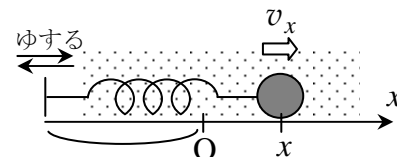


[第14回目] 強制振動と共振

《今日の授業の目標》 振動体を外部から強制的にゆする場合



◎ 強制振動と共振

運動方程式  $ma_x(t) = -kx(t) - cv_x(t) + f_0 \cos(\Omega t)$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \gamma = \frac{c}{2m} \implies \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = \frac{f_0}{m} \cos(\Omega t)$$

一般解 ( $\gamma < \omega$  のとき) :  $x(t) = A^{\text{強}} \cos(\Omega t - \beta) + x_0(t)$   $\left[ x_0(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \alpha) \right]$

減衰振動部分  $x_0(t)$  は時間がたつとゼロになる (過渡現象)

振幅 :  $A^{\text{強}}(\Omega) = \frac{f_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}$   $\left[ \Omega \doteq \omega \text{ でゆするとき振幅が最大} \right]$   
 $:\text{共振}$

位相の遅れ :  $\beta = \tan^{-1} \frac{2\gamma\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}$   $\left[ \Omega \approx 0 \text{ のとき } \beta \approx 0, \Omega \rightarrow \infty \text{ のとき } \beta \approx \pi \right]$

学習到達目標 (6) 減衰振動および強制振動と共振の意味が理解できる。

次回予定 [第15回目] まとめ

\*\*\*\*\*

レポート問題 第14回目 (右側の半分の解答用紙を切り取って提出しなさい)

**数値で計算する問題は、答えにも必ず単位をつける！指示がない限り MKS 単位系で答えること！**

- ☆... 問1 本日の授業で学んだことで、重要と思うことを文章でまとめよ。(部分的になら式もよい.)  
 問1  $x$  軸上を運動する減衰振動を考える。粒子の質量は  $m = 4.0$  [kg], ばね定数は  $k = 100$  [N/m], 減衰率は  $\gamma = 0.050$  [1/s] であった。 $t = 0$  に自然長から  $x_0 = 0.10$  [m] 伸ばして静かに放した。

- A... ①  $t = 0$  での粒子が持つ力学的エネルギー  $E_0$  を数値で求めよ。  
 A... ② 固有角振動数  $\omega$  を数値で求めよ。この粒子はどのような運動をするか。  
 B... ③ 運動するに従い、粒子が持つ力学的エネルギー  $E$  はどのように変化するか。何に変化するか。  
 B... ④ 減衰率が  $\gamma = 5.0$  [1/s] となったとき、粒子の運動はどうか。  
 ☆... 問2 ① 水平面に置かれた質量  $m$  の粒子に、弾性力  $-kx$ , 抵抗力  $-cv_x$  に加えて、強制振動力  $A^{\text{強}} \cos \Omega t$  が働くとき、この粒子の運動方程式を立てよ。  
 A... ② 十分時間が経過した後の、強制振動の解  $X(t)$  を書け。[教科書の式 (27.3) を見て考える。]  
 B... ③ 共振が起きる条件を、強制振動力の角振動数  $\Omega$  と、振動体の固有角振動数  $\omega$  との関係で表せ。抵抗力 (または減衰率  $\gamma$ ) はあまり大きくないとする。また共振とはどのような現象か。  
 B... ④ 共振現象の例を1つ以上あげよ。

問3 強制振動での振動体の振幅は  $A^{\text{強}}(\Omega) = f_0 / \left\{ m\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2} \right\}$  で表される。

固有角振動数を  $\omega = 1$  [rad/s], 減衰率を  $\gamma = 0.02$  [s<sup>-1</sup>],  $f_0/m = 0.01$  [N/kg] とする。抵抗力は小さいので、共振が起こる角振動数  $\omega_R$  を  $\omega_R \doteq \omega = \sqrt{k/m} = 1$  [rad/s] と近似してよい。

