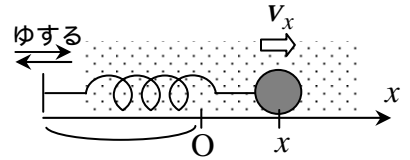


[第6回目] 強制振動と共振

今日の授業の目標 振動体を外部から強制的にゆする場合の運動

強制振動

運動方程式
$$m \frac{dv_x}{dt} = -kx - cv_x + F_0 \cos \Omega t$$



$$\left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \gamma = \frac{c}{2m}, f = \frac{F_0}{m} \right) \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f \cos \Omega t$$

一般解 ($\gamma < \omega$ のとき): $x(t) = A^{\text{強}} \cos(\Omega t - \delta) + x_0(t)$ $\left[x_0(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \alpha) \right]$
 減衰振動部分 $x_0(t)$ は時間がたつとゼロになる (過渡現象)

振幅:
$$A^{\text{強}}(\Omega) = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}} \quad \left[\Omega = \omega \text{ のとき振幅が最大: 共振} \right]$$

位相の遅れ:
$$\delta = \tan^{-1} \frac{2\gamma\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \quad \left[\Omega \approx 0 \text{ のとき } \delta \approx 0, \Omega \rightarrow \infty \text{ のとき } \delta \approx \pi \right]$$

学習到達目標 (3) 減衰振動および強制振動と共振の意味が理解できる。

次回予定 [第7回目] 非慣性系と見かけの力 (教科書 115 ページの終わりまで)

レポート問題 第6回目 (右側の半分の解答用紙を切り取って提出しなさい)

数値で計算する問題は、答えにも必ず単位をつける！指示がない限り MKS 単位系で答えること！

B... 問1 質量 m の質点に弾性力, 抵抗力, 強制振動力 $F_0 \cos \Omega t$ が働くとき, この強制振動の運動方程式を立てよ。 B... 十分時間が経過した後の, 強制振動の解 (運動を表す式) $X(t)$ を書け。 [教科書の式 (1.245)] B... 共振が起きる条件を, 強制振動力の角振動数 Ω と, 振動体の固有角振動数 ω との関係で表せ。抵抗力 (または減衰率 γ) はあまり大きくないとする。また共振とはどのような現象か。 B... 共振現象の例を1つ以上あげよ。

問2 強制振動での振動体の振幅は $A^{\text{強}}(\Omega) = f / \sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}$ で表される。固有角振動数を $\omega = 1$ [rad/s], 減衰率を $\gamma = 0.02$ [s^{-1}], $f = F_0/m = 0.01$ [N/kg] とする。抵抗力は小さいので, 共振が起こる角振動数 ω_R を $\omega_R = \omega = \sqrt{k/m} = 1$ [rad/s] と近似してよい。

B... $\Omega = 0.9 \sim 1.1$ の範囲で, Ω を 0.02 間隔で変えて $A^{\text{強}}(\Omega)$ の値を求め, 共振曲線を書け。

B... 共振したときの強制振動の振幅 $A^{\text{強}}(\omega)$ を, f と ω と γ の式で表せ。

A... 質点 m を振動させず, F_0 の力で静かに引いたときの伸び $x_0 = F_0/k$ を, f と ω の式で表せ。

C... 強制振動力を加えて共振したときの振幅 $A^{\text{強}}(\omega)$ と, 同じ大きさ F_0 の力で静かに引いたときの伸び x_0 との比 $Q = A^{\text{強}}(\omega)/x_0$ を, ω と γ で表せ。上の値を使い $A^{\text{強}}(\omega)$ が x_0 の何倍になるか数値で求めよ。(F_0 が小さな力でも, 共振したときの振幅は非常に大きくなることもある。)

問3 共振を起こしたとき ($\Omega = \omega$) に, 位相の遅れが $\delta = \pi/2$ になる意味を, 強制振動力がする仕事と振動体の力学エネルギーから考える。(減衰率 γ は十分に小さいとする。)

