第 6 回授業　レポート課題　≪第 7 回目の授業の初めに小テストを行う≫
　テキスト第 4 章の問題演習 4 から，問題 **4-1**［項目(7)(8)，例題 4.1 参照］，問題 **4-2**［項目(10)，例題 4.2 参照］，問題 **4-7**［項目(5)(10)，例題 4.3 参照］，問題 **4-9**［項目(5)(10)参照］を解け。

注意：テキストの解答は略解であり，答案として必要な部分が省略されている場合がある。説明文や適切な図を加えて，答案を作成することを心がけよ。答案作成力も見る。

＊提出方法や提出場所は通常通り（第 1 回配布のプリントを見よ。）　提出期限は **11/7（木）13 時**

第 7 回　積分の基礎事項と位置･速度･加速度の関係：テキスト第 4，20 章

1. 今回（および次回）の授業の目的

力学の目的（前回プリント「授業の目的」参照）を達成するための最重要項目は，第 5，6 章で扱う運動方程式である。その運動方程式には力と加速度が登場する。加速度を正しく理解・計算するためには微分積分が必要である。前回は，加速度が微分を使って定義されることを理解した（同時に微分の基礎事項も身に付けた）が，まだ積分は扱っていない。そこで今回の授業の目的は，積分の基礎事項を身に付けることである。

2. 授業の進行：テキスト第 4，20 章とこのプリントを合わせて理解を深める

(1) 何を考えるか？ ： 以下のように，前回の内容から今回の論点が浮かび上がる。

前回の要点：テキスト p.16 の図のように，x軸上を運動する物体を考える。時刻 t における物体の位置を $x(t)$とすると，物体の速度 $v(t)$は位置 $x(t)$の時間的な変化率であり，物体の加速度 $a(t)$は速度 $v(t)$の時間的な変化率である。つまり（変化率を計算するテクニックが微分なので）$v(t)$と $a(t)$ が，微分を使って次のように定義されることを意味する。（単位は国際単位系で示す。）

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \quad [\mathrm{m/s}] \qquad , \quad a(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \quad [\mathrm{m/s^2}] \tag{7.1}$$

今回の論点：速度・加速度の定義(7.1) から直接できることは，「先に位置 $x(t)$（あるいは速度 $v(t)$ ）が与えられれば，それを微分することで速度 $v(t)$（あるいは加速度 $a(t)$ ）が計算できる」ということ。では，先に速度 $v(t)$（あるいは加速度 $a(t)$ ）が与えられた場合に，どうやって位置 $x(t)$（あるいは速度 $v(t)$ ）が計算できるのか？ この問いが今回の論点である。

論点の整理：今回の論点を数学の視点から見直すと，次のように整理できる：関数 $g(x)$の具体形が分かっているとする。（例えば，$g(x) = -7x^3 + 2$ とか $g(x) = 3\sin(\pi x + 2)$ などの具体的な式が分かっているということ。）このとき，微分の関係式

$$g(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \qquad (7.2))$$

を満たす関数 $f(x)$，言いかえると微分が $g(x)$ になるような関数 $f(x)$ はどう求めるのか？ この $f(x)$ を求める方法を積分という。積分とは微分の逆である。

(2) 積分の考え方と記号の意味： 微分の意味を確認してから，積分の考え方と記号の意味をまとめる。

微分の確認：前回に学んだように，関数 $f(x)$ の微分を表す記号 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ において，

- ○ $\mathrm{d}x$ は変数 x の微小な（すごくすごく小さな）変化量
- ○ $\mathrm{d}f(x)$ は x の微小な変化 $\mathrm{d}x$ に応じた $f(x)$ の微小な変化量

という意味を担っている。つまり，大雑把には

- ○ 微分の大雑把な意味は，$\dfrac{[\text{微小量 } \mathrm{d}f(x)]}{[\text{微小量 } \mathrm{d}x]}$ という分数

である。これは定義（前回プリントの式（6.1)，テキスト p.83）が $\Delta x \to 0$ という極限になっていることからも分かる。（微少量の分数というニュアンスで微分。）

積分の考え方：積分の意味は「微分の逆」であるが，その計算を実行するときの基本的な考え方は，「微小量 $\mathrm{d}f(x)$ をどんどん足していけば，元の関数 $f(x)$が得られる」である（微小に分けたものを積み上げるので積分)。数学では，この考え方を次の記号で表す。

式（7.2）を満たす $f(x)$ を求める積分の記号	: $f(x) = \int \mathrm{d}f(x) = \int g(x)\mathrm{d}x \left[= \int \mathrm{d}x\, g(x) \right]$	(7.3)

