

第9回授業 レポート課題

今回はテキストに載っていない問題である。第9回の授業プリントに加えて、第6回の授業プリントおよびレポート問題（問題4-7など）の答案例も参考にして取り組むとよい。

問 xy 平面上を運動する物体Aの位置ベクトルが、 $\vec{r}(t) = (2t - 1, t^2 - 3)$ [m] だとする。

- (1)(a) 物体Aの軌道曲線を時刻 -1 [s]~ 3 [s]の範囲で描け。また位置ベクトル $\vec{r}(-1), \vec{r}(0), \vec{r}(1), \vec{r}(2), \vec{r}(3)$ を求め、作図せよ（矢印だけでなく記号も）。
- (b) 時刻 $t = 3$ [s] のときの、原点Oと物体Aの距離を求めよ。
- (2)(a) 物体Aの速度 $\vec{v}(t)$ を求めよ。（ベクトルを求めるとは、その成分を求めることである。）
- (b) 速度 $\vec{v}(0), \vec{v}(1), \vec{v}(2)$ を求め、(1)(a)で描いた図に加えて作図せよ（矢印だけでなく記号も）。速度の矢印の始点は各時刻の物体の位置に置き、1目盛りを 1 [m/s] とする。
- (c) 時刻 $t = 2$ [s] のときの、物体の速さ $v(2)$ を求めよ。
- (3)(a) 物体Aの加速度 $\vec{a}(t)$ を求めよ。（ベクトルを求めるとは、その成分を求めることである。）
- (b) 加速度 $\vec{a}(0), \vec{a}(1), \vec{a}(2)$ を求め、(1)(a)で描いた図に加えて作図せよ（矢印だけでなく記号も）。速度の矢印の始点は各時刻の物体の位置に置き、1目盛りを 1 [m/s²] とする
- (c) 時刻 $t = 1$ [s] のときの、物体の加速度の大きさ $a(1)$ を求めよ。

* 提出方法や提出場所・期限は通常通り（第1回配布のプリントを見よ。）

第10回 力学の3つの基本法則1（導入）：テキスト第5、6章

1. 今回の授業の目的

第1回目から前回までの授業を踏まえて、いよいよ力学の目的「物体がどんな条件でどんな運動をするかを知ること（7回目授業のプリント参照）」を達成するための基本法則を扱う。そこで、今回の授業の目的は、力学の目的を達成するための3つの基本法則を理解して覚えることである。

2. 授業の進行：テキスト第5、6章とこのプリントを合わせて理解を深める

(1) 力学の目的と基本法則の意義：段階的な考察で基本法則の意義をまとめる。

- 力学の目的は「物体がどんな条件でどんな運動をするかを知ること」である。では、具体的に何を求めれば、「力学の目的を達成した」と言えるだろうか？ この問いに答えるには、「物体の運動とは時々刻々と物体の位置が移り変わっていくこと」という認識が重要だろう。つまり、「力学の目的（運動を知ること）を達成する」とは、物体の位置 $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ を求めることである。
- 物体の位置 $\vec{r}(t)$ を求める（力学の目的「運動を知ること」を達成する）ために最低限、考えなければいけないものは何か？ それは、日常経験（簡単な実験事実）から次の5つと考えてよい。

$$\begin{array}{l} \text{力学に最低限} \\ \text{必要な物理量} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{物体の位置：} \vec{r}(t) = (x(t), y(t)) \text{ [m]} \\ \text{物体の速度：} \vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t)) \text{ [m/s]} \\ \text{物体の加速度：} \vec{a}(t) = (a_x(t), a_y(t)) \text{ [m/s}^2\text{]} \\ \text{物体に働く力：} \vec{F}(t) = (F_x(t), F_y(t)) \text{ [N]} \rightarrow \text{ [kg} \cdot \text{m/s}^2\text{]} \\ \text{物体の質量：} m \text{ [kg]} \end{array} \right. \quad (10.1)$$

位置・速度・加速度の必要性：

位置・速度・加速度は互いに微分積分で結びついているのだから、力学の目的（物体の位置を求める）を達成するために最低限考えるべき物理量である。

力の必要性：

日常経験で、「止まっている物体に力を加えると動き出す」、「動いている物体に（速度に対して）横向きに力を加えると速度の向きが変わる」ことは良く知っている。

⇒ 確認実験：机上に何か物を置いて、手の力で押して動かしてみよ。速度が0から増加する。
机上で何か物を押し出して滑らせよ。動摩擦力によって速度が0へと減少する。

これは、力によって速度（という運動を表す物理量）が変化するという実験事実である。言い換えれば（速度の変化率が加速度なので）力によって加速する（加速度が発生する）という実験事

実である。この実験事実から、力も「力学の目的 (物体の位置を求める) を達成するために最低限考えるべき物理量」の一つのはずである。

質量の必要性:

