

第5回授業 レポート課題 グラフ、直線の傾き、平均の速度

次回からの授業で、前提となる基礎知識を確認する課題である。

テキスト第17章の問題演習17から、問題17-3, 17-5, 17-7を解答せよ。

基礎セミナテキスト p.63（理科）練習問題 3-3 を解答せよ。直線のグラフの略図も描くこと。

注意：テキストの解答は略解であり、答案として必要な部分が省略されている場合がある。計算式だけでなく、説明文や適切な図を加えて、答案を作成することを心がけよ。答案作成力も見る。

* 提出方法や提出場所・期限は通常通り（第1回配布のプリントを見よ。）

※基礎セミナ「理科」ステップ3・ステップ4が基礎となる。必ず身に着けること。

第6回 微分の基礎事項と速度・加速度の定義：テキスト第4, 20章

1. 今回（および次回以降）の授業の目的

力をベクトルとして正しく扱えること（前回までの内容）を前提に、今回から、ニュートンが17世紀に確立した「力学」という理論体系の基礎を身に付けることを目指す。「力学」の目的は次のように言える。

「力学」の目的：物体がどんな条件でどんな運動をするか知ること

物体の運動を知る上で最も重要な知識（法則）は、第5, 6章で扱う運動方程式である。運動方程式には既に扱ってきた「力」と、今回扱う「加速度」が登場する。この加速度を正しく理解・計算するためには、数学の「微分積分」が必要である。そこで、今回の授業の目的は、①微分の基礎事項を身に付けること、②微分を使った速度・加速度の定義を身に付けることである。

2. 授業の進行：テキスト第4, 20章とこのプリントを合わせて理解を深める

- (1) 何を考えるか？：今回の授業で身に付けることは、「速度」＝「位置の時間による微分」、「加速度」＝「速度の時間による微分」、である。加速度を理解するには、物体の位置、速度そして微分が必要だと分かる。学生には、速度と加速度の意味を理解し、数学の記号を適切に使って書ける・計算できることを要請する。

量と量の関係は関数 $y = f(x)$ を用いて表す。関数をグラフで表したとき、横軸の量が増えたときの、縦軸の量の変化の激しさ（変化率）を表すものは、グラフの傾きである。「速度」や「加速度」は、変化の激しさを表す量である。関数のグラフの傾きや変化率を求めるには、微分が必要である。

基礎理科セミナ等により、直線（1次関数）のグラフおよび直線の傾きについては、一度学んでいることを前提とする。直線の傾きは1次関数の変化の激しさを表す。

テキスト p.83 の図で、関数 $y = f(x)$ の曲線のグラフ上で「 $x = a$ の点（変数 x の値が a である点）」と「 $x = a + \Delta x$ の点（ x の値が $a + \Delta x$ である点）」の2点を通る直線の傾き $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ を、平均変化率とよぶ。

- (2) 微分係数（第20章 p.83）：テキスト p.83 の図から、微分係数（あるいは微係数）とは、関数 $y = f(x)$ の曲線のグラフ上で「 $x = a$ の点」における「接線の傾き」であることを理解せよ。

注意：テキストの説明に出てくる記号 Δx は（2つの文字 Δ と x を合わせて一つの記号として使っており）一つの値を代入する記号である。例えば $\Delta x = 3$ とか $\Delta x = -0.7$ などである。ここでの Δx は決して Δ と x の積という記号ではない。記号の使い方に注意しなければならない。

- (2) 微分係数（第20章 p.83）：テキスト p.83 の図から、微分係数（あるいは微係数）とは、関数 $y = f(x)$ の曲線のグラフ上で「 $x = a$ の点」における「接線の傾き」であることを理解せよ。

理解の定着を目指す作業：適当な曲線とその接線をノートなどに描いて、上述のことを確かめよ。つまり「関数 $y = f(x)$ のグラフ上の各点ごとの接線の傾き」を与える新たな関数が考えられる。その新たな関数を $f(x)$ の導関数あるいは微分という。

関数 $f(x)$ の微分を表す記号は、 $f'(x)$ や $\frac{df(x)}{dx}$ や $\frac{d}{dx} f(x)$ や $\frac{dy}{dx}$ である。そして微分係数 $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=a}$ や $f'(a)$ は、微分の $x = a$ における値（ $f(x)$ のグラフの $x = a$ の点における接線の傾き）を表す記号である。

$$\text{関数 } f(x) \text{ の微分（導関数）の定義： } \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (6.1)$$

