第 8 回授業　レポート課題

テキスト第 4 章の問題演習 4 から，

問題 4-2 に追加する。(5) $v(t) = -2t^3$ ，(6) $v(t) = -5t^2 + 7$ ，それぞれの加速度$a(t)$と位置$x(t)$を求めよ。

問題 4-10(3)を次のように変更して解け。

変更：問題文「･･･ただし，時刻 $t = 0$[s] での速度を $v(0) = 14.7$[m/s]，位置を $x(0) = -19.6$[m] とする。」(3)ある物体の加速度が $a(t) = -9.8$ [$\mathrm{m/s^2}$] で表されているとき，この物体の速度 $v(t)$と位置 $x(t)$を求めよ。

問題 4-11 を次のように変更して解け。

変更：初期条件 $t = 0$ [s] における速度$v(0) = \cdots$ [m/s]，位置$x(0) = \cdots$ [m] は，テキストの問題文と異なる値に変更する（自分で決める）。解答を作成する際，問い(2)，(3) は，初めに任意の時刻の速度 $v(t)$や位置 $x(t)$ を求めること。

注意 1：この種の問題を解けることが，力学 1 を合格するカギとなる。初めはよく分からなかったとしても，次の確認テスト，期末テストまでに何度も復習し，適切な答案を作れるようになることを強く勧める。

注意 2：テキストの解答は略解であり，答案として必要な部分が省略されている場合がある。計算式だけでなく，説明文や適切な図を加えて，答案を作成することを心がけよ。答案作成力も見る。

＊提出方法や提出場所・期限は通常通り（第 1 回配布のプリントを見よ。）

第 9 回　平面運動の位置・速度・加速度とベクトル・微分積分：テキスト第 1，4，20，23 章

1. 今回の授業の目的

直線上を運動する物体の位置・速度・加速度を，微分積分を使って正しく理解・計算することを扱ってきた。しかし現実の物体は，直線上だけでなく，平面上で曲線軌道を描く運動を（さらに空間内で立体的な曲線軌道を描く運動も）行う。物体が曲線軌道を描く運動を行う場合には，位置・速度・加速度の全てはベクトルで表されることが知られている。そこで，今回の授業の目的は，①平面運動する物体の位置・速度・加速度をベクトルで表し，②それらの微分積分による関係や幾何学的な意味を理解することである。

2. 授業の進行：テキスト第 1，4，20，23 章とこのプリントを合わせて理解を深める

(1) ベクトルの復習：特に 2 回目の授業内容（ベクトルの基礎事項）が大切！少しでも不安なら確実に復習！

◍「向き」と「大きさ（値）」を兼ね備えるものは，数学のベクトルで表される。図には矢印で描き表す。

→ 例：力のベクトル$\vec{F}$ [N] …テキスト第 1 章 p.1

（テキストではベクトルを表す記号は太字 $\boldsymbol{F}$だが，プリントでは矢印付き記号$\vec{F}$ にする。）

→ 今回は物体の位置・速度・加速度もベクトルである（図には矢印で描ける）ことを理解する。

◍力のベクトルの矢印を作図する上での注意点（2 回目の授業プリント項目(2) を参照）：

$$\left(\begin{array}{c}\text{力ベクトルの}\\\text{作図の注意点}\end{array}\right):\begin{cases}\text{(a) 作用点に矢印の始点を置く（矢印の終点を置く場合もある）。}\\\text{(b) 力が働く向きに矢印を描く。}\\\text{(c) 矢印の長さで力の強さを表す。}\end{cases}\qquad(9.1)$$

→ 今回は物体の位置・速度・加速度のベクトルの作図でもまったく同様な注意点があること理解する。

◍ベクトルの合成・分解（あるいは和・差）は，平行四辺形の法則に従って考える（第 22 章 p.86 参照）。

→ 少なくとも力の合成・分解が平行四辺形の法則に従うことは，1 回目の実験を通して確認した。

→ 今回は物体の位置・速度・加速度の和や差も平行四辺形の法則に従うことを理解する。

◍ベクトルを「何らかの計算に基づいて正確に把握する」ために，ベクトルの成分という考え方が特に重要（第 1 章 p.1，第 22 章 p.85 参照）。成分を適切に計算することで，ベクトルの向きと大きさを正確に把握でき，ベクトルの矢印の作図も正確に行える。