ここに現れる記号の意味は以下の通りである。

- 記号 $\mathrm{d}f(x)$ は微分と同じで「変数 x の微小変化 $\mathrm{d}x$ に応じた関数 $f(x)$ の微小変化量」である。さらに，微分 $g(x) = \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ を微小量の分数とみなして $\mathrm{d}f(x) = g(x)\mathrm{d}x$（$= \mathrm{d}x\, g(x)$）と式変形したのが，2 つ目の等号である。
- 記号 $\int$ の読み方は「積分」や「インテグラル Integral 」である。この記号 $\int$ は「足しあげる」の英単語（Sum，Summation）の頭文字“S"”をモチーフにして考案された記号であり，$\int$ の右側に書かれた微小量 $\mathrm{d}f(x)$ あるいは $g(x)\mathrm{d}x$ や $\mathrm{d}x\, g(x)$ を，どんどん足しあげていくことを表している。

積分を表す式（7.3）の記号には上のような意味がある。学生には，**積分記号の意味を把握した上で，記号の使い方を間違えずに適切に答案を書くこと**を要請する。

(3) 積分のポイント： 様々な関数の微分は，前回プリントの式（6.1）の定義によって計算できる（テキスト p. 83 参照）。例えば，変数 t のべき関数 at^b の微分は，$\dfrac{\mathrm{d}[at^b]}{\mathrm{d}t} = abt^{b-1}$ と計算できることは前回に確認した。一方，関数 $g(x)$の積分（7.3）を $g(x)$ の四則演算や極限などの組み合わせで計算しやすい形に表すのは難しい。

そこで，積分は「微分の逆」であることから，積分を「計算方法」というより「対応表を使う方法」と認識するのが便利である。例えば，べき関数 at^b の微分 $\dfrac{\mathrm{d}[at^b]}{\mathrm{d}t} = abt^{b-1}$ から，変数 t のべき関数に対して以下の対応表が得られる。

べき関数の微分と積分の対応表 ：

$$\begin{array}{ccc} at^b + C & \xrightarrow{\text{微分}} & abt^{b-1} \\ \left(\dfrac{a}{p+1} t^{p+1} + C \right) & \xleftarrow[\text{積分}]{} & \left(at^p \right) \end{array} \quad \cdots \left[\begin{array}{l} \text{下のカッコ内は，上の} \\ \text{べき関数を} 1/b \text{倍し} \\ b = p+1 \text{としたもの} \end{array} \right] \qquad (7.4)$$

ただし，$\left\{ \begin{array}{l} a\,,\ b\,,\ C \text{ は任意の定数（ } C \text{ は左側にしか現れない，以下の注意 1 を参照）。} \\ \text{積分（右から左への置き換え）には } p \neq -1 \text{ (} b \neq 0 \text{) という条件がつく。} \\ \text{微分（左から右への置き換え）は } b = 0 \text{ の場合も含む。} \end{array} \right.$

この対応表（7.4）に従って，べき関数を左から右に置き換えるのが微分であり，右か左に置き換えるのが積分である。積分（右から左）には，下段のカッコ内の対応が使いやすい。このように，**どんな関数でも，一たび微分を計算してしまえば，（7.4）のような対応表にまとめることで積分 (7.3) の計算結果を読み取れる**。

注意 1：対応表(|) の左側にだけ任意定数 C が現れる理由は，任意定数の微分がゼロになることである。

任意定数 C の微分はゼロ：$\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}[Ct^0]}{\mathrm{d}t}$ $(= C \times 0t^{-1}) = C \times 0 = 0 \leftarrow \left[\begin{array}{l} \text{微分} \dfrac{\mathrm{d}[at^b]}{\mathrm{d}t} = abt^{b-1} \\ \text{で} a = \mathrm{C},\ b = 0 \text{ の場合} \end{array} \right]$

これを踏まえれば，対応表（7.4）の左側の式$at^b + C$ を微分したら右側の式abt^{b-1} になることが分かる。また，微分した結果 at^p になるような関数（つまり at^p の積分）が $\dfrac{a}{p+1} t^{p+1} + C$であることも分かる。

注意 2：表（7.4）の右側が $p = -1$ の場合（ a/t ）の積分は対数関数になることが知られている。（テキスト p.84 参照。）

(4) 不定積分（第 20 章 p.84）： 対応表（7.4）の積分（右から左への置き換え）は，正確な数学用語では不定積分という。（下の注意 2 が「不定」のニュアンスである。）ここで，不定積分に現れる任意定数を積分定数という。そして，べき関数の不定積分を表す数学記号の正しい表記は以下である。

べき関数 $g(t)=at^p$ の変数 t による不定積分 ： $\displaystyle\int g(t)\mathrm{d}t=\int at^p\mathrm{d}t=\frac{a}{p+1}\,t^{p+1}+C$ （Cは積分定数）

