働いても変形しない（テキスト第 3 章 p.11 の剛体）とする。

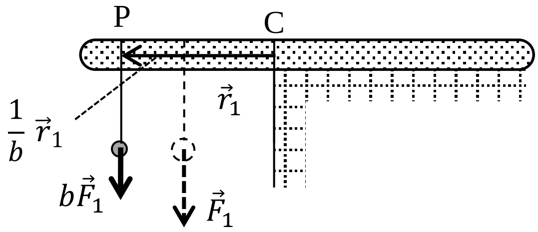
実験装置： 右図のように棒を台の端に置き，おもりを棒上の点 P に吊るす。棒上で，台の端点 C から測る点 P の位置ベクトルを$\vec{r}$, おもりに働く重力を$\vec{F}$, ベクトル$\vec{r}$と$\vec{F}$の間の角をθとする。右図は$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ [rad] の状況である。



この装置を使って，以下の手順で実験を進める。

手順 1： おもりの質量をある値m_1に決める。この重力を$\vec{F}_1$とする。そして，点 P を点 C に近い位置から徐々に離していき，棒の静止状態を保てるギリギリの所に点 P を固定する。（点 P をその位置より少しでも点 C から遠い側に離すと，棒が$\vec{F}_1$に引かれて台から落ちてしまう。）この状況の点 P の位置ベクトルを$\vec{r}_1$とすると，CP 間の距離は$|\vec{r}_1|$である。

手順 2： おもりの質量を$m_2 = bm_1$（ $b > 0$）に変える。（例えば, $b = 1/2$など。）この重力は$\vec{F}_2 = b\vec{F}_1$である。そして手順 1 と同様に，点 P の位置を点 C から徐々に離していき，棒の静止状態を保てるギリギリの所に点 P を固定する。この状況の点 P の位置ベクトルを$\vec{r}_2$とすると，CP 間の距離は$|\vec{r}_2|$である。そして，この実験を行うと，次の関係が成立することが分かる。



実験事実（$\theta = \dfrac{\pi}{2}$の場合）：$\left|\vec{F}_2\right| = b\left|\vec{F}_1\right| \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{r}_2| = \dfrac{1}{b}|\vec{r}_1|$

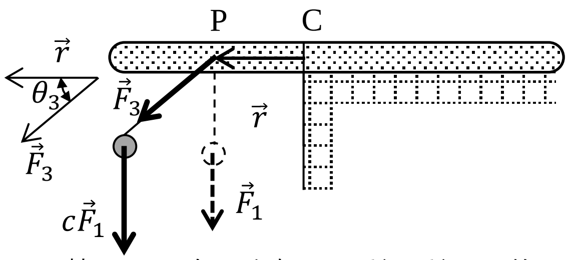
これを言い換えると，

実験事実（$\theta = \dfrac{\pi}{2}$の場合）：$|\vec{r}_2| \times \left|\vec{F}_2\right| = |\vec{r}_1| \times \left|\vec{F}_1\right|$ (12.1)

この関係式の両辺は共に『棒の静止状態を保てるギリギリの状況』という，棒にとって全く同一の状態を考えていることに注意しよう。棒の同一の状態に対する『おもりの重力のモーメント』の値Nは，おもりの質量が幾らであっても（それに応じて CP 間の距離を調整することで）唯一の値に定まるように定義しなければ意味がない。これを踏まえて実験事実(12.1) を見ると，少なくとも$\theta = \dfrac{\pi}{2}$の場合には,『棒のつり合いを保てるギリギリの状況』に対応する『おもりの重力のモーメント』の値として$N = |\vec{r}_1| \cdot \left|\vec{F}_1\right|$を考えれば，$N$の値が唯一つに定まりそうだと分かる。

では，θが必ずしも$\dfrac{\pi}{2}$でない場合の，Nの値はどうだろうか？それを次の手順で明らかにする。

手順 3： 今度は，点 P の位置を手順 1 と同じ位置ベクトル$\vec{r}_1$の位置に戻す。しかし，下図のように滑車（図中の⨁）などを使って，物体を吊るす糸の向きを変えた力$\vec{F}_3$を棒に加える。この力$\vec{F}_3$の大きさを，手順 1 の重力のc倍とする（$\left|\vec{F}_3\right| = c\left|\vec{F}_1\right| = cm_1g$）ただし，$c > 1$である。