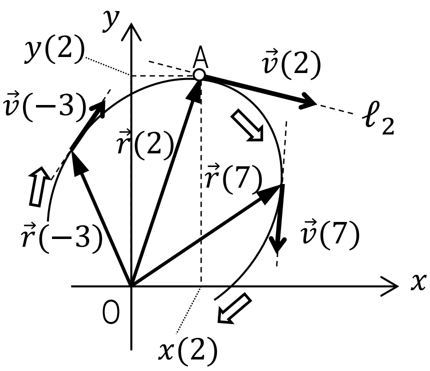
→ 今回は物体の位置・速度・加速度も成分によって正確な把握と作図ができることを理解する。

◍確認演習：テキスト p. 4 の問題 1-6 を解き直すことで，ベクトルの基礎事項を確認せよ。ただし，3 つの力$\vec{F}_1$，$\vec{F}_2$，$\vec{F}_3$が働く質点の位置（作用点）を，座標$(-3, 2)$の位置とせよ。

(2) 状況設定： 右図のように，xy平面上で曲線軌道を描いて運動する物体 A を例にして，位置・速度・加速度をベクトルとして理解していく。右図は，以下のようになっている。

◦軌道上を物体A が運動する向きは, 白抜き矢印で示す向きである。

◦軌道上に，時刻 $t = -3, 2, 7$ [s]での物体 A の位置が描いてある。



(3) 位置ベクトル： 項目(2) の状況設定で，時刻 tにおける物体 A の位置ベクトルを表す記号を $\vec{r}(t)$とする。

注意：$\vec{r}(t)$のようにカッコ書きで時間変数 tを付ける記号の使い方は，変数 tの関数（例：$f(t) = -2t^2 - 4$）と同様な記号の使い方である。物体 A の位置は時々刻々と移動していく（時間的に変化する）ので，時刻 tを変数として，カッコ書きで時間変数 tを付けて位置ベクトルを表す記号の使い方が $\vec{r}(t)$である。

◍位置ベクトル：$\vec{r}(t)$の作図：

物体 A の位置ベクトル$\vec{r}(t)$は，座標の原点 O から（時刻 tの）物体 A の位置を結ぶ矢印である。力ベクトルの注意点(9.1) に対応する位置ベクトルの注意点は次の通り。

（位置ベクトル$\vec{r}(t)$の作図の注意点）：
- (a) 座標原点 O に矢印の始点を置く。
- (b) 原点 O から物体 A の位置に向かう矢印を描く。 （9.2 の図）
- (c) 矢印の長さは原点から物体までの距離を表す。

時間の経過とともに $\vec{r}(t)$の矢印の終点の位置は物体 A の軌道に沿って移動していくので，項目(2) の図を見ながら位置ベクトル $\vec{r}(t)$の向きと大きさが時々刻々と変化していく様子が想像できる。

◍位置ベクトル $\vec{r}(t)$の意味：

位置ベクトル $\vec{r}(t)$の終点は，時刻tの物体 A の位置を表す。位置ベクトル $\vec{r}(t)$が指し示す物体の位置を，「位置 $\vec{r}(t)$」と呼ぶ。

◍位置ベクトル $\vec{r}(t)$の成分：

位置ベクトル $\vec{r}(t)$の矢印の始点は常に原点にあるので，その矢印の終点の位置の座標（物体 A の座標）が $\vec{r}(t)$の成分である。（以下，単位は p.62 の国際単位系で示す。）

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))\ [\mathrm{m}] \quad \begin{cases} x(t)\ [\mathrm{m}]：時刻\ t\ での物体\ A\ の位置の\ x座標 \\ y(t)\ [\mathrm{m}]：時刻\ t\ での物体\ A\ の位置の\ y座標 \end{cases} \qquad (9.2\ の成分)$$