- B☆ ①  $\Omega = 0.9 \sim 1.1$  [rad/s] の範囲で、 $0.02$  [rad/s] 間隔で  $\Omega$  を変えて  $A^{\text{強}}(\Omega)$  の値を求め、共振曲線を書け。  
 B... ② 共振したとき ( $\Omega = \omega$ ) の強制振動の振幅  $A^{\text{強}}(\omega)$  を、 $f_0, m, \omega, \gamma$  を用いて式で表せ。  
 A... ③ 粒子を振動させず、大きさ  $f_0$  の力で静かに引いた ( $\Omega = 0$ ) ときの伸び  $x_0 = A^{\text{強}}(0)$  を  $f_0, m, \omega$  を用いて式で表せ。また、この伸び  $x_0$  を、 $f_0$  とばね定数  $k$  を用いて式で表せ。  
 C... ④ 大きさ  $f_0$  の強制振動力を加えて共振したときの振幅  $A^{\text{強}}(\omega)$  と、同じ大きさ  $f_0$  の力で静かに引いたときの伸び  $x_0$  との比  $Q = A^{\text{強}}(\omega)/x_0$  を、 $\omega$  と  $\gamma$  で表せ。上の値を使い  $A^{\text{強}}(\omega)$  が  $x_0$  の何倍になるか数値で求めよ。(  $f_0$  が小さな力でも、共振すると振幅は非常に大きくなるのが分かる。)

数値で計算する問題は, 答えにも必ず単位をつける! 指示がない限り MKS 単位系で答えること!

☆... 問 1

問 1 ①  $E =$  [ ]

②  $\omega =$  [ ]

③

④

☆... 問 2 ①

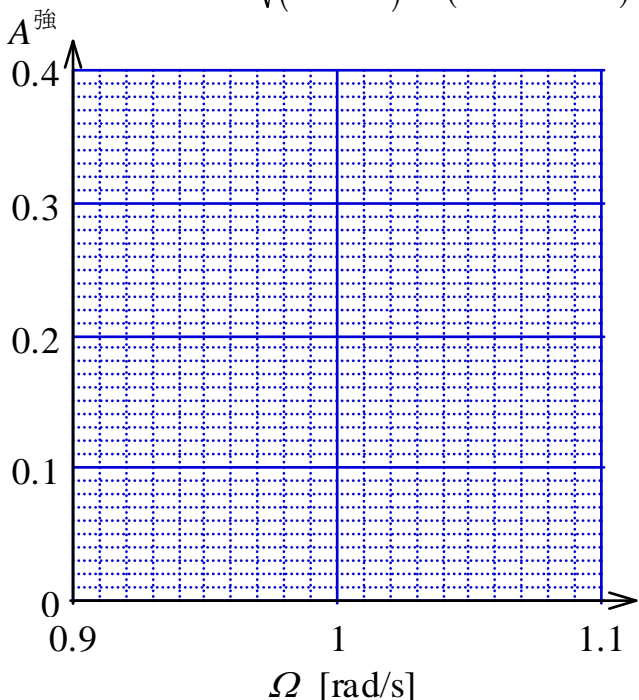
②  $X(t) =$

③ 共振条件  $\Omega \doteq$  [ ] のとき, [ ] が非常に大きくなる現象。

④

問 3 ① ☆...  $A^{\text{強}}(\Omega) = \frac{0.01}{\sqrt{(1^2 - \Omega^2)^2 + (2 \times 0.02 \times \Omega)^2}}$

②  $A^{\text{強}}(\omega) =$



③

④

$Q = \frac{A^{\text{強}}(\omega)}{x_0} =$

\_\_\_\_\_ 倍

(この値を共振の  $Q$  値という)

合格者の学籍番号揭示  
可 ・ 不可

☆このレポートをやるのに \_\_\_\_\_ 時間 \_\_\_\_\_ 分,  
それ以外に力学2の予習復習を \_\_\_\_\_ 時間 \_\_\_\_\_ 分した。