

第 11 回授業 レポート課題

- (A) (1)運動方程式から力の単位を計算し、基本単位 [kg], [m], [s] を用いて [N] を表せ。
(2)10 回目授業プリントから、項目(7)演習 3、項目(8)演習 4 を答えよ。
- (B) テキスト問題演習 6、問題 6-6 (p.27) を解け。 x 軸を水平右向き、 y 軸を鉛直上向きに設定してベクトルとして答えよ。なお物体に、右向きの速度を与えた位置の x 座標を $x = 0$ [m]、時刻を $t = 0$ [s] とする。水平面の高さを $y = 0$ [m] とする。また、初めに次の追加問題に答えること。
- 追加問題 1： 状況設定を表す図を描き、物体に働く重力 $\vec{F}$ 、水平面が物体に加える垂直抗力 $\vec{N}$ 、動摩擦力 $\vec{f}$ を表す矢印を描き込め。
- 追加問題 2： 重力 $\vec{F}$ 、垂直抗力 $\vec{N}$ の xy 成分を答えよ。さらに、動摩擦係数を μ' として動摩擦力 $\vec{f}$ の xy 成分を答えよ。ただし μ' の値は後の問(4) で求めるので、この追加問題 2 では記号 μ' を使って答えよ。
- 追加問題 3： いまの設定において、時刻 $t = 0$ [s] における物体の速度 $\vec{v}(0)$ と位置 $\vec{r}(0)$ の xy 成分を答えよ。（これは問(2) を解く際の初期条件になる。）
- (C) テキストの問題演習 6、問題 6-11 (p.28) を解け。物体 A と物体 B で、それぞれ異なる向きの座標軸を設定して考える。それぞれどの方向を正の向きとしたかを記してから、運動方程式を立てること。
- 注意：テキストの解答は略解であり、答案として必要な部分が省略されている場合がある。計算式だけでなく、説明文や適切な図を加えて、答案を作成することを心がけよ。答案作成力も見ろ。
- * 提出方法や提出場所・期限は通常通り（第 1 回配布のプリントを見よ。）

第 1 2 回 放物運動 1（運動方程式を解く）：テキスト第 6, 7, 8 章

1. 今回の授業の目的

前回までの授業で、ベクトルと微分積分に基づいて位置・速度・加速度・力を把握した上で、ニュートン力学の 3 つの基本法則を理解した。これでニュートン力学の理論体系の基礎事項がようやくそろったことになる。そこで、今回の授業の目的は、ニュートン力学で実際の運動を理解する具体例として、地表付近での放物運動を理解することである。

2. 授業の進行：テキスト第 6, 7, 8 章とこのプリントを合わせて理解を深める

- (1) 状況設定： 以下の設定で、地表付近での物体の運動を考える。（単位は国際単位系で示す。）
- 空気抵抗は無視でき、物体に働く力は重力（第 2 章、3 回目授業プリント参照）だけである。地表付近で重力だけが働くことで実現する運動を放物運動という。（地上で物体が放り投げられたときの運動。）
 - 物体の質量を m [kg]、重力加速度の大きさを g [m/s^2] とする。（「大きさ」とは正の値なので、 m だけでなく g も正の定数だと明確に認識しておかないと、項目(2) の計算で符号を考え間違える恐れがある。）
 - x 軸を水平方向に、 y 軸を鉛直上向きに設定する。（以下に計算するベクトルの成分の符号は、この座標軸の設定に従った符号である。）
 - 初期条件は次の通り。ただし、 v_{0x} 、 v_{0y} 、 x_0 、 y_0 は定数とする。

$$\text{初期条件：時刻 } t = 0 \text{ [s] で、} \vec{v}(0) = (v_{0x}, v_{0y}) \text{ [m/s]} \quad \vec{r}(0) = (x_0, y_0) \text{ [m]} \quad (12.1)$$

