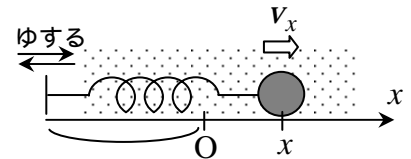


[第13回目] 強制振動と共振

今日の授業の目標 振動体を外部から強制的にゆする場合



強制振動と共振

運動方程式  $ma_x(t) = -kx(t) - c v_x(t) + f_0 \cos(\Omega t)$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \gamma = \frac{c}{2m} \implies \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = \frac{f_0}{m} \cos(\Omega t)$$

一般解 ( $\gamma < \omega$  のとき):  $x(t) = A^{\text{強}} \cos(\Omega t - \beta) + x_0(t)$   $\left[ x_0(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \alpha) \right]$

減衰振動部分  $x_0(t)$  は時間がたつとゼロになる (過渡現象)

振幅:  $A^{\text{強}}(\Omega) = \frac{f_0}{m \sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}$   $\left[ \Omega = \omega \text{ でゆするとき振幅が最大} \right]$   
: 共振

位相の遅れ:  $\beta = \tan^{-1} \frac{2\gamma\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}$   $\left[ \Omega \approx 0 \text{ のとき } \beta \approx 0, \Omega \rightarrow \infty \text{ のとき } \beta \approx \pi \right]$

学習到達目標 (3) 減衰振動および強制振動と共振の意味が理解できる。

次回予定 [第14回目] まとめ

\*\*\*\*\*

レポート問題 第13回目 (右側の半分の解答用紙を切り取って提出しなさい)

数値で計算する問題は、答えにも必ず単位をつける! 指示がない限り MKS 単位系で答えること!  
 問1  $x$  軸上を運動する減衰振動を考える。粒子の質量は  $m = 4.0$  [kg], ばね定数は  $k = 100$  [N/m], 減衰率は  $\gamma = 0.050$  [1/s] であった。  $t = 0$  に自然長から  $x_0 = 0.10$  [m] 伸ばして静かに放した。

- A...  $t = 0$  での粒子が持つ力学的エネルギー  $E_0$  を数値で求めよ。
- A... 固有角振動数  $\omega$  を数値で求めよ。この粒子はどのような運動をするか。
- B... 運動するに従い、粒子が持つ力学的エネルギー  $E$  はどのように変化するか。何に変化するか。
- B... 減衰率が  $\gamma = 5.0$  [1/s] となったとき、粒子の運動はどうなるか。
- A... 問2 水平面に置かれた質量  $m$  の粒子に、弾性力  $-kx$ , 抵抗力  $-c v_x$  に加えて、強制振動力  $f_0 \cos \Omega t$  が働くとき、この粒子の運動方程式を立てよ。
- A... 十分時間が経過した後の、強制振動の解  $X(t)$  を書け。[教科書の式 (27.3) を見て考える。]
- B... 共振が起きる条件を、強制振動力の角振動数  $\Omega$  と、振動体の固有角振動数  $\omega$  との関係で表せ。抵抗力 (または減衰率  $\gamma$ ) はあまり大きくないとする。また共振とはどのような現象か。
- B... 共振現象の例を1つ以上あげよ。

問3 強制振動での振動体の振幅は  $A^{\text{強}}(\Omega) = f_0 / \left\{ m \sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2} \right\}$  で表される。

固有角振動数を  $\omega = 1$  [rad/s], 減衰率を  $\gamma = 0.02$  [s<sup>-1</sup>],  $f_0/m = 0.01$  [N/kg] とする。抵抗力は小さいので、共振が起こる角振動数  $\omega_R$  を  $\omega_R = \omega = \sqrt{k/m} = 1$  [rad/s] と近似してよい。

- B...  $\Omega = 0.9 \sim 1.1$  [rad/s] の範囲で、 $\Omega$  を  $0.02$  [rad/s] 間隔で変えて  $A^{\text{強}}(\Omega)$  の値を求め、共振曲線を書け。
- B... 共振したとき ( $\Omega = \omega$ ) の強制振動の振幅  $A^{\text{強}}(\omega)$  を、 $f_0, m, \omega, \gamma$  を用いて式で表せ。
- A... 粒子を振動させず、大きさ  $f_0$  の力で静かに引いた ( $\Omega = 0$ ) ときの伸び  $x_0 = A^{\text{強}}(0)$  を  $f_0, m, \omega$  を用いて式で表せ。また、この伸び  $x_0$  を、 $f_0$  とばね定数  $k$  を用いて式で表せ。
- C... 大きさ  $f_0$  の強制振動力を加えて共振したときの振幅  $A^{\text{強}}(\omega)$  と、同じ大きさ  $f_0$  の力で静かに引いたときの伸び  $x_0$  との比  $Q = A^{\text{強}}(\omega)/x_0$  を、 $\omega$  と  $\gamma$  で表せ。上の値を使い  $A^{\text{強}}(\omega)$  が  $x_0$  の何倍になるか数値で求めよ。(  $f_0$  が小さな力でも、共振したときの振幅は非常に大きくなる事が分かる。)

✓切を必ず守ること

解答用紙(授業 曜 限) 学籍番号 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

数値で計算する問題は, 答えにも必ず単位をつける! 指示がない限り MKS 単位系で答えること!

問1  $E =$  [ ]

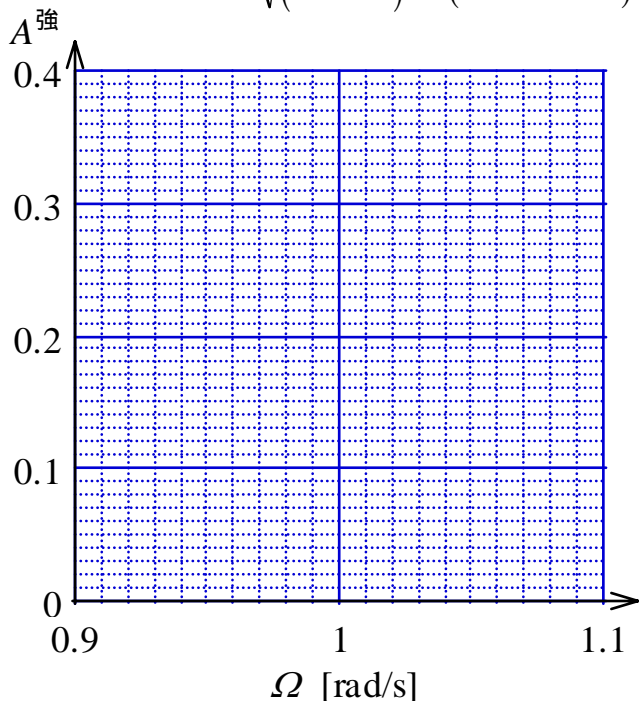
$\omega =$  [ ]

問2

$X(t) =$

共振条件  $\Omega$  [ ] のとき, [ ] が非常に大きくなる現象。

問3 
$$A^{\text{強}}(\Omega) = \frac{0.01}{\sqrt{(1^2 - \Omega^2)^2 + (2 \times 0.02 \times \Omega)^2}} \quad A^{\text{強}}(\omega) =$$



$$Q = \frac{A^{\text{強}}(\omega)}{x_0} =$$

\_\_\_\_\_ 倍  
(この値を共振の Q 値という)

このレポートをやるのに \_\_\_\_\_ 時間 \_\_\_\_\_ 分,

それ以外に力学 の予習復習を \_\_\_\_\_ 時間 \_\_\_\_\_ 分した。