B... 共振を起こしたときの解 $X_R(t)$ [問1の条件] と, このときの質点の速度 $v_R(t)$ を求めよ。

C... $\omega = 2\pi$ [rad/s] とし, 共振したときの $X_R(t)$, $v_R(t)$, 強制振動力 $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ の時間変化をグラフに書け。(共振しているとき, 力 F が最大の瞬間に速度 v_R も最大になる)

仕事率
$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cdot ds}{dt} = F \cdot v \text{ が最大 (正) になる} \quad \text{力学的エネルギーがどんどん増える。}$$

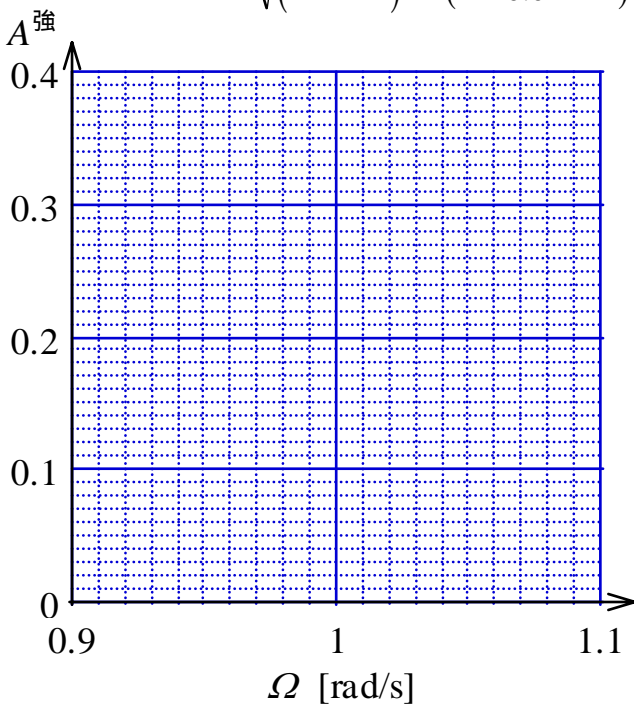
解答用紙 (曜 限) 学籍番号 _____ 氏名 _____

数値で計算する問題は , 答えにも必ず単位をつける ! 指示がない限り MKS 単位系で答えること !

問 1

共振条件 Ω のとき , が非常に大きくなる現象。

問 2
$$A^{\text{強}}(\Omega) = \frac{0.01}{\sqrt{(1^2 - \Omega^2)^2 + (2 \times 0.02 \times \Omega)^2}}$$
 $A^{\text{強}}(\omega) =$



$$Q = \frac{A^{\text{強}}(\omega)}{x_0} =$$

_____ 倍

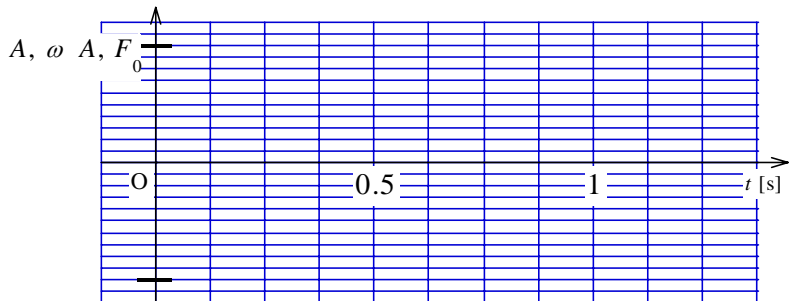
問 3 共振解は , 問 1 と

$\delta = \pi/2$ を用いて ,

$$X_R(t) =$$

$$v_R(t) = \frac{dX_R(t)}{dt}$$

=



このレポートをやるのに _____ 時間 _____ 分 ,

それ以外に力学 の予習復習を _____ 時間 _____ 分した。