注意 1： テスト問題では、初期条件の定数 v_{0x} 、 v_{0y} 、 x_0 、 y_0 に具体的な値を決めて出題する。しかし、このプリントでは、数学的な記号の扱いの訓練という意味も込めて、初期条件の定数は記号 v_{0x} 、 v_{0y} 、 x_0 、 y_0 のままで解説を続けていく。前回までの授業で、定数の値を具体的な数値で与えた場合の微分積分の計算は何度も繰り返してきた。今回は、どの記号が定数で、どの記号が変数なのかに気をつけながら微分積分の計算を実行していこう。

注意 2： 3 回目の授業プリント、項目(2) の注意 6 を再確認せよ。「地表付近」という状況設定の意味は、物体に働く重力を「物体が地表から多少離れても、地上に置かれたときに働く重力の向きと強さのままで一定だと近似する」という意味である。地表からの高さが地球の半径に比べて無視できないほど高くなる場合は、この近似が成り立たない。

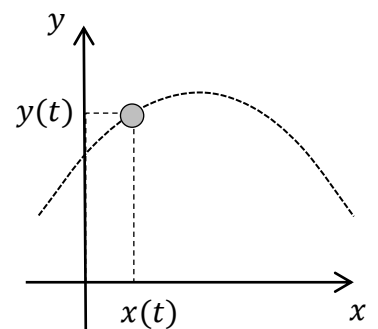
注意 3：テキスト p.32 では、初期条件の速度がゼロ $\vec{v}(0) = \vec{0}$ [m/s] の場合の放物運動を「自由落下」と言っているが、これは物理学の正確な専門用語ではない。物理学の正確な専門用語では、「物体に重力（地表付近に限定されなければ万有引力）だけが働いたときに実現する運動」を「自由落下」という。「鉛直投げ上げ」も「水平投射」も「自由落下」である。人工衛星や国際宇宙ステーションは（自分の推進力は使わず地球の万有引力の作用だけで）「自由落下」をし続けている結果、地球を周回しているのである。

注意 4：初期条件が、時刻 $t = t_0 \neq 0$ [s] で与えられている場合でも、同様にして解くことができるのが、式が複雑になるのでここでは扱わない。この場合の解は、以下で求めた解の式で、 t を $(t - t_0)$ に置き換えた式である。

(2) 力学の基本パターン（第 6 章 p.25 の手順）の実行：放物運動の運動方程式を解いて位置 $\vec{r}(t)$ を求める計算は、これまでの授業で扱ってきた問題やテキスト第 7 章 p.29, 第 8 章 p.32, p.33 などにある。これらを総合して、項目(1) の設定における放物運動を「力学の基本パターン（p.25）」に沿って正確に扱っていく。以下、作図や積分計算を実行しながら、解説していく。

物体に働く力 $\vec{F}(t)$ (p.24 の①, ②)：右図は、放物運動している物体の、任意の時刻 t における状況である。重力を決める法則（第 2 章）から、重力 $\vec{F}(t)$ を表す矢印を作図し、その成分をまとめると、

$$\vec{F}(t) = \left(\quad , \quad \right) \quad [\quad]$$



運動方程式 (p.24 の③)：時刻 t における物体の加速度を $\vec{a}(t)$ とすると、運動方程式は $(m, \vec{F}(t), \vec{a}(t))$ で表して、

$\Rightarrow$

加速度 $\vec{a}(t)$ (p.24 の④)：運動方程式から加速度を求めると、

$$\vec{a}(t) = \left(\quad , \quad \right) \Rightarrow \text{成分ごとに} \begin{cases} a_x(t) = \underline{\hspace{2cm}} \\ a_y(t) = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

注意 1：物体の位置の x 成分 $x(t)$ は「加速度ゼロの運動」、 y 成分 $y(t)$ は「加速度が一定の運動（等加速度運動）」だと分かる。 x 成分 $x(t)$ の加速度ゼロの運動は、次の速度の計算から「速度が一定の運動（等速度運動）」だと分かる。