注意0：レポートや試験の答案で微分を含む式を書く場合は、 $f'(x)$ や $f'(a)$ のような“'”を用いた書き方でなく、 df/dx のように“d”を用いた書き方で記す。“'”を用いた場合、減点か不正解とみなす。

注意1 (関数への代入)：

例えば $f(x) = 3x^3 - 2x + 7$ のとき、 $f(1+4)$ 、 $f(a+2)$ 、 $f(x+\Delta x)$ は次のように代入される。

$$f(1+4) = 3(1+4)^3 - 2(1+4) + 7 \quad \leftarrow [f(x) = 3x^3 - 2x + 7 \text{ の右辺の } x \text{ を } (1+4) \text{ に置き換える。}]$$

$$f(a+2) = 3 \times \boxed{} - 2 \times \boxed{} + 7 \quad \leftarrow [\text{上の例と同様に空欄を埋めよ。}]$$

$$f(x+\Delta x) = \underline{\hspace{10em}} \quad \leftarrow [\text{上の例と同様に代入せよ。}]$$

注意2 (記号の意味)：

微分は極限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ で定義されるので、記号 $\frac{df(x)}{dx}$ の中の記号 dx は「変数 x のごくごく小さな変化量」、記号 $df(x)$ は「ごくごく小さな dx だけ x が変化したときの、関数 $f(x)$ の変化量 $f(x+dx) - f(x)$ 」(これもごくごく小さな値) というニュアンスである。

注意3 (記号の使い方)：

dx や $df(x)$ は、2 つ以上の文字を合わせて一つの「ごくごく小さな値」を表す記号として使っており、 dx は決して d と x の積ではないし、 $df(x)$ も d と $f(x)$ の積ではない。従って、「 $\frac{df(x)}{dx}$ の d を約分する」というのは不可能である。

注意4 (微分の単位)：

例えば変数 x の単位が時間 $[s]$ 、関数 $f(x)$ で計算される値の単位が距離 $[m]$ のとき、微分 $df(x)/dx$ の単位は $[m/s]$ であることが、微分の定義 (6.1) から導ける。

$$\left[\text{微分 } \frac{df(x)}{dx} \text{ の単位} \right] = \frac{[f(x) \text{ の単位}]}{[x \text{ の単位}]}$$

- (4) 微分 (導関数) の意味：テキスト p.77 微分係数も参照して、微分の定義 (6.1) から、微分 $df(x)/dx$ は変数 x の値の変化に応じて関数 $f(x)$ の値が変化する割合 (あるいは比) だと言える。これを、微分 $df(x)/dx$ とは変数 x に対する関数 $f(x)$ の変化率であるという。微分は「変化率を計算するための計算テクニック」である。

注意：理工学では、「位置の変化率 (速度)」、「電流の変化率」、「温度の変化率」、「加えた力に対する材料の変形率」など、様々な量に変化する様子を、微分を使って扱う (計算する)。微分 (そして積分) の考え方は、前回までに学んだベクトルと並んで、理工系の学生が身に付けるべき重要項目である。

- (5) べき関数 $f(x) = ax^b$ (a, b は定数) の微分 (導関数)：定義から導く。

- $a = 1, b = 2$ の場合 $f(x) = x^2$ の微分 (導関数)

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d[x^2]}{dx} \quad \leftarrow \left[\text{注意：} \frac{df(x)}{dx} \text{ の } f(x) \text{ に具体的な関数を代入するときはカッコで囲む。} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{}{\Delta x} \quad \leftarrow [\text{分子を計算せよ。}]$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\underline{} + \underline{} \Delta x \right) = 2x \quad \leftarrow [\text{下線部分を埋めて、} \frac{d[x^2]}{dx} = 2x \text{ となることを確かめよ。}]$$

- $a = 1, b = 3$ の場合 $f(x) = x^3$ の微分 (導関数)：以下の空欄を埋めよ

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d[x^3]}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\underline{} + \underline{} \Delta x + \underline{} (\Delta x)^2 \right) = 3x^2$$

- a, b の値が任意の定数の場合：べき関数 $f(x) = ax^b$ の微分 $(ax^b)' = \frac{d[ax^b]}{dx} = abx^{b-1}$

理工学では関数の変数として時間 t を考えることも多いので、変数を x から t に置き換えておく。

$$\boxed{\text{べき関数 } at^b \text{ の変数 } t \text{ による微分 : } (at^b)' = \frac{d[at^b]}{dt} = abt^{b-1}} \quad (6.2)$$

