

[第13回目] 減衰振動

《今日の授業の目標》 弾性力とともに**抵抗力**や**摩擦力**が働く場合の運動

◎ 減衰振動

運動方程式  $ma_x = -kx - c\dot{x}$   $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$   $\gamma = \frac{c}{2m}$   $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$

$\omega$  [rad/s]: 固有角振動数,  $\gamma$  [s<sup>-1</sup>]: 減衰率

一般解 (i) 減衰振動 ( $\gamma < \omega$ ):  $x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega't + \alpha)$   $\left[ \omega' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \right]$   
 (ii) 過減衰 ( $\gamma > \omega$ ):  $x(t) = Ae^{-\gamma_1 t} + Be^{-\gamma_2 t}$   $\left[ \gamma_1, \gamma_2 = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \right]$   
 (iii) 臨界減衰 ( $\gamma = \omega$ ):  $x(t) = e^{-\gamma t}(At + B)$

学習到達目標 (6) 減衰振動および強制振動と共振の意味が理解できる。

次回予定 [第14回目] 強制振動と共振 (教科書 162~164 ページまで, 参考 198~201 ページ)  
 レポート問題 第13回目 (右側の半分の解答用紙を切り取って提出しなさい)

数値で計算する問題は, 答えにも必ず単位をつける! 指示がない限り MKS 単位系で答えること!

☆... 問1 本日の授業で学んだことで, 重要と思うことを文章でまとめよ。(部分的になら式もよい。)

B... 問2 教科書 158 ページの図 34.1 の問題設定について, 運動方程式を立て,  $\omega = \sqrt{k/m}$ ,  $\gamma = c/(2m)$  を用いた式に変形せよ。

問3 振幅  $A = 1$  [cm], 振動数  $f = 1$  [Hz], 減衰率  $\gamma = 0.4$  [s<sup>-1</sup>] とする。 ( $\omega = 2\pi f$ )

A... ① 単振動の式  $x(t) = A \cos(2\pi f t)$  を, 横軸を  $t$  [s], 縦軸を  $x$  [cm] にとってグラフで表せ。

☆・B ② 減衰振動の式  $x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(2\pi f' t)$  を, 横軸を  $t$  [s], 縦軸を  $x$  [cm] にとってグラフで表せ。ただし  $f' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} / (2\pi) \doteq 1$  [Hz] として書け。

問4 自然長  $L$ , ばね定数  $k$  の軽いばねの片方の端を固定し, 他方の端に質量  $m = 0.600$  [kg] のおもりを結んで, 滑らかな水平面上に置く。その全体を油の入った水槽の中に浸して運動させた。ばねが自然長となる位置を原点  $O$  とし, ばねが伸びる方向を  $x$  軸の正とする。

A... ① おもりを  $f_0 = 6.72$  [N] の力で水平に引くと,  $x_0 = 0.0800$  [m] の位置で静止した。ばね定数  $k$  を数値で求めよ。また, 角振動数  $\omega$  を数値で求めよ。

B... ② 抵抗力の係数を  $c = 3.60$  [N·s/m] のとき, 減衰率  $\gamma$  を数値で求めよ。

☆B... ③  $x$  方向について, おもりの運動方程式立てよ。(文字式で)

B... ④ ③の一般解  $x(t)$  を初期位相  $\alpha$  と振幅  $A$  を用いて書け。 ( $\omega' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$  とする。)

B... ⑤ ④を時間  $t$  で微分して, おもりの速度  $v_x(t)$  を求めよ。 ( $t$  以外の文字は定数)

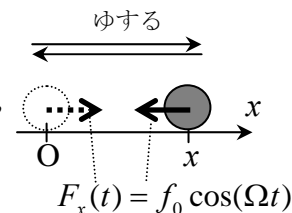
B... ⑥ ①②の結果を用いて, 補正された角振動数  $\omega' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$  と周期  $T' = 2\pi/\omega'$  を求めよ。

C... ⑦  $t = 0$  で①の  $x_0$  から静かに ( $v_x(0) = 0$ ) 放した。この初期条件から, 位相  $\alpha$  と振幅  $A$  を求めよ。

C... ⑧  $x < 0$  の側に, おもりはどこまで振れるかを知りたい。位置  $x(t = T'/2)$  を求めよ。

B... ⑨ だるだるとした (粘性が大きい) 油に代えると減衰率  $\gamma$  が大きくなり,  $\gamma > \omega$  になった。おもりの運動はどのような運動に変わるか, 簡単に説明せよ。

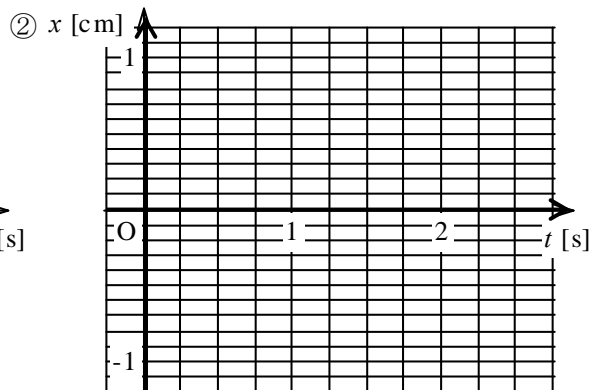
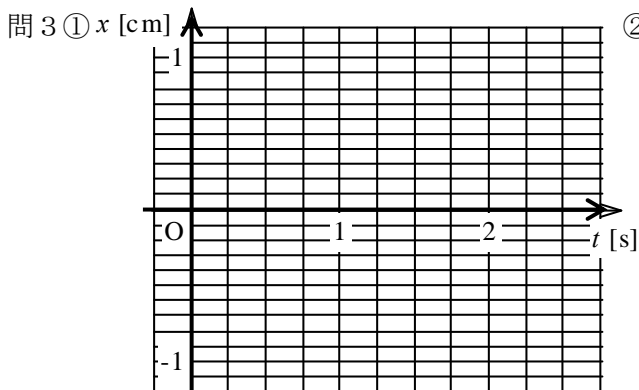
C... 問5 強制振動を考える参考として, ばねにつながれていない質量  $m$  の物体に, 強制振動力  $F_x(t) = f_0 \cos(\Omega t)$  のみを加えた場合を考える。  $x$  方向の運動方程式を立て, 運動  $x(t)$  を求めよ。初期条件は  $x(0) = 0$  [m],  $v_x(0) = 0$  [m/s] とする。強制振動力の角振動数  $\Omega$  を変化させても, 特定の角振動数で共振 (振幅の極大) が起こらないことを確認せよ。



数値で計算する問題は, 答えにも必ず単位をつける! 指示がない限り MKS 単位系で答えること!

☆... 問 1

問 2



問 4 ①

$\omega =$  [            ] ②  $\gamma =$  [            ]

③

④

⑤  $x(t)$  を微分すると,  $v_x(t) =$

⑥  $\omega' =$  [            ],  $T' =$  [            ]

⑦  $t=0$  で  $x(0) = 0.0800$ ,  $v(0) = 0$  より

(ヒント:  $A \cos \alpha = 0.0800$  と  $\tan \alpha = -\gamma/\omega'$ )

⑧  $x(T'/2) =$

⑨

問 5

☆このレポートをやるのに \_\_\_\_\_ 時間 \_\_\_\_\_ 分,

それ以外に力学2の予習復習を \_\_\_\_\_ 時間 \_\_\_\_\_ 分した。