滑車の位置を動かすことで点 P に働く力$\vec{F}_3$の向きを調節し，棒のつり合いを保てるギリギリの状況にする。このときの$\vec{r}_1$と$\vec{F}_3$の間の角をθ_3とする。そして，この実験を行うと，次の関係が成立することが分かる。

実験事実（$\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$の場合）：$\left|\vec{F}_3\right| \sin\theta_3 = \left|\vec{F}_1\right| \quad \Leftrightarrow \quad \sin\theta_3 = \dfrac{1}{c}$

したがって，

実験事実（$\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$の場合）：$|\vec{r}_1| \cdot \left|\vec{F}_1\right| = |\vec{r}_1| \cdot \left|\vec{F}_3\right| \sin\theta_3$ (12.2)

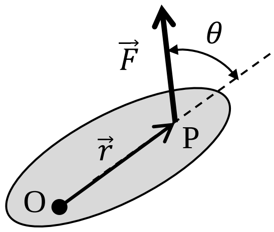
手順 2 の実験事実(12.1) と合わせると，つぎのようになる。

$$\left(\begin{array}{l}\textbf{実験事実のまとめ}\\ \text{棒のつり合いを}\\ \text{ギリギリ保つ場合}\end{array}\right)：|\vec{r}_1| \cdot \left|\vec{F}_1\right| \sin\frac{\pi}{2} = |\vec{r}_2| \cdot \left|\vec{F}_2\right| \sin\frac{\pi}{2} = |\vec{r}_1| \cdot \left|\vec{F}_3\right| \sin\theta_3 \qquad (12.3)$$

ここで，手順 1 と 2 の場合の角$\theta = \dfrac{\pi}{2}$に対して$\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$であることを使った。

この実験事実から，力のモーメント（物体の回転を引き起こす作用）の値Nとして，$|\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin\theta$を考えればよいことが見えてくる。次の項目(2) で力のモーメントの定義と意味をまとめる。

(2) 力のモーメントの定義と意味（第 3 章 p.11）： 項目(1)では，棒のつり合いを保てるギリギリの状況に注目して『おもりの重力が棒の回転を引き起こす作用（おもりの重力のモーメント）』を実験的に考えてきた。しかし，その結果(12.3)と同様な結果が，棒のつり合いを保てるギリギリの状況でのおもりの重力に注目しなくても，任意の状況で働く任意の力に対して成立する。そして，力のモーメントの定義は以下のようにまとめられる。

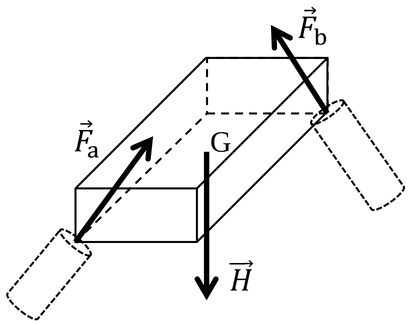


定義： 右図のように，物体の点 P に力$\vec{F}$が働いている。原点 O はどこに置いてもよい（右図は物体の中に原点を置いた場合であるが，物体の外に原点 O を置いても良い）。また，物体が静止していても運動していてもよい。この一般的な状況設定で，力の作用点 P の位置ベクトル$\vec{r}$と力$\vec{F}$の間の角をθとして，力$\vec{F}$が原点 O を中心とする物体の回転を引き起こす作用を『点 O のまわりの力$\vec{F}$のモーメント』といい，次のように定義できる：

力のモーメントNの定義：
- 大きさ：$|N| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin\theta$
- 符号：（ベクトル$\vec{F}$と$\vec{r}$で張る平面上で右回りあるいは左回り回転のどちらを引き起こす場合を正にするか定めた上で，Nの符号を決める。）

(12.4)