べき関数の微分 (6.2) を覚えて、使いこなせるようになることを学生には要請する。

- (6) 演習 1: $\left\{ \begin{array}{l} \text{微分 (6.2) にまだ慣れていない人} \rightarrow \text{問題演習 20 (p.85) の問題 20-3 に取り組む。} \\ \text{微分 (6.2) を既に使いこなせる人} \rightarrow b \text{ が整数の場合で、微分 (6.2) を定義から導く。} \end{array} \right.$

微分 (6.2) を定義 (6.1) から導くヒント：以下の一連の計算を理解できることが大切、

$$\begin{aligned} (x+y)^b &= (x+y) \times (x+y) \times \cdots \times (x+y) \quad \leftarrow b \text{ 個の } (x+y) \text{ の積} \\ &= x^b + bx^{b-1}y + \underbrace{\frac{b(b-1)}{2} x^{b-2}y^2 + \cdots + \frac{b(b-1)}{2} x^2y^{b-2} + bxy^{b-1} + y^b}_{\uparrow} \quad \leftarrow (b+1) \text{ 個の和} \end{aligned}$$

b 個の $(x+y)$ のうち $(b-2)$ 個の $(x+y)$ から x を選んで、残りの 2 個の $(x+y)$ から y を選べば $x^{b-2}y^2$ になる。そして、そのような選び方は $b(b-1)/2$ 通りだけ可能。

この計算を、 x を 0 個選ぶ場合、1 個選ぶ場合、 $\cdots$ 、 b 個選ぶ場合、と繰り返す。

$$\text{よって、} (t+\Delta t)^b - t^b = bt^{b-1}\Delta t + O t^{b-2}(\Delta t)^2 + \square t^{b-3}(\Delta t)^3 + \cdots + (\Delta t)^b \quad (\text{O, } \square \text{ は定数})$$

ここまでの計算を基に、べき関数の微分 (6.2) を定義 (6.1) から導いてみよ。

- (7) 位置と変位 (第 4 章 p.16)：次の点に注意せよ。

注意 1：物体が x 軸上で直線運動する場合を考えると、時刻 t での物体の位置 (座標) は、何らかの関数 $x(t)$ で表せる。(例えば、 $x(t) = -2t^2 + 7t + 1$ [m] など。 $x = f(t)$ と書かないで、 $x(t)$ と書く。)

注意 2：変位とは [ある時刻 t_1 から次の時刻 t_2 ($t_2 > t_1$) の間の] 物体の位置の変化量

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = x_2 - x_1$$

である。位置と変位という用語の意味を正しく理解し、正確に使い分けること。

- (8) 平均速度と速度 (p.16)：項目(7)を踏まえて、次の点に注意せよ。

注意 1：物体が x 軸上で直線運動する場合の位置 $x(t)$ の $x-t$ グラフ (適当な曲線) において、グラフ上で時刻 t_1 と t_2 に対応する 2 点を通る直線を作図せよ。その直線の傾きが平均速度 $\bar{v}$ である。

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \text{テキスト p.17 の例題 4.1 で計算を確認 (グラフも描く)}.$$

注意 2： x 軸上を運動する物体の位置を表す関数を $x(t)$ とすると、物体の速度 (瞬間の速度) はその微分である。

$$\boxed{\text{物体の速度の定義 : } v(t) = \frac{dx(t)}{dt}} \quad \cdots \quad \text{確実に覚えて微分が計算できることを要請する!} \quad (6.3)$$

位置 $x(t)$ の $x-t$ グラフにおいて、速度 $v(t)$ は接線の傾きを与える関数であることが分かる。さらに、項目(4)より、速度とは位置の時間的な変化率であることが分かる。

注意 3：項目(3)の注意 4 から、速度 $v(t)$ の単位が計算できる。国際単位系 (SI, テキスト第 14 章 p.62) では、速度 $v(t)$ の単位は [m/s] である。

注意 4：任意の時刻の速度 $v(t)$ の値は、プラスにもマイナスにも (ゼロにも) なり得る。「速度」という用語の意味は、「符号も含めて [m/s] という単位を持つ値」である。一方、「速さ」という用語の意味は、「速度の絶対値 $|v(t)|$ 」である。(さらに、物体が平面上や空間内を運動する場合には、「速度」とはベクトルとしてあり、その向きは物体の移動方向、大きさは「速さ」である。)

