［第１２回目］減衰振動

≪今日の授業の目標≫　弾性力とともに**抵抗力や摩擦力**が働く場合の運動

◎ 減衰振動

運動方程式　$\boxed{ma_x = -kx - cv_x}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \quad \gamma = \dfrac{c}{2m}}$ $\Longrightarrow$ $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega^2 x = 0$

ω ［rad/s］：固有角振動数,　　γ ［s^{-1}］：**減衰率**

一般解 （ｉ）減衰振動（$\gamma < \omega$）：$\boxed{x(t) = A\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \alpha)}$　$\left(\omega' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \right)$

（ii）過減衰　（$\gamma > \omega$）：$x(t) = A\mathrm{e}^{-\gamma_1 t} + B\mathrm{e}^{-\gamma_2 t}$　$\left(\gamma_1, \gamma_2 = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \right)$

（iii）臨界減衰（$\gamma = \omega$）：$x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}(At + B)$

学習到達目標（6）**減衰振動および強制振動と共振の意味が理解できる。**

次回予定［第１３回目］強制振動と共振（教科書 162～164 ページまで，参考 198～201 ページ）

＊＊

レポート問題　第１２回目（右側の半分の解答用紙を切り取って提出しなさい）

数値で計算する問題は, 答えにも必ず単位をつける！指示がない限り MKS 単位系で答えること！

B… 問１　教科書 158 ページの図 34.1 の問題設定について，運動方程式を立て，$\omega = \sqrt{k/m}$，$\gamma = c/(2m)$ を用いた式に変形せよ。

問２　振幅 $A = 1$［cm］，振動数 $f = 1$［Hz］，減衰率 $\gamma = 0.4$［s^{-1}］とする。（$\omega = 2\pi f$）

A… ①　単振動の式 $x(t) = A\cos(2\pi f t)$ を，横軸を t [s]，縦軸を x [cm]にとってグラフで表せ。

B… ②　減衰振動の式 $x(t) = A\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(2\pi f' t)$ を，横軸を t [s]，縦軸を x [cm]にとってグラフで表せ。ただし $f' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}/(2\pi)$　1［Hz］として書け。

問３　自然長 l，ばね定数 k の軽いばねの片方の端を固定し，他方の端に質量 $m = 0.600$［kg］のおもりを結んで，滑らかな水平面上に置く。その全体を油の入った水槽の中に浸して運動させた。ばねが自然長となる位置を原点 O とし，ばねが伸びる方向を x 軸の正とする。

A… ①　おもりを $f_0 = 6.72$［N］の力で水平に引くと，$x_0 = 0.0800$［m］の位置で静止した。ばね定数 k を数値で求めよ。また，角振動数 ω を数値で求めよ。

B… ②　抵抗力の係数を $c = 3.60$［N･s/m］のとき，減衰率 γ を数値で求めよ。

B… ③　x 方向について，おもりの運動方程式立てよ。（文字式で）

B… ④　③の一般解 $x(t)$ を初期位相 α と振幅 A を用いて書け。（$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ とする。）

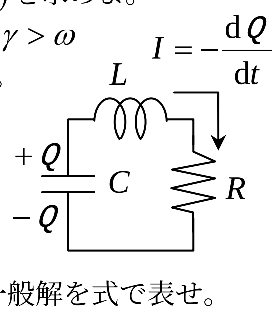
B… ⑤　④を時間 t で微分して，おもりの速度 $v_x(t)$ を求めよ。（t 以外の文字は定数）

B… ⑥　①②の結果を用いて，補正された角振動数 $\omega' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ と周期 $T' = 2\pi/\omega'$ を求めよ。

C… ⑦　$t = 0$ で①の x_0 から静かに（$v_x(0) = 0$）放した。この初期条件から，位相 α と振幅 A を求めよ。

C… ⑧　$x < 0$ の側に，おもりはどこまで振れるかを知りたい。位置 $x(t = T'/2)$ を求めよ。

B… ⑨　どろどろした（粘性が大きい）油に代えると減衰率 γ が大きくなり，$\gamma > \omega$ になった。おもりの運動はどのような運動に変わるか，簡単に説明せよ。



C… 問４　減衰振動は, 力学だけでなく様々な分野の物理現象と関係して現れる。右の電気回路では，コンデンサー C に蓄えられている電荷 $Q(t)$ の時間変化が，$L\dfrac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + R\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{C}Q = 0$ の式から求められる。

抵抗 R が十分小さいとき，減衰振動の運動方程式と比較して，$Q(t)$ の一般解を式で表せ。

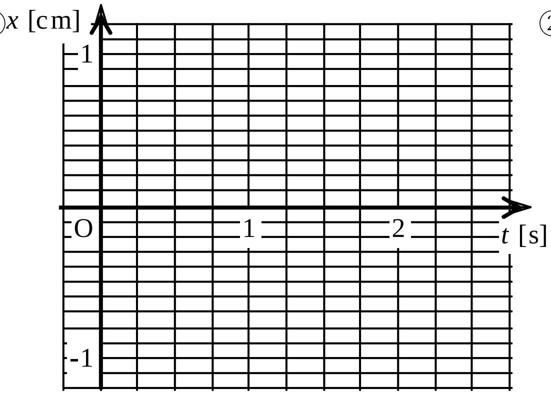
〆切を必ず守ること 力学Ⅱ（１２回目）原科

解答用紙（授業　　曜　　限）学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

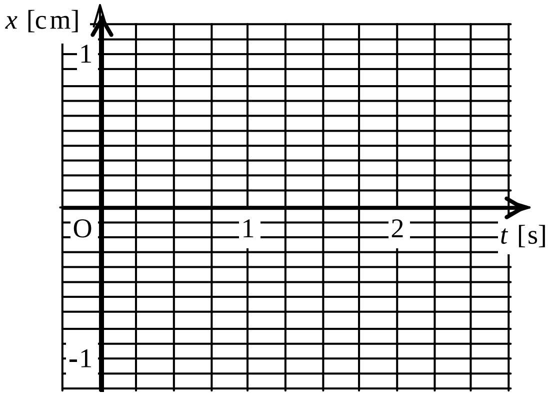
数値で計算する問題は, 答えにも必ず単位をつける！指示がない限り MKS 単位系で答えること！

問１

問２①



②



問３　①

$\omega =$ 　　　　　　　　　　［　　　　］②$\gamma =$ 　　　　　　　　　　［　　　　］

③　　　　　　　　　　　　④

⑤　$x(t)$ を微分すると，$v_x(t) =$

⑥　$\omega' =$ 　　　　　　　　　　［　　　］，$T' =$ 　　　　　　　　［　　］

⑦　$t = 0$ で $x(0) = 0.0800$，$v(0) = 0$ より

（ヒント：$A\cos\alpha = 0.0800$ と $\tan\alpha = -\gamma/\omega'$）

⑧　$x(T'/2) =$

⑨

問４　比較すると $m \to L$, $c \to R$, $k \to 1/C$ なので, $\omega =$ 　　　　　　, $\gamma =$ 　　　　　　。

したがって ω，γ を用いて表せば，$Q(t) =$

となる。

☆このレポートをやるのに　＿＿＿時間＿＿＿分,

それ以外に力学Ⅱの予習復習を　＿＿＿時間＿＿＿分した。