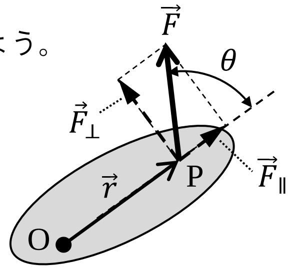
ただし，この力のモーメントの定義は，複数の力が物体に働く場合には，全ての力のベクトルが同一平面上にある場合（力の作用点も力の向きも同一平面上にある場合）にしか適用できないことに注意。



補足 1： 一つの物体に複数の力が働き，それらの力のベクトルが同一平面上にない場合の例として，右図のように物体を複数の向きが異なる柱で支える場合がある。この場合，物体に働く重力（図の重心 G に働く$\vec{H}$）が引き起こそうとする回転の軸 1 と，柱が物体に加える力（図の$\vec{F}_\mathrm{a}$や$\vec{F}_\mathrm{b}$）が引き起こそうとする回転の軸が異なる。つまり，定義(12.4) の符号を決める基準となる『$\vec{F}$と$\vec{r}$で張る平面』が 3 つの力$\vec{F}_\mathrm{a}$，$\vec{F}_\mathrm{b}$，$\vec{H}$で異なるのである。基準が異なってしまうので，定義(12.4) で決める力のモーメントは，右図のような場合に使ってはいけない。

単位： 力のモーメントの単位は，その定義(12.4) から計算すると[N·m] となる。この単位はエネルギーの単位[J] = [N m] = [kg·m^2/s^2] と同じにみえるので，力のモーメントの単位は[J] としたくなるかもしれない。しかし，補足 1 で述べたように，力のモーメントは正確にはベクトルとして考えなければならない。このことは，力のモーメントがエネルギー（向きがないスカラーでありベクトルではない）とは根本的に異なる量であることを意味する。実際，保存力による力のモーメントを考えても，それは位置エネルギーのように物体に蓄えられる量ではない。従って，力のモーメントの単位としてエネルギーの単位[J]は使用せず，[N·m] とする。

意味： 力のモーメント(12.4) の意味を知るために，力$\vec{F}$を次のように分解しよう。



$$\vec{F} = \vec{F}_\parallel + \vec{F}_\perp \qquad \begin{cases} \vec{F}_\parallel : \vec{r}\text{に平行な方向の分力} \\ \vec{F}_\perp : \vec{r}\text{に直交する方向の分力} \end{cases}$$

この分解から，それぞれの分力の役割として次のように理解できる。

分力$\vec{\mathrm{F}}_\parallel$の役割： 物体を$\vec{r}$方向に伸び縮みさせるようとする。

分力$\vec{F}_\perp$の役割：$\vec{r}$の向き，つまり物体の向きを変えようとする。

このような役割から，分力$\vec{F}_\perp$が力のモーメント（物体の回転を引き起こす作用）に関わっていると考えられる。そこで，分力$\vec{F}_\perp$の大きさ$|\vec{F}_\perp| = |\vec{F}| \sin\theta$であることに注意して，力のモーメントの定義(12.4) は，次のように考えるとよい。

$$\text{力のモーメントの大きさ：} |N| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}_\perp| \ \left(= |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin\theta\right) \tag{12.5}$$

このように理解しておけば，**力のモーメントとは作用点の位置ベクトル$\vec{r}$に直交する分力によって物体の向きが変わる作用**であることが明確になる。

注意 1： テキスト第 3 章 p.11 では，力のモーメントの説明に『腕の長さ』を図示している。力のモーメントの大きさの計算式(12.4) はこれでも導けるだろう。しかし，テキストの説明では，なぜ力のモーメントが物体の回転に関係するのか？ が分からない。力のモーメントの意味は『力が物体の回転を引き起こす作用』であることを理解するためには，式(12.5) を理解する方が良いだろう。