（7.5）

項目(2) の式 (7.3) に従った積分記号の使い方であることを確認せよ。**べき関数の積分（7.5）を使いこなせるようになる**ことを学生には要請する。

注意 1：前回プリントの項目(12)の具体例は，実は物体の位置 $x(t)$ を速度 $v(t)$ の不定積分として（対応表（7.4）を使って）求めたものである。その $x(t)=-3t+C$［m］に現れた任意定数 C は積分定数である。

注意 2：不定積分の計算［対応表（7.4）を使うこと］だけでは，積分定数の具体的な値は決められない（積分定数の具体的な値が不定）。積分定数の具体的な値は，**問題文に与えられた（積分とは別の）条件から決める必要**がある。例えば，前回プリントの項目(13)は，項目(12)の $x(t)=-3t+C$［m］の積分定数 C を決める条件である。

注意 3：数学の授業では，不定積分（7.5）の計算結果に積分定数を書かず，$\int at^p\mathrm{d}t=at^{p+1}/(p+1)$ とだけ記す場合も多い。それは「定数をいちいち書くのは面倒なので省略するが，でも積分定数が必ず足されていることは当然のこととして認識しておくように」という前提（暗黙の了解）である。しかし，**理工学に積分を応用するときは，積分定数が具体的にどんな値になるかが重要になる場合が頻繁に登場する。** 例えば，前回プリントの項目(12) の具体例では，物体の位置 $x(t)=-3t+C$［m］を正確に決めるために，積分定数 C の値を具体的に決める必要がある［項目(8)の条件で決めた］。従って，理工系の学生が数学の科目で積分を学習するときは，積分定数がどこに現れるかに気をつけることを忘れてはいけない。

(5) 位置・速度・加速度の関係（第 4 章 p.17）： 項目(1) にまとめた速度・加速度の定義（7.1）と積分の意味から，x軸上を運動する物体の時刻 t における位置 $x(t)$［m］，速度 $v(t)$［m/s］，加速度 $a(t)$［m/s²］（単位は国際単位系で示す）の間の関係が次のようにまとめられる。テキスト p.17 の図も参照。

$$
\begin{aligned}
v(t)&=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\ [\mathrm{m/s}] \quad\Longleftrightarrow\quad x(t)=\int v(t)\mathrm{d}t\ \ [\mathrm{m}]\\
a(t)&=\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\ [\mathrm{m/s^2}] \quad\Longleftrightarrow\quad v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t\ \ [\mathrm{m/s}]
\end{aligned}
\qquad (7.6)
$$

問題に応じて**「位置・速度・加速度のうち何が先に分かっている状況で何を求めたいのか」を把握した上で，微分あるいは積分を行うのかを的確に判断**すること。

注意（積分の単位）：積分記号 $\int$ は微小量 $g(t)\mathrm{d}t$ を足しあげるという意味なので単位はない。$\mathrm{d}t$は変数 t の微小変化なので，$\mathrm{d}t$ と t の単位は同じである。従って，積分の単位は次のようになる。

$$\left[\text{積分}\int g(t)\mathrm{d}t\text{の単位}\right]=\left[g(t)\text{の単位}\right]\times\left[t\text{の単位}\right]$$

位置・速度・加速度の関係（7.6）から，この単位計算で矛盾がないことも確かめられる。

(6) 演習 1： 問題演習 20 の問題 **20-2**，**20-4** に取り組む。

注意：関数 $g(x)=2x^2+3x-5$ の積分は問題 **20-4** の問(4) のように，

$$\int g(x)\mathrm{d}x=\int(2x^2+3x-5)\mathrm{d}x \quad\leftarrow\quad \left(\begin{array}{l}\text{関数 } 2x^2+3x-5 \text{ の}\\ \text{全体をカッコで囲む}\end{array}\right)$$

と書かなければいけない。なぜなら，$g(x)\mathrm{d}x=(2x^2+3x-5)\mathrm{d}x\neq 2x^2+3x-5\mathrm{d}x$ だからである。$g(x)$ と $\mathrm{d}x$ の掛け算であることを示すカッコを適切に使うこと。

(7) 定積分（p. 84～85）： 工学部では，後期の科目「力学 2」で力学的エネルギーを学習するときに，定積分を扱う。**前期の科目「力学 1（工）・力学（情）」では，学生には不定積分をマスターすることを要請する。** なお，情報学部でも定積分は知っておくべき基礎事項なので，数学の授業を通して理解しておくこと。

(8) 演習 2：テキスト p.18 の例題 **4.3** と問題演習 4 の問題 **4-9** (2)にある速度 $v(t)$ について，加速度 $a(t)$ と位置（座標）$x(t)$を求めよ。

