

[第6回目] 強制振動と共振

今日の授業の目標

強制振動 減衰振動系を外部から強制的にゆする場合

運動方程式
$$m \frac{dv_x}{dt} = -kx - c v_x + F_0 \cos \Omega t$$

$$\left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \gamma = \frac{c}{2m}, f = \frac{F_0}{m} \right) \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f \cos \Omega t$$

一般解 ($\gamma < \omega$ のとき): $x(t) = A^{\text{強}} \cos(\Omega t - \delta) + x_0(t)$ $\left[x_0(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \alpha) \right]$
 減衰振動部分 $x_0(t)$ は時間がたつとゼロになる (過渡現象)

振幅:
$$A^{\text{強}}(\Omega) = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}} \quad \left[\Omega = \omega \text{ のとき振幅が最大: 共振} \right]$$

位相の遅れ:
$$\delta = \tan^{-1} \frac{2\gamma\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \quad \left[\Omega \approx 0 \text{ のとき } \delta \approx 0, \Omega \rightarrow \infty \text{ のとき } \delta \approx \pi \right]$$

学習到達目標 (3) 減衰振動および強制振動と共振の意味が理解できる。

次回予定 [第7回目] 非慣性系と見かけの力 (教科書 115 ページの終わりまで)

レポート問題 第6回目 (右側の半分の解答用紙を切り取って提出しなさい)

数値で計算する問題は、答えにも必ず単位をつける! 指示がない限り MKS 単位系で答えること!

B... 問1 質点 m に弾性力, 抵抗, 角振動数 Ω [rad/s] の強制振動力が働くとき, 強制振動の運動方程式を立てよ。

B... 十分時間が経過した後の, 強制振動の解 (運動を表す式) を書け。[教科書の式 (1.245)]

問2 強制振動での振動体の振幅は $A^{\text{強}}(\Omega) = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}$ で表される。固有角振

動数を $\omega = 1$ rad/s, 減衰率を $\gamma = 0.02$ s⁻¹, $f = F_0/m = 1$ N/kg とする。ここでは, 抵抗力は小さいので, 共振が起こる角振動数 ω_R は $\omega_R = \omega = \sqrt{k/m} = 1$ rad/s と近似してよい。

B... $\Omega = 0.9 \sim 1.1$ の範囲で, Ω を 0.02 間隔で変えて, $A^{\text{強}}(\Omega)$ の値を求め, 共振曲線を書け。

B... 共振したときの強制振動の振幅 $A^{\text{強}}(\omega)$ を, f と ω と γ の式で表せ。

C... 大きさ F_0 の力で静かに質点 m を引いたときのばねの伸び x_0 を, f と ω の式で表せ。

C... 強制振動力を加えて共振したときの振幅 $A^{\text{強}}(\omega)$ と, 同じ大きさ F_0 の力で静かに引いたときの伸び x_0 との比 $A^{\text{強}}(\omega)/x_0$ を, ω と γ で表せ。上の値を使って何倍大きく振動するか数値で求めよ。(F_0 が小さな力でも, 共振したときの振幅は非常に大きくなることもある。)

問3 共振を起こしたとき, 位相の遅れが $\delta = \pi/2$ となる意味を考える。(減衰率 γ は十分に小さいとする。)

B... 共振が起きる条件を, 強制振動力の角振動数を Ω , 振動体の固有角振動数を ω で表せ。

B... 共振解 $X(t)$ [式 (1.245) に の条件を入れる] と, このときの質点の速度 $v(t)$ を求めよ。

C... $\omega = 2\pi$ [rad/s] とし, 共振したときの $X(t)$, $v(t)$, 強制振動力 $F = F_0 \cos(\omega t)$ をグラフに書け。(F が最大するとき v も最大 共振条件で仕事率 $P = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cdot ds}{dt} = F \cdot v$ が最大)