項目(2) の図には，時刻 $t = 2$ [s] での位置 $\vec{r}(2) = (x(2), y(2))$［m］も明示されている。

また，作図の注意点（9.2 の図）から，時刻 tにおける原点 O から物体 A の位置までの距離 $r(t)$は，ベクトル $\vec{r}(t)$の大きさとして計算できる。

$$原点と物体の距離：\ r(t) = |\vec{r}(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}\ [\mathrm{m}] \qquad (9.2\ の大きさ)$$

◍確認**演習** 1： xy平面上を運動する物体の位置ベクトルが，$\vec{r}(t) = (0.5t,\ -0.25t^2 + 2t + 1)$［m］だとする。この物体の軌道曲線を描け。また位置ベクトル $\vec{r}(2)$，$\vec{r}(4)$，$\vec{r}(8)$を求め，作図せよ。

(4) 速度ベクトル： ひとたび位置ベクトル$\vec{r}(t)$が分かれば，その微分で速度が得られる。項目(2) の状況設定で，時刻 tにおける物体 A の速度ベクトルを表す記号を$\vec{v}(t)$とする。

◍速度$\vec{v}(t)$の成分：

物体 A の速度$\vec{v}(t)$は，位置$\vec{r}(t)$の時間的な変化率（時間変数 t による微分）である。なお，微分は関数だけでなくベクトルでも考えられる！

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right) = \left(v_x(t), v_y(t)\right) \quad [\mathrm{m/s}] \qquad (9.3\ の成分)$$

ベクトルの微分は，xy成分をそれぞれ微分することである。（後の式(9.4) で詳しい補足あり。）

この速度ベクトル$\vec{v}(t)$の大きさが「速さ $v(t)$」である。

$$物体の「速さ」：\quad v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2}\ [\mathrm{m/s}] \qquad (9.3\ の大きさ)$$

◍速度$\vec{v}(t)$の作図：

時刻 tにおける物体 A の速度$\vec{v}(t)$の注意点は次の通り。

（速度$\vec{v}(t)$の作図の注意点）：
- (a) 時刻tでの物体 A の位置（近く）に矢印の始点を置く。
- (b) 時刻tでの物体 A の位置における，軌道曲線の接線方向に矢印を描く（後の「向きの説明」参照）　（9.3 の図）
- (c) 矢印の長さは時刻tでの速さ（9.3 の大きさ）を表す。

◍確認**演習** 2：物体の位置ベクトルが，$\vec{r}(t) = (0.5t,\ -0.25t^2 + 2t + 1)\,[\mathrm{m}]$のとき，この物体の速度$\vec{v}(t)$を求めよ。（ベクトルを求めるとは，その成分を求めることである。）

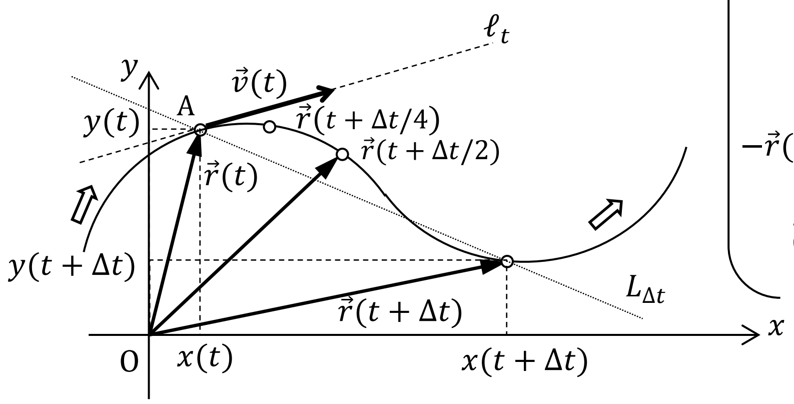
(a)速度$\vec{v}(2)$，$\vec{v}(4)$，$\vec{v}(8)$を求め，確認演習 1 で描いた図に加えて作図せよ。速度の矢印の始点は各時刻の物体の位置に置き，1 目盛りを0.5［m/s］とする。