- (9) 力学における微分の必然性：テキスト p.16 の、物体が x 軸上を運動している状況の図を使って説明する。平均速度 $\bar{v} = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$ は、時刻 t_1 で位置 x_1 を通過し、時刻 t_2 で位置 x_2 を通過しさえすれば (時刻 $t_1 \sim t_2$ の運動がどんな運動であっても) 必ず同一の値 $(x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$ である。つまり、平均速度を考えている限り、時刻 $t_1 \sim t_2$ の運動を区別することが不可能であり、力学の目的「物体の運動を知る」が達成できない。このように運動の区別ができなくなる原因は、時刻差 $t_2 - t_1 (\neq 0)$ がある

ことである。

そこで、時刻 t_2 を t_1 にどんどん近づけていく (極限 $\Delta t = t_2 - t_1 \rightarrow 0$ を考える) ことで、時刻差をなくすことを考える。時刻差がなくなれば、運動が区別できないという問題が解消され、力学の目的に沿うことができる。つまり、極限 $\Delta t = t_2 - t_1 \rightarrow 0$ を考えればよい。そして、平均速度 $\bar{v}$ に対して極限 $\Delta t \rightarrow 0$ を考えれば、自然と微分で与えられる速度 (6.3) が得られる。

このように、物理学 (の一つである力学) では必然的に微分が登場する。実際、人類の科学史上の事実として、まさにニュートンが力学という理論体系を作り上げるために、必要に迫られて微分積分という数学を発明した。(ライプニッツもニュートンと同時期に微分積分を作ったが。) ニュートンは、微分積分という新しい数学と、力学という物理学の新理論を作り上げた凄まじい天才だった。

- (10) 平均加速度と加速度 (p.16~17): 平均速度と速度が理解できていれば、加速度は理解しやすい。

注意 1: 平均加速度 $\bar{a}$ は、平均速度 $\bar{v}$ の分子の変位を、速度の変化量に置き換えたもの。

$$\text{速度変化 } \Delta v = v(t_2) - v(t_1) = v_2 - v_1$$

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow \text{テキスト p.18 の例題 4.2 で計算を確認 (グラフも描く)}.$$

注意 2: 速度 (6.3) は位置の時間変化率であった。それに対して、加速度 $a(t)$ は速度 $v(t)$ の時間的な変化率であり、(変化率を計算するテクニックが微分なので) 次のような微分で定義される。

$\text{物体の加速度の定義: } a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$	... 確実に覚えて微分が計算 できることを要請する!	(6.4)
--	--------------------------------	-------

注意 3: 項目(3) 「微分・導関数」の注意 4 から、速度 $a(t)$ の単位が計算できる。国際単位系 (p.68) では、加速度 $a(t)$ の単位は次のように計算できる

$$[\text{加速度の単位}] = \frac{(\text{m/s})}{\text{s}} = [\text{m/s}^2] \quad \cdots \quad \begin{array}{l} \text{単位の計算法則は分数計算} \\ \text{と同じであるに注意} \end{array}$$

注意 4: 関数 $f(x)$ の変数 x による微分を立て続けに 2 回行うこと (これを関数 $f(x)$ の 2 階微分という) を、次のような記号を使って書き表す。

$$f(x) \text{ の 2 階微分の記号: } f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} f(x) \text{ など。} \quad \leftarrow \text{“2” を書く場所に注意!}$$

速度の定義 (6.3) と加速度の定義 (6.4) から、加速度は物体の位置 $x(t)$ の 2 階微分であることが分かる。

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \quad (6.5)$$

- (11) 演習 2: テキスト p.19 の例題 4.3 に取り組む (グラフも描く)。

- (12) 運動の簡単な例、等速直線運動 (テキスト p.16): 速度が一定の (時間によって変化しない) 運動を等速直線運動 (等速度運動) という。

具体例: 物体が $v(t) = -3$ [m/s] の等速直線運動を行っているとする。速度の定義 (6.3) から、物体の位置 $x(t)$ は微分したら一定値 -3 になるような関数でなければならないので (べき関数の微分 (6.2) を踏まえると),

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -3 \text{ [m/s]} \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = -3t + C \text{ [m]} \quad (C \text{ は任意定数})$$

となることが分かる。右側の $x(t)$ を微分して、 $v(t) = -3$ [m/s] となることを確かめよ。

- (13) 演習 3: 項目 2-(12) の具体例で、時刻 $t = 0$ [s] での物体の位置 $x(0) = 50$ [m] だとする。この場合の定数 C の値を、単位も付けて求めよ。また、この物体の加速度 $a(t)$ の式も求めよ。

<時間があれば行う>

- (14) 演習 4: テキスト p.85 の問題演習 20 の問題 20-1, 20-5 に取り組む。