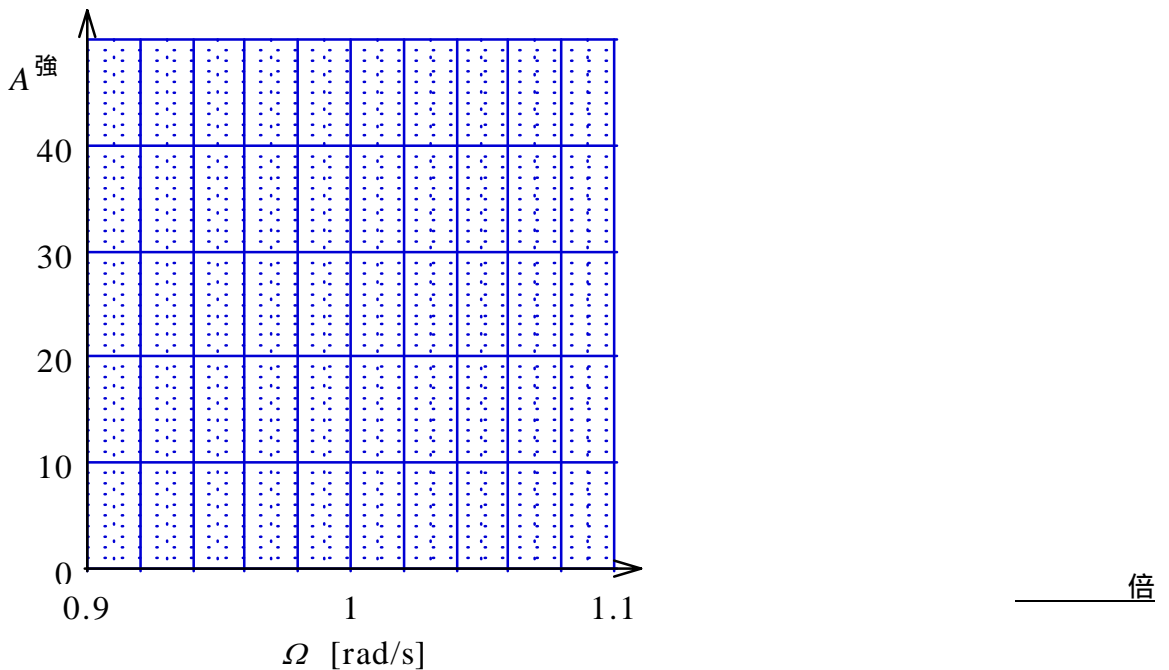
解答用紙 (曜 限) 学籍番号 _____ 氏名 _____

数値で計算する問題は , 答えにも必ず単位をつける ! 指示がない限り MKS 単位系で答えること !

問 1

問 2

$$A^{\text{強}}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(1^2 - \Omega^2)^2 + (2 \times 0.02 \times \Omega)^2}}$$



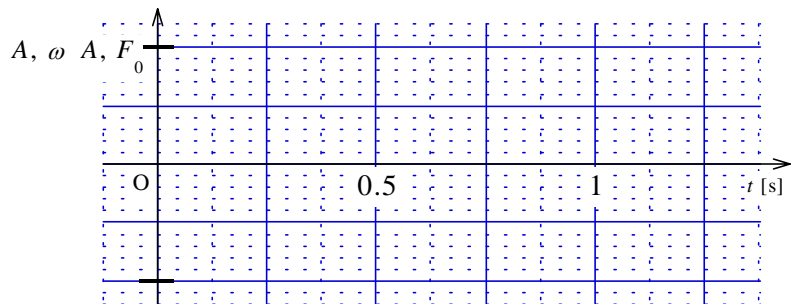
問 3 共振条件 $\Omega =$

共振解は を用いて

$$X(t) =$$

$$v(t) = \frac{dX}{dt}$$

=



このレポートをやるのに _____ 時間 _____ 分 ,

それ以外に力学 の予習復習を _____ 時間 _____ 分した。