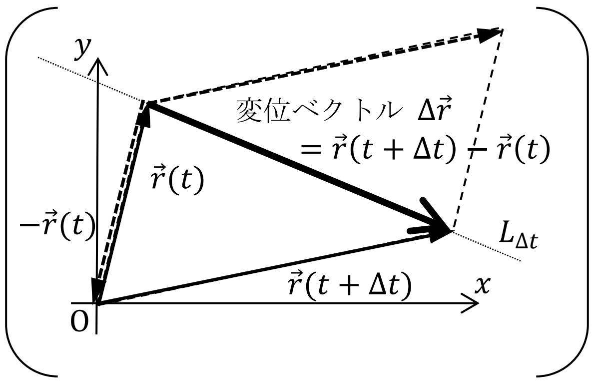
(b)各時刻での速度$\vec{v}(2)$，$\vec{v}(4)$，$\vec{v}(8)$が，軌道曲線の接線方向を向いていることを確認せよ。

(c)速度$\vec{v}(2)$，$\vec{v}(4)$，$\vec{v}(8)$［m/s］の「速さ」の大小関係を，不等号を使って示せ。（図に描いた速度の矢印の長さを比べれば，速さの大小関係が分かる。）

◍速度$\vec{v}(t)$の向きの説明（やや発展的）：

速度は位置の微分（9.3 の成分）であることから出発して，作図の注意点（9.3 の図）の(b)を以下の 3 つのステップで導いていく。なお，下の図に適切な作図を描き込みながら説明を進める。





ステップ 1（定義の確認）：

関数の微分の定義（7 回目授業プリントの式（9.1）参照）と同様に，位置ベクトル$\vec{r}(t)$の微分（9.3 の成分）としての速度は次のように定義される。（ただし，1 行目の定義(9.4) が以下の説明では必要であり，2 行目からは式（9.3 の成分）との関連を示す補足事項である。）

ベクトルの微分の定義：
$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \tag{9.4}$$

（ベクトルを成分で表示!）
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\big(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t)\big) - \big(x(t), y(t)\big)\right]$$

（ベクトルの差の成分を計算!）
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\ \big(x(t+\Delta t) - x(t),\ y(t+\Delta t) - y(t)\big)$$

（ベクトルの$\frac{1}{\Delta t}$倍を計算!）
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\right)$$

（極限を成分ごとに考える!）
$$= \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\right)$$

（xy成分ごとに微分になっている→）
$$= \left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right)$$
⟶（9.3 の成分）と合致する

ステップ 2（定義の作図）：

定義(9.4) で表されるベクトルの矢印を作図すれば，速度$\vec{v}(t)$の向きが理解できるはずである。そ

こで，定義(9.4) の右辺に現れる（極限を考える前の）ベクトルの差「$\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$」を表す矢印を作図せよ。（ベクトル差の正しい作図が理解できていれば，図の補助線 $L_{\Delta t}$に沿った矢印が作図できるはず。）ベクトル「$\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$」の向きは補助線 $L_{\Delta t}$に沿った向きだと分かる。

ステップ 3（極限 $\Delta t\to 0$）　：

上図には，時刻 $t+\Delta t/2$ と $t+\Delta t/4$ での物体 A の位置も示してある。それぞれの時刻でのベクトル「$\vec{r}(t+\Delta t/2)-\vec{r}(t)$」と「$\vec{r}(t+\Delta t/4)-\vec{r}(t)$の矢印に沿った補助線 $L_{\Delta t/2}$，　$L_{\Delta t/4}$を作図せよ。（正しい作図が理解できていれば，「時刻 tの位置と時刻 $t+\Delta t/2$ の位置を通る直線」が$L_{\Delta t/2}$，「時刻 tの位置と時刻 $t+\Delta t/4$ の位置を通る直線」が $L_{\Delta t/4}$になる。）このように，$t+\Delta t$ の "Δt" をどんどん小さくした作図を繰り返していくことが，定義(9.4) の極限 $\Delta t\to 0$で表される作図である。そして，極限 $\Delta t\to 0$を考えると，ベクトル「$\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$」の向きを表す補助線は，位置 $\vec{r}(t)$での軌道曲線の接線 ℓ_tにどんどん近づいていく（Δtが最終的にゼロになると$L_{\Delta t}$は ℓ_tに一致する）ことが分かる。これは速度$\vec{v}(t)$の向きが接線 ℓ_tの方向であることを意味する。作図の注意点（9.3 の図）の(b)が導かれた。