(9) 積分定数のグラフにおける意味： 発展的内容

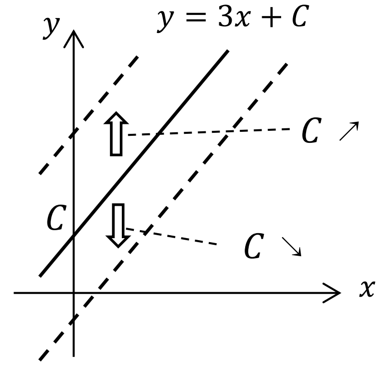
この項目は「力学 1」では発展的内容という位置づけにして，授業時間が足りれば扱う。（これ数学的には基礎的で大切な項目なので，授業で扱わなかった場合でも，不定積分の計算に慣れたら各自で自主的に（または数学の微分積分の授業を通して）把握することを勧める。）

例 1：定数関数 $g(x)=3$ の不定積分 $f(x)=\int g(x)\mathrm{d}x$のグラフ

この $f(x)$は，べき関数の不定積分（7.5）で $a=3$，$p=0$ の場合であり，

$$f(x)=\int g(x)\mathrm{d}x=\int 3\mathrm{d}x=3x+C \quad (C\text{は積分定数})$$

となる。 xy平面に $y=f(x)$ のグラフを描くと，右図のような「傾き 3，y切片 C の直線」になる。積分定数 C の値が大きいほどグラフの直線は上方に位置し（図で C ↗ と記した方向)，積分定数 C の値が小さいほどグラフの直線は下方に位置する（図で C ↘ と記した方向)。

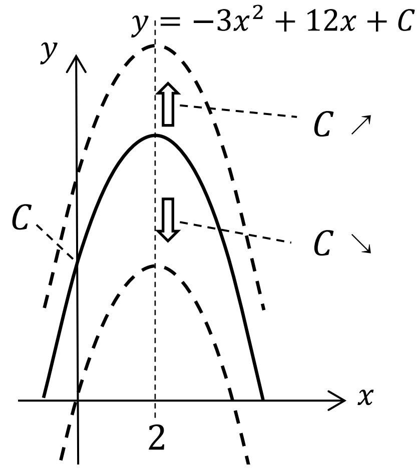


例 2：一次関数 $g(x)=-6x+12$ の不定積分 $f(x)$ のグラフ

この $f(x)$は，べき関数の不定積分（7.5）で $a=-6$，$p=1$ と $a=12$，$p=0$ の場合であり，

$$f(x)=\int g(x)\mathrm{d}x=\int(-6x+12)\mathrm{d}x$$
$$=-6\times\frac{1}{2}x^2+12x+C=-3x^2+12x+C$$
$$=-3(x-2)^2+12+C \quad (C\text{は積分定数})$$

となる。 xy平面に $y=f(x)$ のグラフを描くと，右図のような「頂点の$(x,\ y)$ 座標が$(2,\ 12+C)$，y切片が C，2 次の係数が $-3\ (<0)$ の，下に開いた 2 次関数」になる。積分定数 C の値が大きいほどグラフの曲線は上方に位置し（図で C ↗と記した方向)，積分定数 C の値が小さいほどグラフの曲線は下方に位置する（図でC ↘ と記した方向）



以上の例から分かるように，不定積分に現れる積分定数の値は，不定積分で得られる関数 $f(x)=\int g(x)\mathrm{d}x$のグラフの上下位置を決める値である。そして，項目(4) の注意 2 で述べたように，積分定数の値（グラフの上下位置を決める値）は，積分計算からは決めることが不可能であり，他の付加条件から決める必要がある。

(10) 演習 3：問題演習 4 の問題 **4-3** にある速度 $v(t)$ について，加速度 $a(t)$ と位置（座標）$x(t)$を求めよ。

3. 次回の確認テスト１へ向けて

次回（第８回）の「微分積分と位置･速度･加速度の総合演習」の後，授業後半で実施

範囲：ベクトルと力（合成，分解，成分，つり合い)，微分と速度・加速度（積分は含まれない）
小テストに出題した問題範囲とも一部重複する。

これまでに授業中に扱った問題，レポートで扱った問題，小テストで出題された問題について，適切な答案（図・説明・計算をレイアウトよくまとめた答案）が書けるように解答練習をすること。試験では，答えだけの採点はせず，答えを導くまでの過程に重点を置いて採点する。答案は，分かっていることは省略するのではなく，分かっていることが適切に伝わるように書かなければ評価されない。（解答練習を第７回授業のレポートとする。提出方法に注意すること。）

注意 1：通常の筆記用具（作図用の定規は使用可)，関数電卓（必須）を使用。ノートなどは参照不可。

注意 2：説明や計算が必要な問題では，答えを導く過程を採点する。答えが正しいだけでは不十分。答案には，必要なこと（図・説明・計算）をレイアウトよく，見やすく，読みやすくまとめることが必要。

注意 3：確認テストは落とすために実施するのではありません。現時点での到達度を確認し，不十分な点の学びを深めるためです。テスト解答中でも，学生の多くに共通するミス・かん違いなどを見つけた場合は，全体に注意を促すことがある。