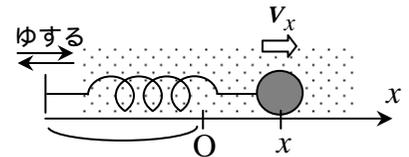


[第13回目] 強制振動と共振

今日の授業の目標 振動体を外部から強制的にゆする場合



強制振動と共振

運動方程式 $ma_x(t) = -kx(t) - c v_x(t) + f_0 \cos(\Omega t)$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \gamma = \frac{c}{2m} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = \frac{f_0}{m} \cos(\Omega t)$$

一般解 ($\gamma < \omega$ のとき): $x(t) = A^{\text{強}} \cos(\Omega t - \beta) + x_0(t)$ $\left[x_0(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \alpha) \right]$

減衰振動部分 $x_0(t)$ は時間がたつとゼロになる (過渡現象)

振幅: $A^{\text{強}}(\Omega) = \frac{f_0}{m \sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}$ $\left[\Omega = \omega \text{ でゆするとき振幅が最大} \right]$
: 共振

位相の遅れ: $\beta = \tan^{-1} \frac{2\gamma\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}$ $\left[\Omega \approx 0 \text{ のとき } \beta \approx 0, \Omega \rightarrow \infty \text{ のとき } \beta \approx \pi \right]$

学習到達目標 (3) 減衰振動および強制振動と共振の意味が理解できる。

次回予定 [第14回目] まとめ

レポート問題 第13回目 (右側の半分の解答用紙を切り取って提出しなさい)

数値で計算する問題は、答えにも必ず単位をつける! 指示がない限り MKS 単位系で答えること!
 問1 x 軸上を運動する減衰振動を考える。粒子の質量は $m = 4.0$ [kg], ばね定数は $k = 100$ [N/m], 減衰率は $\gamma = 0.050$ [1/s] であった。 $t = 0$ に自然長から $x_0 = 0.10$ [m] 伸ばして静かに放した。

- A... $t = 0$ での粒子が持つ力学的エネルギー E_0 を数値で求めよ。
- A... 固有角振動数 ω を数値で求めよ。この粒子はどのような運動をするか。
- B... 運動するに従い、粒子が持つ力学的エネルギー E はどのように変化するか。何に変化するか。
- B... 減衰率が $\gamma = 5.0$ [1/s] となったとき、粒子の運動はどうなるか。
- A... 問2 水平面に置かれた質量 m の粒子に、弾性力 $-kx$, 抵抗力 $-c v_x$ に加えて、強制振動力 $f_0 \cos \Omega t$ が働くとき、この粒子の運動方程式を立てよ。
- A... 十分時間が経過した後の、強制振動の解 $X(t)$ を書け。[教科書の式 (27.3) を見て考える。]
- B... 共振が起きる条件を、強制振動力の角振動数 Ω と、振動体の固有角振動数 ω との関係で表せ。抵抗力 (または減衰率 γ) はあまり大きくないとする。また共振とはどのような現象か。
- B... 共振現象の例を1つ以上あげよ。

問3 強制振動での振動体の振幅は $A^{\text{強}}(\Omega) = f_0 / \left\{ m \sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2} \right\}$ で表される。

固有角振動数を $\omega = 1$ [rad/s], 減衰率を $\gamma = 0.02$ [s⁻¹], $f_0/m = 0.01$ [N/kg] とする。抵抗力は小さいので、共振が起こる角振動数 ω_R を $\omega_R = \omega = \sqrt{k/m} = 1$ [rad/s] と近似してよい。

- B... $\Omega = 0.9 \sim 1.1$ [rad/s] の範囲で、 Ω を 0.02 [rad/s] 間隔で変えて $A^{\text{強}}(\Omega)$ の値を求め、共振曲線を書け。
- B... 共振したとき ($\Omega = \omega$) の強制振動の振幅 $A^{\text{強}}(\omega)$ を、 f_0, m, ω, γ を用いて式で表せ。
- A... 粒子を振動させず、大きさ f_0 の力で静かに引いた ($\Omega = 0$) ときの伸び $x_0 = A^{\text{強}}(0)$ を f_0, m, ω を用いて式で表せ。また、この伸び x_0 を、 f_0 とばね定数 k を用いて式で表せ。
- C... 大きさ f_0 の強制振動力を加えて共振したときの振幅 $A^{\text{強}}(\omega)$ と、同じ大きさ f_0 の力で静かに引いたときの伸び x_0 との比 $Q = A^{\text{強}}(\omega)/x_0$ を、 ω と γ で表せ。上の値を使い $A^{\text{強}}(\omega)$ が x_0 の何倍になるか数値で求めよ。(f_0 が小さな力でも、共振したときの振幅は非常に大きくなる事が分かる。)

解答用紙 (曜 限) 学籍番号 _____ 氏名 _____

数値で計算する問題は, 答えにも必ず単位をつける! 指示がない限り MKS 単位系で答えること!

問1 $E =$ []

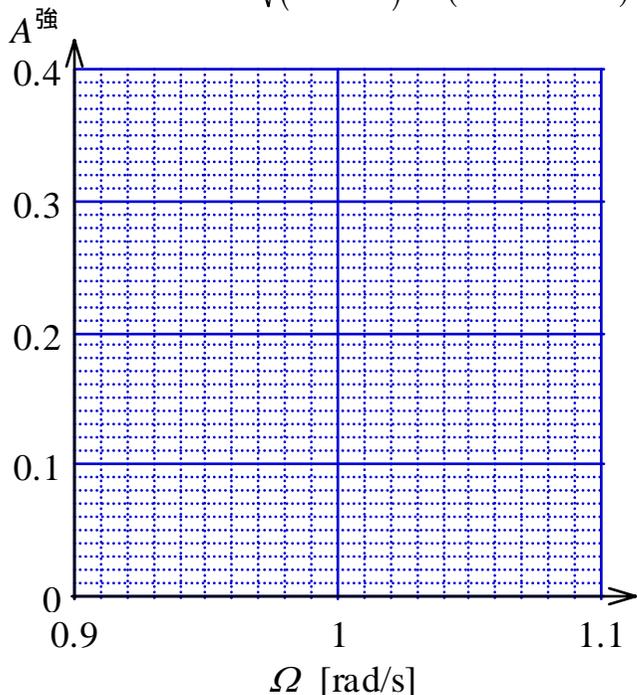
$\omega =$ []

問2

$X(t) =$

共振条件 Ω [] のとき, [] が非常に大きくなる現象。

問3
$$A^{\text{強}}(\Omega) = \frac{0.01}{\sqrt{(1^2 - \Omega^2)^2 + (2 \times 0.02 \times \Omega)^2}} \quad A^{\text{強}}(\omega) =$$



$$Q = \frac{A^{\text{強}}(\omega)}{x_0} =$$

_____ 倍
(この値を共振の Q 値という)

このレポートをやるのに _____ 時間 _____ 分,

それ以外に力学 の予習復習を _____ 時間 _____ 分した。