(5) 加速度ベクトル： ひとたび速度ベクトル $\vec{v}(t)$が分かれば，その微分で加速度が得られる。項目(2) の状況設定で，時刻 t における物体 A の加速度ベクトルを表す記号を$\vec{a}(t)$とする。

◎加速度 $\vec{a}(t)$ の成分：

物体 A の加速度$\vec{a}(t)$ は，速度$\vec{v}(t)$の時間的な変化率（時間変数tによる微分）である。

$$\vec{a}(t)=\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}v_x(t)}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}v_y(t)}{\mathrm{d}t}\right)=\left(a_x(t),a_y(t)\right)\quad[\mathrm{m/s^2}] \qquad \text{(9.5 の成分)}$$
$$=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}=\left(\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2},\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}\right)$$

ベクトルの 2 階微分の記号も，関数の 2 階微分の記号と同様の書き方であることに注意せよ。

この加速度ベクトル $\vec{a}(t)$ の大きさは，

$$\text{加速度の大きさ：}\quad a(t)=|\vec{a}(t)|=\sqrt{a_x(t)^2+a_y(t)^2} \qquad \text{(9.5 の大きさ)}$$

◎加速度 $\vec{a}(t)$の作図：

時刻 tにおける物体 A の加速度$\vec{a}(t)$の注意点は次の通り。

（速度$\vec{a}(t)$の作図の注意点）：
(a) 時刻tでの物体 A の位置（近く）に矢印の始点を置く。
(b) 時刻tでの物体 A に働く合力の向きに矢印を描く（次の補足参照）　（9.5 の図）
(c) 矢印の長さは時刻tでの加速度の大きさ（9.5 の大きさ）を表す。

◎加速度$\vec{a}(t)$の向きの補足：

物体に働く力に関する実験事実から，加速度$\vec{a}(t)$の向きは物体に働く合力と同じ向きであることが知られている。今回の授業では加速度と合力の向きが同じという実験事実があるというコメントだけで留めておき，詳しいことは次回に扱う運動方程式で解説する。

(6) 確認**演習** 3： 物体の位置ベクトルが，$\vec{r}(t)=(0.5t,\ -0.25t^2+2t+1)$［m］のとき，この物体の加速度$\vec{a}(t)$を求めよ。（ベクトルを求めるとは，その成分を求めることである。）

(a)加速度$\vec{a}(2)$，$\vec{a}(4)$，$\vec{a}(8)$を求め，確認演習 1，2 で描いた図に加えて作図せよ。加速度の矢印の始点は各時刻の物体の位置に置き，1 目盛りを0.5［$\mathrm{m/s^2}$］とする。

(b)各時刻での加速度$\vec{a}(2)$，$\vec{a}(4)$，$\vec{a}(8)$の向きから，各時刻で物体に働く力（合力）の向きを確認せよ。

(7) 位置・速度・加速度の関係： 前々回の授業と同様に考えて，式(9.3 の成分)，(9.5 の成分) から次の関係も得られる。

$$\vec{v}(t)=\int\vec{a}(t)\mathrm{d}t=\left(\int a_x(t)\mathrm{d}t,\int a_y(t)\mathrm{d}t\right),\qquad \vec{r}(t)=\int\vec{v}(t)\mathrm{d}t=\left(\int v_x(t)\mathrm{d}t,\int v_y(t)\mathrm{d}t\right) \qquad (9.6)$$

ベクトルの積分は，xy成分をそれぞれ積分することである。