(3) 物体の重心（第 3 章 p.12）：重力は物体を構成する要素（原子など）それぞれに働く。そして，一つ一つの構成要素に働く重力の和が，物体全体に働く重力（大きさmg）である。このように物体全体に働く重力の作用点としては，次の条件を満たす**重心** G を考えればよい（重心 G の位置座標の計算規則はテキストを参照）。一様で対称性のよい形（長方形の板，円板，球など）の場合は，図形的な中心が重心である。

- 物体の構成要素それぞれについて『重心 G のまわりの重力のモーメント』を計算する。それらの重力のモーメントの和はゼロになるような位置を重心 G とする。この授業では重心の計算までは求めない。

(4) **演習 1**： 演習問題 3 の問題 3-5 に取り組む。問い(2)〜(4) では複数の力が物体に働いているが，それぞれの力のモーメントと，それらの和を計算せよ。

追加問題： 各問(1)〜(4) で，板は右回りあるいは左回りのどちらに回転しようとするか，理由を付けて答えよ。（ヒント：力のモーメントの和の符号の意味に注意すること。）

注意 2： テキスト p.12 の偶力は，その言葉の意味を心に留めておけばよい。「偶力のモーメントの大きさは回転中心によらない」ことが特徴であるが， 2 つの力のモーメントをそれぞれ計算して足しても求められるので，この授業では暗記を求めない。

(5) 物体の大きさも考慮した上でのつり合い（第 3 章 p.11）： 物体が全体として運動せず（重心が静止して），かつ物体が回転（自転）しない場合が，物体の大きさも考慮した上でのつり合い状態である。

物体にn個の力$\vec{F}_1$，$\vec{F}_2$，…，$\vec{F}_n$が働いている。これらn個の力は全て同一平面に平行だとし（力のモーメントは式(12.4) あるいは(12.5) で計算できる），それぞれの力のモーメントをN_1，N_1，…，N_nとする。この状況設定で，物体のつり合い状態は，次の条件を満たさなければならない。

重心静止の条件：$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots+\vec{F}_n=\vec{0}$ ←合力がゼロ
自転しない条件：$N_1+N_1+\cdots+N_n=0$ ←力のモーメントの和がゼロ (12.6)

ここまで物体は剛体（変形しない物体）としてきたので，式(12.6) は正確には（力が全て同一平面に平行な場合の）剛体のつり合い条件である。

注意 3： 複数の力のモーメントを計算する際に『原点 O の位置』と『右回りあるいは左回りのどちらが正か』を必ず一つに決めること。ある力$\vec{F}_\mathrm{a}$のモーメントN_aを計算するときと，別の力$\vec{F}_\mathrm{b}$のモーメントN_bを計算するときに，原点 O や正の回転方向を変えてはいけない。例えば，原点 O を変えることは，力のモーメントごとに回転中心を変えて計算することであり，物体全体の回転中心を定めていないことになる。そうすると，そもそも『物体が自転しない』という条件を考えることにならない。したがって，全ての力のモーメントは，同一の原点のまわりで，同じ回転方向を正として計算しなければならない。

補足 2： 力の個数nが多い場合に，それぞれの力の成分$\vec{F}_i=(F_{ix},F_{iy})$を求めることを考えてみよう。（ただし$i=1,2,\cdots,n$である。）求めたい未知変数は，$n$個の力の$xy$成分なので，$2n$個である。ところで，つり合いの条件(12.6)は，重心静止の条件のxy成分で 2 つの式と，自転しない条件で 1 つの式で，合計３つの式である。従って（中学校で学習した連立方程式から）未知変数の個数$2n$が 3 以上の場合，つり合い条件だけからは力の成分が求まらない。つり合い条件の他に，何か他の条件が必要になる。このような場合，現実の物体は剛体（絶対変形しない物体）ではなく，力が働けば必ず（微小にでも）変形することを考慮することも多い。例えば，物体が変形（しようと）することで物体のどの位置にどんな力が働くかを考えることで，応力という物体内部の力（の分布状況）も考慮する。『工業力学』や『構造力学』などの名称の科目で，大きさのある物体のつり合いを扱う際に，このような物体内部に発生する力を考えるはずである。

(6) **演習 2**： 第 3 章 p.12 の例題 3.1 に取り組む。