

[第12回目] 減衰振動

今日の授業の目標 弾性力とともに**抵抗力や摩擦力**が働く場合の運動

減衰振動

運動方程式 $m \frac{dv_x}{dt} = -kx - cv_x$ $\begin{cases} \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \gamma = \frac{c}{2m} \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$

ω [rad/s]: 固有角振動数, γ [s^{-1}]: **減衰率**

一般解 () 減衰振動 ($\gamma < \omega$): $x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega't + \alpha)$ $\left[\omega' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \right]$
 () 過減衰 ($\gamma > \omega$): $x(t) = Ae^{-\gamma_1 t} + Be^{-\gamma_2 t}$ $\left[\gamma_1, \gamma_2 = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \right]$
 () 臨界減衰 ($\gamma = \omega$): $x(t) = e^{-\gamma t} (At + B)$

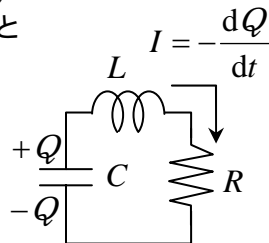
学習到達目標 (6) **減衰振動および強制振動と共振の意味が理解できる。**

次回予定 [第13回目] 強制振動と共振 (教科書 102~104 ページまで)

レポート問題 第12回目 (右側の半分の解答用紙を切り取って提出しなさい)

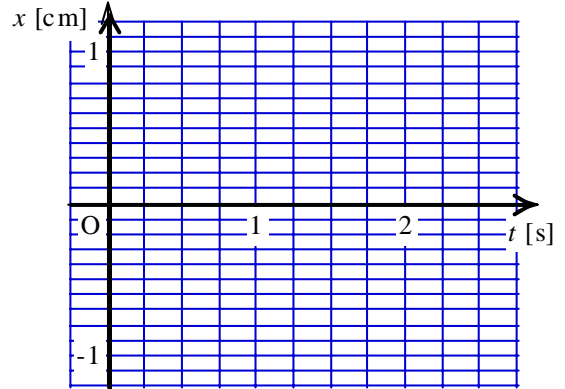
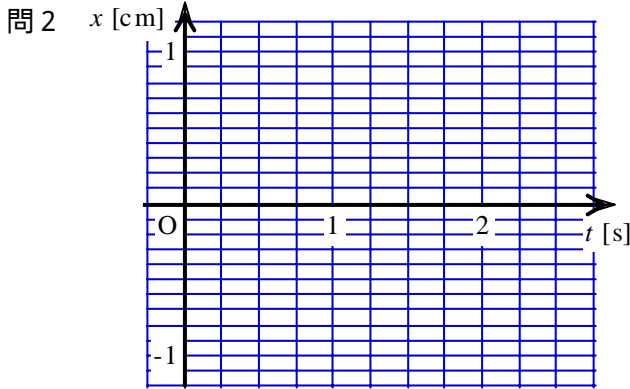
数値で計算する問題は、答えにも必ず単位をつける！指示がない限り MKS 単位系で答えること！

- B... 問1 教科書 99 ページの図 26.1 の問題設定について、運動方程式を立て、 $\omega = \sqrt{k/m}$, $\gamma = c/(2m)$ を用いた式に変形せよ。
- 問2 振幅 $A = 1$ [cm], 振動数 $f = 1$ [Hz], 減衰率 $\gamma = 0.4$ [s^{-1}] とする。 ($\omega = 2\pi f$)
- A... 単振動の式 $x(t) = A \cos(2\pi f t)$ を、横軸を t [s], 縦軸を x [cm] にとってグラフで表せ。
- B... 減衰振動の式 $x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(2\pi f' t)$ を、横軸を t [s], 縦軸を x [cm] にとってグラフで表せ。ただし $f' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} / (2\pi)$ 1 [Hz] として書け。
- 問3 自然長 l , ばね定数 k の軽いばねの片方の端を固定し、他方の端に質量 $m = 0.600$ [kg] のおもりを結んで、滑らかな水平面上に置く。その全体を油の入った水槽の中に浸して運動させた。ばねが自然長となる位置を原点 O とし、ばねが伸びる方向を x 軸の正とする。
- A... おもりを $f_0 = 6.72$ [N] の力で水平に引くと、 $x_0 = 0.0800$ [m] の位置で静止した。ばね定数 k を数値で求めよ。また、角振動数 ω を数値で求めよ。
- B... 抵抗力の係数を $c = 3.60$ [$N \cdot s/m$] のとき、減衰率 γ を数値で求めよ。
- B... おもりの運動方程式の x 成分を、 m, x, v_x, k, c を使って書け。
- B... $\gamma < \omega$ として、の一般解 $x(t)$ を位相 α と振幅 A を使って書け。 (ω, γ は文字のまま)
- B... を時間で微分して $v_x(t)$ を求めよ。
- B... の結果を用いて、補正された角振動数 $\omega' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ と周期 $T' = 2\pi/\omega'$ を求めよ。
- C... $t = 0$ で の x_0 から静かに ($v_x(0) = 0$) 放した。この初期条件から、位相 α と振幅 A を求めよ。
- C... $x < 0$ の側に、おもりはどこまで振れるかを知りたい。位置 $x(t = T'/2)$ を求めよ。
- B... さらにどろどろの油に代えて減衰率 γ を大きくし、 $\gamma > \omega$ になったとする。おもりの運動はどのような運動に変わるか、簡単に説明せよ。
- C... 問4 減衰振動は、力学だけでなく様々な分野の物理現象と関係して現れる。右の電気回路では、コンデンサー C に蓄えられている電荷 $Q(t)$ の時間変化が、 $L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = 0$ の式から求められる。抵抗 R が十分小さいとき、減衰振動の運動方程式と比較して、 $Q(t)$ の一般解を式で表せ。



解答用紙 (曜 限) 学籍番号 _____ 氏名 _____

数値で計算する問題は , 答えにも必ず単位をつける ! 指示がない限り MKS 単位系で答えること !
問 1



問 3

$\omega =$ [] $\gamma =$ []

$x(t)$ を微分すると , $v_x(t) =$

$\omega' =$ [] , $T' =$ []

$t = 0$ で $x(0) = 0.0800$, $v(0) = 0$ より

(ヒント : $A \cos \alpha = 0.0800$ と $\tan \alpha = -\gamma / \omega'$)

$x(T'/2) =$

問 4 比較すると $m \rightarrow L$, $c \rightarrow R$, $k \rightarrow 1/C$ なので , $\omega =$ _____ , $\gamma =$ _____ 。

したがって ω , γ を用いて表せば , $Q(t) =$
となる。

このレポートをやるのに _____ 時間 _____ 分 ,
それ以外に力学 の予習復習を _____ 時間 _____ 分した。