質量が異なる 2 つの物体 (共に静止しているとする) に同じ強さの力を加えても、重い方が動かしにくく、軽い方が動かしやすいことは、日常経験で良く知っている。

⇒確認実験: 明らかに質量が異なる 2 つの物体に、手で同じ強さの力を加えてみよ。

これは、物体に力を加えたとき、質量が大きい (小さい) ほど物体を加速させにくい (やすい) という実験事実である。この実験事実から、質量も「力学の目的 (物体の位置を求める) を達成するために最低限考えるべき物理量」の一つのはずである。

注意 1: 上記の考察だけでは、力の単位が $[N] = [kg \cdot m/s^2]$ であることは導けないので、いまの項目 2-(1)の段階では、必要な物理量 (10.1) の中に力の単位を描き込むことは (論理的に) 不可能である。しかし、力の単位が $[N] = [kg \cdot m/s^2]$ であることを説明 (証明) なしで 2 回目の授業プリント項目(9) で天下り的に述べたので、力の単位を書いてしまった。論理的に正確には、今回の項目(3) の運動方程式によって、力の単位が $[N] = [kg \cdot m/s^2]$ であることが導かれる。

● 以上の考察は次のようにまとめられる:

力学の目的「物体の運動を知ること」を正確に言うと、「物体の位置 $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ [m] を求めること」である。また、この目的を達成するために最低限、考えるべき物理量は、リスト (10.1) の 5 つ (位置・速度・加速度・力・質量) である。

ここから浮かび上がる疑問は、リスト (10.1) の中の 4 つ (速度・加速度・力・質量) からどうやって位置が決めるか? である。この疑問に答えるのが、ニュートンが発見した力学の 3 つの基本法則である。

物体の速度・加速度・力・質量から位置を決めるために使われる基本法則が「慣性の法則」、「運動の法則 (運動方程式)」、「作用・反作用の法則」である。この 3 法則はニュートンが様々な実験 (と数学的考察) から導いた実験事実であり、理解して覚えなければならない。

注意 2: 「なぜこの 3 法則が正しいのか・成立するのか」という根本的な理由は、人類には未だ謎である。しかし、実験事実として正しいことは既に知っている。この 3 法則が正しいことを (理由はよく分からないが) とにかく認めてしまえば、この 3 法則に基づいて物体の運動が決まる (位置 $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ が求まる) のである。このように、以下に説明する 3 法則から物体の運動が決まるという理論体系をニュートン力学 (あるいは一言で力学) という。

注意 3: 専門科目で「工業力学」、「構造力学」、「材料力学」、「流体力学」などの名称の科目は、このニュートン力学の応用科目である。また、「熱力学」や「電磁気学」などでも、ニュートン力学の考え方を頻繁に利用している。理工系において、ニュートン力学は様々な分野に多大な影響を与えている理論体系であり (ニュートン力学なくして現代文明はあり得ない!), そのニュートン力学を扱う科目は基礎的で重要な科目となっている。十分よく勉強して身に付けることを強く勧める。

(2) 慣性の法則 (テキスト第 5 章 p.21): 慣性の法則の内容は第 5 章 p.21 にまとまっている。確認せよ。この慣性の法則は、(加速運動していない観測者から見て) 物体に働く力の和 (合力) がゼロの場合の運動を決める法則である。合力がゼロという前提条件 (慣性の法則の適用範囲) を忘れてはいけない。(物体に力が働く場合の運動は項目(3)の運動方程式で決まる。)

注意 1: 物体が完全に静止する場合の力のつり合い (テキスト p.2, 4 回目プリント項目 2-(5) 参照) は、慣性の法則で速度がゼロの場合の応用である。

注意 2: 慣性の法則と聞いて思い出すべきことの一つは、宇宙飛行士の映像である。宇宙ステーション内で飛行士が投げたペンが、等速直線運動する様子を思い出そう。それは、物体にまったく力が働かなければ (力の和がゼロであれば) 等速直線運動することを明快に示している。

注意 3: 宇宙飛行士の映像や、摩擦のない台車を水平台上で滑らす実験などで、確かに慣性の法則が

成立することは実験的に確認できる。しかし、他の法則から慣性の法則を導くことは現在の物理学では不可能であり、正しい実験事実として(反証が見つかるまでは)認めなければならない。

- (3) 運動の法則(運動方程式)(第5章 p.21, 第6章 p.25): 第5章 p.21 にまとめられているように、運動の法則とは運動方程式が成立することである。以下の $\vec{F}(t)$ は、時刻 t で物体に働く力の和(合力)である。

$$\text{運動方程式: } m\vec{a}(t) = \vec{F}(t) \iff (\text{成分ごとに分けると}) \begin{cases} ma_x(t) = F_x(t) \\ ma_y(t) = F_y(t) \end{cases} \quad (10.2)$$

