［第１２回目］減衰振動

≪今日の授業の目標≫　弾性力とともに**抵抗力や摩擦力**が働く場合の運動

◎ 減衰振動

運動方程式　$\boxed{m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=-kx-cv_x}$ $\xrightarrow{\;\omega=\sqrt{\frac{k}{m}},\ \gamma=\frac{c}{2m}\;}$ $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega^2x=0$

ω ［rad/s］：固有角振動数,　　γ ［s^{-1}］：**減衰率**

一般解　（ｉ）減衰振動（$\gamma<\omega$）：$\boxed{x(t)=A\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega' t+\alpha)}$　$\left(\omega'=\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\right)$

（ii）過減衰　（$\gamma>\omega$）：$x(t)=A\mathrm{e}^{-\gamma_1 t}+B\mathrm{e}^{-\gamma_2 t}$　$\left(\gamma_1,\gamma_2=\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)$

（iii）臨界減衰（$\gamma=\omega$）：$x(t)=\mathrm{e}^{-\gamma t}(At+B)$

学習到達目標（6）**減衰振動および強制振動と共振の意味が理解できる。**

次回予定［第１３回目］強制振動と共振（教科書 158～160 ページまで，参考 195～196 ページ）

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

レポート問題　第１２回目（右側の半分の解答用紙を切り取って提出しなさい）

数値で計算する問題は, 答えにも必ず単位をつける！指示がない限り MKS 単位系で答えること！

B… 問１　教科書 154 ページの図 34.1 の問題設定について，運動方程式を立て，$\omega=\sqrt{k/m}$，$\gamma=c/(2m)$ を用いた式に変形せよ。

問２　振幅 $A=1$［cm］，振動数 $f=1$［Hz］，減衰率 $\gamma=0.4$［s^{-1}］とする。（$\omega=2\pi f$）

A… ①　単振動の式 $x(t)=A\cos(2\pi f t)$ を，横軸を t [s]，縦軸を x [cm]にとってグラフで表せ。

B… ②　減衰振動の式 $x(t)=A\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(2\pi f' t)$ を，横軸を t [s]，縦軸を x [cm]にとってグラフで表せ。ただし $f'=\sqrt{\omega^2-\gamma^2}/(2\pi)$　1［Hz］として書け。

問３　自然長 l，ばね定数 k の軽いばねの片方の端を固定し，他方の端に質量 $m=0.600$［kg］のおもりを結んで, 滑らかな水平面上に置く。その全体を油の入った水槽の中に浸して運動させた。ばねが自然長となる位置を原点 O とし，ばねが伸びる方向を x 軸の正とする。

A… ①　おもりを $f_0=6.72$［N］の力で水平に引くと，$x_0=0.0800$［m］の位置で静止した。ばね定数 k を数値で求めよ。また，角振動数 ω を数値で求めよ。

B… ②　抵抗力の係数を $c=3.60$［N･s/m］のとき，減衰率 γ を数値で求めよ。

B… ③　x 方向について，おもりの運動方程式立てよ。(文字式で)

B… ④　③の一般解 $x(t)$ を初期位相 α と振幅 A を用いて書け。（$\omega'=\sqrt{\omega^2-\gamma^2}$ とする。）

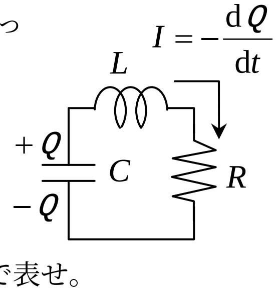
B… ⑤　④を時間 t で微分して，おもりの速度 $v_x(t)$ を求めよ。（t 以外の文字は定数）

B… ⑥　①②の結果を用いて，補正された角振動数 $\omega'=\sqrt{\omega^2-\gamma^2}$ と周期 $T'=2\pi/\omega'$ を求めよ。

C… ⑦　$t=0$ で①の x_0 から静かに（$v_x(0)=0$）放した。この初期条件から, 位相 α と振幅 A を求めよ。

C… ⑧　$x<0$ の側に，おもりはどこまで振れるかを知りたい。位置 $x(t=T'/2)$ を求めよ。

B… ⑨　もっとどろどろの油に代えると減衰率 γ が大きくなり，$\gamma>\omega$ になった。おもりの運動はどのような運動に変わるか，簡単に説明せよ。



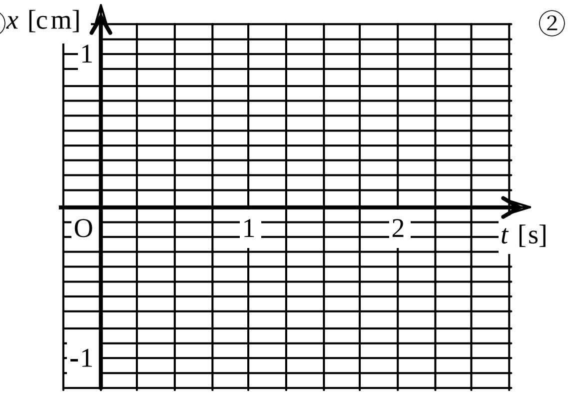
C… 問４　減衰振動は, 力学だけでなく様々な分野の物理現象と関係して現れる。右の電気回路では, コンデンサー C に蓄えられている電荷 $Q(t)$ の時間変化が, $L\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+R\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\dfrac{1}{C}Q=0$ の式から求められる。抵抗 R が十分小さいとき，減衰振動の運動方程式と比較して，$Q(t)$ の一般解を式で表せ。

解答用紙　（　　曜　　限）学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

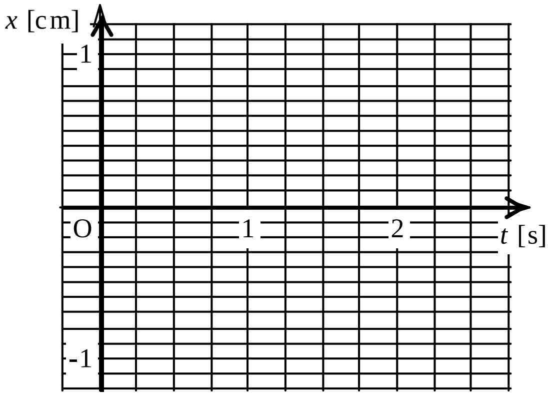
数値で計算する問題は, 答えにも必ず単位をつける！指示がない限り MKS 単位系で答えること！

問１

問２①



②



問３　①

$\omega =$　　　　　　　　　　　　　　［　　　　］②$\gamma =$　　　　　　　　　　　　［　　　　］

③　　　　　　　　　　　　　　④

⑤　$x(t)$ を微分すると，$v_x(t) =$

⑥　$\omega' =$　　　　　　　　　　　　［　　　］，$T' =$　　　　　　　　　［　　］

⑦　$t = 0$ で $x(0) = 0.0800$，　$v(0) = 0$ より

（ヒント：$A\cos\alpha = 0.0800$ と $\tan\alpha = -\gamma/\omega'$）

⑧　$x(T'/2) =$

⑨

問４　比較すると $m \to L$, $c \to R$, $k \to 1/C$ なので, $\omega =$　　　　　　, $\gamma =$　　　　　　。

したがって ω，γ を用いて表せば，$Q(t) =$

となる。

☆このレポートをやるのに　＿＿＿時間＿＿＿分,

それ以外に力学Ⅱの予習復習を　＿＿＿時間＿＿＿分した。