注意 2： x 成分 $x(t)$ の等速度運動は、例えば第 6 回の授業プリントの項目(12), (13) で既に扱っている。また、 y 成分 $y(t)$ の等加速度運動は、例えば第 8 回目授業のレポート問題で既に扱っている。

速度 $\vec{v}(t)$ (p.25 の⑤)：速度は加速度の積分で得られるので、 A_x, A_y を積分定数として、
[補足：以下の y 成分の積分で、 g は定数であり、変数は t であることに注意。]

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t) dt \Rightarrow \text{成分ごとに} \begin{cases} v_x(t) = \underline{\hspace{2cm}} \\ v_y(t) = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \quad (12.2)$$

ここで、速度の初期条件 (12.1) から A_x, A_y を求めると、

[補足：以下の計算は単に通常の代数方程式を解くだけであるが、求めるものが A_x, A_y であることに注意して、式変形を混乱せずに実行すること。]

x 成分：初期条件は $v_x(0) = v_{0x}$ (12.1- v_x) $\Leftrightarrow$ (12.2) から

一致するように決めると $A_x =$ _____

y 成分：初期条件は $v_y(0) = v_{0y}$ (12.1- v_y) $\Leftrightarrow$ (12.2) から

一致するように決めると $A_y =$ _____

(12.3)

決定した積分定数 A_x, A_y の値を (12.2) に代入して,

$$\vec{v}(t) = \left(\quad, \quad \right) \quad [\quad] \quad (12.4)$$

注意 3：速度の x 成分 $v_x(t)$ は等速度運動になっていることを確認せよ。

位置 $\vec{r}(t)$ (p.25 の⑥)：位置は速度の積分で得られるので， B_x, B_y を積分定数として，

補足：以下の積分の計算では，ひとまず，速度の積分定数 A_x, A_y を使ったまま式 (12.2) を積分しておこう。そして，最後に式 (12.3) の A_x, A_y を代入すればよい。なお，積分の計算では，変数は t であり，その他の記号は全て定数であることに注意。

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t) dt \quad \Leftrightarrow \quad \text{成分ごとに} \quad \begin{cases} x(t) = \text{_____} \\ y(t) = \text{_____} \end{cases} \quad (12.5)$$

ここで，速度の初期条件 (12.1) から B_x, B_y を求めると，

補足：以下の計算は単に通常の代数方程式を解くだけであるが，求めるものが B_x, B_y であることに注意して，式変形を混乱せずに実行すること。

x 成分：初期条件は $x(0) = x_0$ (12.1- x) $\Leftrightarrow$ (12.5) から

一致するように決めると $B_x =$ _____

y 成分：初期条件は $y(0) = y_0$ (12.1- y) $\Leftrightarrow$ (12.5) から

一致するように決めると $B_y =$ _____

(12.6)

決定した積分定数 B_x, B_y の値と A_x, A_y の値を (12.5) に代入して,

$$\vec{r}(t) = \left(\quad, \quad \right) \quad [\quad] \quad (12.7)$$

$$\text{成分ごとに} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x(t) = \text{_____} \\ y(t) = \text{_____} \end{cases} \quad (12.7\text{-成分})$$

(3) 放物運動の特徴：放物運動の特徴を理解していく。

軌道曲線 (テキスト p.33)：準備の演習を行ってから，p.33 の「軌跡の式」に対応する解説へと進む。

準備演習 1：初期条件の速度で， $v_{0x} > 0$ とする。このとき，次のそれぞれの場合で，時刻 $t = 0[s]$ 以降に物体が xy 面上に描く軌道曲線の概形 (大まかな形) の予想をノートに描け。

