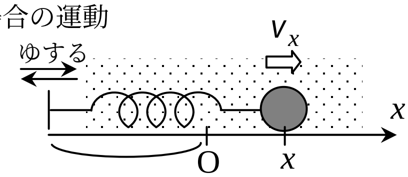
［第１３回目］強制振動と共振

≪今日の授業の目標≫　振動体を外部から強制的にゆする場合の運動

◎ 強制振動と共振



運動方程式 $\boxed{m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -kx - cv_x + f_0\cos(\Omega t)}$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},\quad \gamma = \frac{c}{2m}} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega^2 x = \frac{f_0}{m}\cos(\Omega t)$$

一般解（$\gamma < \omega$のとき）：$x(t) = A^{強}\cos(\Omega t - \beta) + x_0(t)$　　$\left(x_0(t) = A\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \alpha) \right)$

減衰振動部分$x_0(t)$は時間がたつとゼロになる（過渡現象）

振幅：$\boxed{A^{強}(\Omega) = \dfrac{f_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}}$　　（Ω　ωのとき振幅が最大：**共振**）

位相の遅れ：$\beta = \tan^{-1}\dfrac{2\gamma\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}$　　（$\Omega \approx 0$のとき$\beta \approx 0$，$\Omega \to \infty$のとき$\beta \approx \pi$）

学習到達目標（3）**減衰振動および強制振動と共振の意味が理解できる。**

次回予定［第１４回目］まとめ

＊＊

レポート問題　第１３回目（右側の半分の解答用紙を切り取って提出しなさい）

数値で計算する問題は, 答えにも必ず単位をつける！指示がない限り MKS 単位系で答えること！

問１　x軸上を運動する減衰振動を考える。粒子の質量は$m = 4.0$［kg］, ばね定数は$k = 100$［N/m］, 減衰率は$\gamma = 0.050$［1/s］であった。$t = 0$に自然長から$x_0 = 0.10$［m］伸ばして静かに放した。

A… ① $t = 0$での粒子が持つ力学的エネルギーE_0を数値で求めよ。

A… ② 固有角振動数ωを数値で求めよ。この粒子はどのような運動をするか。

B… ③ 運動するに従い, 粒子が持つ力学的エネルギーEはどのように変化するか。何に変化するか。

B… ④ 減衰率が$\gamma = 5.0$［1/s］となったとき，粒子の運動はどうなるか。

A… 問２① 水平面内に置かれた質量mの粒子に，弾性力$-kx$，抵抗力$-cv_x$に加えて，強制振動力$f_0\cos\Omega t$が働くとき，この粒子の運動方程式を立てよ。

A… ② 十分時間が経過した後の，強制振動の解$X(t)$を書け。［教科書の式（27.3）を見て考える。］

B… ③ 共振が起きる条件を，強制振動力の角振動数Ωと，振動体の固有角振動数ωとの関係で表せ。抵抗力（または減衰率γ）はあまり大きくないとする。また共振とはどのような現象か。

B… ④ 共振現象の例を１つ以上あげよ。

問３　強制振動での振動体の振幅は$A^{強}(\Omega) = f_0 \Big/ \left\{ m\sqrt{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(2\gamma\Omega\right)^2} \right\}$で表される。

固有角振動数を$\omega = 1$［rad/s］，減衰率を$\gamma = 0.02$［s^{-1}］，$f_0/m = 0.01$［N/kg］とする。抵抗力は小さいので，共振が起こる角振動数ω_{R}をω_{R}　$\omega = \sqrt{k/m} = 1$［rad/s］と近似してよい。

B… ① $\Omega = 0.9$ ～1.1［rad/s］の範囲で，Ωを 0.02［rad/s］間隔で変えて$A^{強}(\Omega)$の値を求め，共振曲線を書け。

B… ② 共振したとき（$\Omega = \omega$）の強制振動の振幅$A^{強}(\omega)$を，f_0，m，ω，γを用いて式で表せ。

A… ③ 粒子を振動させず, 大きさ　f_0の力で静かに引いた（$\Omega = 0$）ときの伸び$x_0 = A^{強}(0)$をf_0，m，ωを用いて式で表せ。また，この伸びx_0を，f_0とばね定数kを用いて式で表せ。

C… ④ 大きさf_0の強制振動力を加えて共振したときの振幅$A^{強}(\omega)$と，同じ大きさf_0の力で静かに引いたときの伸びx_0との比$Q = A^{強}(\omega)\big/x_0$を，$\omega$と$\gamma$で表せ。上の値を使い$A^{強}(\omega)$が$x_0$の何倍になるか数値で求めよ。（$f_0$が小さな力でも，共振したときの振幅は非常に大きくなることが分かる。）

解答用紙　（　　曜　　限）学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿　　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

数値で計算する問題は, 答えにも必ず単位をつける！指示がない限り MKS 単位系で答えること！

問１① $E =$ ［　　］

② $\omega =$ ［　　　］

③

④

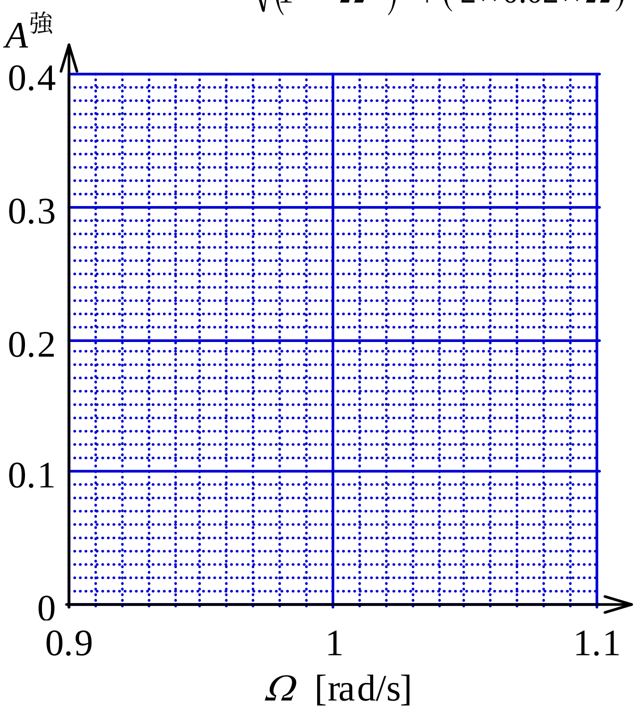
問２①

② $X(t) =$

③ 共振条件　Ω $\boxed{}$ のとき, $\boxed{}$ が非常に大きくなる現象。

④

問３ ① $A^{強}(\Omega) = \dfrac{0.01}{\sqrt{\left(1^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(2 \times 0.02 \times \Omega\right)^2}}$



② $A^{強}(\omega) =$

③

④ $Q = \dfrac{A^{強}(\omega)}{x_0} =$

＿＿＿＿倍

（この値を共振の Q 値という）

☆このレポートをやるのに　＿＿＿時間＿＿＿分,

それ以外に力学IIの予習復習を　＿＿＿時間＿＿＿分した。