この右辺の力 \vec{F} の具体例は第2章(第3回の授業)で扱い、力をベクトルとして正しく扱う考え方を第6回までの授業で扱ってきた。そして、左辺の加速度 $\vec{a}(t)$ を微分積分とベクトルに基づいて正しく扱う考え方を、第7回から前回までの授業で扱ってきた。以下は、運動方程式(10.2)に関する重要事項である:

力学の基本パターン(運動方程式(10.2)から位置 $\vec{r}(t)$ を導く手順) :

もしも初めに力 $\vec{F}(t) = (F_x(t), F_y(t))$ の成分と質量 m が分かれば、運動方程式(10.2)に代入して加速度 $\vec{a}(t) = (1/m)\vec{F}(t)$ が求まる。そして、前回の授業までに扱ったように、積分を繰り返せば位置 $\vec{r}(t)$ が求まる。ここで注意点は「初めに力 $\vec{F}(t)$ をどう求めるか」であるが、それは状況設定に応じて第2章(第3回の授業)の「力の法則」と後の項目(5)「作用・反作用の法則」を適切に組合せればよい。

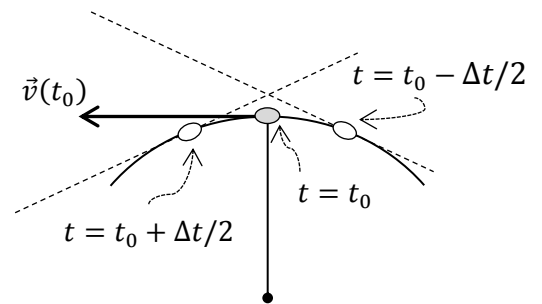
テキスト第6章 p.25 に、運動方程式を通して位置 $\vec{r}(t)$ を求める手順がまとまっている。学生には、その「力学の基本パターン」をよく確認して確実に身に付けることを要請する。

力 $\vec{F}(t)$ の単位の導出: 運動方程式(10.2)から、力の単位が次のように計算して導かれる。

$$\text{力の単位 [N]} = [\text{質量の単位}] \times [\text{加速度の単位}] = [\text{kg}] \times [\text{m/s}^2] = [\text{kg} \cdot \text{m/s}^2] \quad (10.3)$$

力と加速度の向きが同じであること:

項目(1)で力の必要性を考えた際に、力によって加速度が発生するという実験事実を確認した。さらに、その力と加速度の向きが同じであることも、以下のような実験で確かめることができる。(右図に作図しながら理解せよ。)



- 実験設定:** ひもに物体を結び付けて、等速円運動させる。
右図には、ある時刻 $t = t_0$ での物体の円軌道上の配置と速度 $\vec{v}(t_0)$ 、さらに時刻 t_0 より微小時間 Δt だけ前後の時刻 $t = t_0 \pm \Delta t/2$ での物体の配置(白抜きで示す)を図示する。(以下、実際にひもを振り回して観察しながら進むと、実感が湧くだろう。)
- 力 $\vec{F}(t_0)$ の作図:** 物体には紐の張力だけが働いているとする。(物体は十分軽く、重力は無視できるとする。) 時刻 t_0 で物体に働く張力 $\vec{F}(t_0)$ を表す矢印を図に描き込め。
- 加速度 $\vec{a}(t_0)$ の作図:** 時刻 t_0 から微小時間だけ前後の速度 $\vec{v}(t_0 - \Delta t/2)$ と $\vec{v}(t_0 + \Delta t/2)$ を図に描き込め。さらに、時間 Δt の間の速度の変化量「 $\vec{v}(t_0 + \Delta t/2) - \vec{v}(t_0 - \Delta t/2)$ 」の矢印も作図せよ。
- **$\vec{F}(t_0)$ と $\vec{a}(t_0)$ の向きが同じであること:** 加速度は速度の微分(前回プリントの式(9.5)の成分参照)なので、 Δt の間の速度変化量「 $\vec{v}(t_0 + \Delta t/2) - \vec{v}(t_0 - \Delta t/2)$ 」が(近似的に) $\Delta t \cdot \vec{a}(t_0)$ に等しい。つまり、速度変化量の向きが(近似的に)加速度の向きである。このようにして作図した加速度 $\vec{a}(t_0)$ の向きと、張力 $\vec{F}(t_0)$ の向きが同じであることを確認せよ。[速度 $\vec{v}(t_0)$ と力 $\vec{F}(t_0)$ (あるいは加速度 $\vec{a}(t_0)$)の向きがまったく異なることも確認できる。]

以上のような実験から、力と加速度の向きが同じであることが分かる。[2つのベクトル \vec{F} と \vec{a} の向きが同じ場合、ベクトルの式としては運動方程式(10.2)のように比例関係(スカラー倍) $m\vec{a} = \vec{F}$ で表されることに注意せよ。]