(a) $v_{0y} > 0$ の場合， (b) $v_{0y} = 0$ の場合， (c) $v_{0y} < 0$ の場合

以下，この予想した軌道曲線を表す式 $y = f(x)$ を求めていく。

位置ベクトル $\vec{r}(t)$ の x 成分と y 成分の関係式 $y = f(x)$ を求めれば，それが軌道曲線を表す方程式である。項目 2-(2) の (12.7-成分) から (変数を表す t) を省略して， $x(t)$ と $y(t)$ を単純に x, y と

書いて)

$$\begin{cases} x = v_{0x} t + x_0 \\ y = -\frac{g}{2} t^2 + v_{0y} t + y_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x-x_0}{v_{0x}}$$

第 1 式から得られる t を第 2 式に代入して,

$$y = -\frac{g}{2} \left(\frac{x-x_0}{v_{0x}} \right)^2 + v_{0y} \left(\frac{x-x_0}{v_{0x}} \right) + y_0$$

よって, 軌道曲線を表す方程式 $y = f(x)$ は,

$$f(x) = \frac{\quad}{\quad} x^2 + \left[\quad \right] x + \left[\quad \right]$$

放物運動の軌道は, 上に凸の 2 次曲線 (2 次の係数が負の 2 次関数のグラフ) になることが分かる。また, 速度ベクトルの矢印は軌道曲線の接線方向を向くことを思い出せば, 時刻 $t = 0$ で $v_{0y} > 0$ あれば, 時刻 $t = 0$ 以降の放物運動が, どこかで頂点を通過することが分かる。⇒ 準備演習 1 の答えの適切な図を描いて確認せよ!

$v_{0y} > 0$ の場合の軌道の頂点を通過する時刻 t_1 : 準備の演習を行ってから, 軌道曲線 $y = f(x)$ の頂点を考える。

準備演習 2: 実際に何か物を投げて, $v_{0y} > 0$ の放物運動をさせよ。そして, その物体に水平に光を当てたときに垂直な壁に写る影の運動をイメージせよ。その影の運動が, 位置の y 成分 $y(t)$ で表される運動である。その $y(t)$ で表される時刻 t_0 以降の運動は, 一旦上昇してから下降することを確認せよ。(なお, 物体に鉛直下向きに光を当てたときに水平な床に写る影の運動が, $x(t)$ で表される運動である。) さらに, $y(t)$ で表される運動が上昇から下降に変化する瞬間が, 実際の物体が 2 次曲線 (放物線) 軌道の頂点を通過する瞬間であることを確認せよ。

物体が 2 次曲線軌道の頂点を通過する時刻 t_1 を求める。準備演習 2 より, 時刻 t_1 において鉛直な壁に写った物体の影の位置 $y(t)$ が上昇から下降に変化する瞬間なので, $y(t)$ で表される運動の速度 (速度の y 成分) $v_y(t)$ が, その一瞬だけゼロにならなければならない。よって, 速度 (12.4) の y 成分より,

$$v_y(t_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\quad}{\quad} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{\quad}{\quad}$$

と求まる。この t_{top} を位置 (12.7) の時間 t に代入すれば, 頂点の位置座標も求まる。

$v_{0y} > 0$ の場合に, $t = t_0 = 0$ の高さと同じ高さに戻る時刻 t_2 : この時刻 t_2 において, 式 (12.7) の y 成分を使って,

$$y(t_2) = y_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\quad}{\quad} = 0$$

となる。これを, t_2 を求めるための式だと考え, t_2 についての 2 次方程式になっていることが分かる。そして, 初期条件 (12.1) より, この 2 次方程式の解の一つは必ず $t_0 (= 0)$ と等しい。(なぜならば, $t = t_0 = 0$ のときに高さ y_0 だから。) 従って, 上の 2 次方程式で $t_0 (= 0)$ と等しくない方の解が t_2 である。なお, 時刻 t_0, t_1, t_2 の位置が分かれば, (軌道は 2 次曲線だと分かっている) 容易に軌道曲線が描ける。