力と加速度の比例係数が質量であること：

運動方程式 (10.2) より、ある強さ $|\vec{F}|$ の力を物体に加えると、質量 m が大きい (小さい) ほど加速度 $|\vec{a}| = |\vec{F}|/m$ は小さく (大きく) なる。これは、項目(1) で質量の必要性を考えた際の実験事実、「質量が大きい (小さい) ほど力による加速がしにくい (しやすい)」に合致する。ただし、加速しにくい (しやすい) とは、加速度の絶対値 $|\vec{a}|$ が小さい (大きい) こと。

注意 1： 上記のような実験を通して、確かに運動の法則が成立することは実験的に確認できる。しかし、他の法則から運動の法則を導くことは現在の物理学では不可能であり、正しい実験事実として (反証が見つかるまでは) 認めなければならない。なお、前回の授業で加速度の作図上の注意点として「力と加速度の向きが同じ」を天下りの的に述べたが、その理由は運動方程式 (10.2) ある。

注意 2： よくある誤解として「速度の向きは常に力の向きと同じ」という誤解がある。しかし、運動方程式 (10.2) や等速円運動の実験例から分かるように、力と常に向きが同じになっているのは加速度である。速度は直線運動など特殊な条件下でたまたま力と同じ向きになる場合もあるが、それは偶然の状況に過ぎない。

(4) **演習 1**： 問題演習 5 の問題 5-2, 5-3 (p.23) に取り組む。図も描きながら解け。

補足： これらの問題は、物体が x 軸上を運動する場合を想定していると考えてよい。従って、全てのベクトル ($\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$, $\vec{F}(t)$) は x 成分だけ考えればよいことになる。

(5) 作用・反作用の法則 (第 5 章 p.21)： 作用・反作用の法則の内容は、第 5 章 p.21 にまとまっている。確認せよ。この作用・反作用の法則が力学の目的 (物体の位置を求める) を達成する上で担う役割は、他の 2 つ (慣性の法則と運動の法則) が担う役割とは趣旨が異なる。

力学の 3 つの基本法則の役割の違い：

力学の目的「物体の位置を求める」を達成する上で、慣性の法則は「物体に働く力 (合力) がゼロの場合の運動を決める法則」、運動の法則は「物体にゼロでない力 (合力) が働く場合の運動を決める法則」である。

ところで、力学の基本パターン (第 6 章 p.25 の手順) では、最初に物体に働く力を求めなければいけないが、慣性の法則でも運動の法則でも力を求めることはできない。そこで、作用・反作用の法則が登場する。作用・反作用の法則は、特定の種類の力の法則ではなく、あらゆる種類の力に共通する普遍的な性質を決める法則である。この作用・反作用の法則と、力の種類ごとの法則 (第 2 章と 3 回目の授業) を組み合わせて、力学の基本パターンの最初のステップ「物体に働く力の特定」が実行できる。(作用・反作用の法則は、複数の粒子が力を及ぼし合いながら運動している問題で、さらに重要な役割を果たす。)

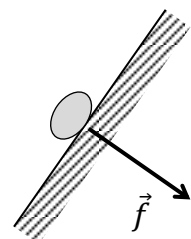
注意： 現在までに知られているあらゆる種類の力について、作用と反作用を測ることで、確かに作用・反作用の法則が成立することを実験的に確認できる。しかし、他の法則から作用・反作用の法則を導くことは現在の物理学では不可能であり、正しい実験事実として (反証が見つかるまでは) 認めなければならない。

(6) **演習 2**： 第 5 章の例題 5.2 (p.22), 問題演習 5 の問題 5-4 (p.23) に取り組む。[例題 5.2 は必ず図を描いて状況を理解すること。]

(7) **演習 3**： ある物体に働く力を測定したら、合力がゼロだったとする。また、ある瞬間に速度 \vec{v} を測ったら、右図の矢印で表されるベクトル (向きと速さ) だったとする。このとき、物体が行う運動の名称を答えよ。さらに、その軌道を右図に描き込め。



(8) **演習 4**： 右図は、物体が飛んできて斜面に衝突した瞬間であり、衝突の衝撃によって斜面が押される力 (衝撃力) \vec{f} を表す矢印も描いてある。この瞬間に、斜面が物体に及ぼす力 $\vec{f}' = \underline{\hspace{2cm}} \vec{f}$ である (空欄に比例係数を答えよ)。また、 \vec{f}' を表す矢印を右図に (向き, 大きさ, 作用点分かるように) 作図せよ。



なお、机を手でたたいてみよ。手に感じる衝撃力として、この力 (机に働く衝撃力の反作用として手に働く衝撃力) \vec{f}' を体験できる。