［第５回目］減衰振動

≪考える内容≫　弾性力とともに**抵抗力**や**摩擦力**が働く場合の運動

≪今日の授業の目標≫

◎ **減衰振動**

運動方程式　$\boxed{m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -kx - cv_x}$ ⇒ $\boxed{\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \quad \gamma = \dfrac{c}{2m}}$ ⇒ $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega^2 x = 0$

ω ［rad/s］：固有角振動数，　　γ ［s^{-1}］：**減衰率**

一般解　（ｉ）減衰振動（$\gamma < \omega$）：$\boxed{x(t) = A\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \alpha)}$　$\left(\omega' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \right)$

（ii）過減衰　（$\gamma > \omega$）：$x(t) = A\mathrm{e}^{-\gamma_1 t} + B\mathrm{e}^{-\gamma_2 t}$　$\left(\gamma_1, \gamma_2 = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \right)$

（iii）臨界減衰（$\gamma = \omega$）：$x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}(At + B)$

学習到達目標（3）**減衰振動および強制振動と共振の意味が理解できる。**

次回予定［第６回目］強制振動と共振（教科書 108 ページの終わりまで）

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

レポート問題　第５回目（右側の半分の解答用紙を切り取って提出しなさい）

数値で計算する問題は, 答えにも必ず単位をつける！指示がない限り MKS 単位系で答えること！

B… 問１　減衰振動の運動方程式を立て，$\omega = \sqrt{k/m}$，$\gamma = c/(2m)$ を用いた式に変形せよ。

問２　振幅 A = 1 cm，振動数 f = 1 Hz，減衰率γ = 0.4 s^{-1} とする

A… ①　単振動の式 $x(t) = A\cos(2\pi f t)$ を，横軸を t [s]，縦軸を x [cm]にとってグラフで表せ。

B… ②　減衰振動の式 $x(t) = A\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(2\pi f t)$ を，横軸を t [s]，縦軸を x [cm]にとってグラフで表せ。

問３　水槽の中で，自然長 l の軽いばねの片方の端を P 点に固定し，他方の端に質量 m =0.60 kg の小さな重りを結んで，静かに吊り下げた。鉛直下向きに x 軸を取り，ばねが自然長となる位置を原点 O とする。重力加速度の大きさは g =9.80 m/s^2 とする。

A… ①　重りは，x_0 =0.0700 m の位置で静止した。このばね定数 k の値を求めよ。

A… ②　①で求めた，ばね定数 k と質量 m から，角振動数 ω を数値で求めよ。

次に，重りを $x_{\max}$ =0.1500 m の位置まで引き下げて静かに放したら，重りは減衰振動した。

B… ③ 抵抗力の係数を c とし，重り m の運動方程式の x 成分を，m，x，v_x，k，g，c を使って書け。

B… ④ 重力 mg を x_0 用いて表し，③の運動方程式を変数 $X = x - x_0$ の運動方程式に書き直せ。

B… ⑤ 減衰率が $\gamma < \omega$ として，④の一般解を位相 α と振幅 A を使って書け。（ω は文字のままで。）

C… ⑥ ⑤から v_x を求めよ。

B… ⑦ 減衰率を γ =3.0 s^{-1} として，角振動数 $\omega' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$，周期 $T' = 2\pi/\omega'$ を求めよ。

C… ⑧ t =0 で v_x =0，$X = x_{\max} - x_0$ = 0.0800 m の条件を用いて，位相 α と振幅 A を求めよ。

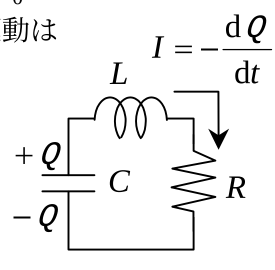
C… ⑨ 重りが到達する最高点（極大点）の位置 $x(t = T'/2)$ を求めよ。（$x = x_0 + X$）

B… ⑩ 水を油に代えて，減衰率 γ が $\gamma = \omega$ になったとすると，重りの運動はどのような運動に変わるか，簡単に説明しなさい。

B… 問４　右の電気回路では，コンデンサー C の電荷の時間変化 $Q(t)$ が

$$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}Q = 0$$

で表される。R が十分小さいとき，減衰振動の運動方程式と比較して，$Q(t)$ の一般解を式で表せ。

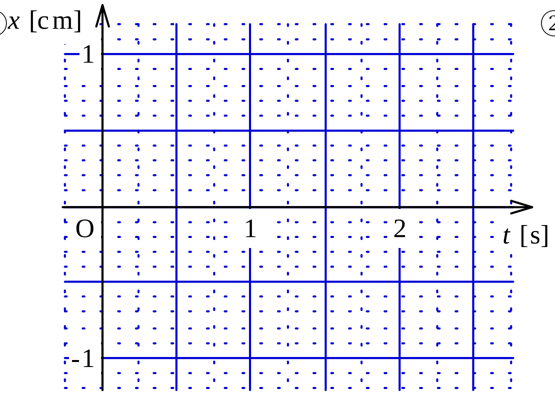


解答用紙　（　　曜　　限）学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

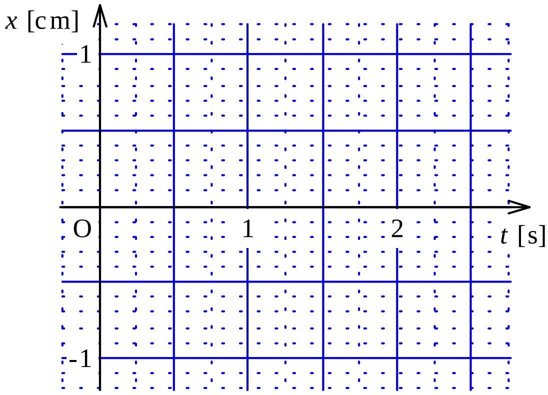
数値で計算する問題は, 答えにも必ず単位をつける！指示がない限り MKS 単位系で答えること！

問１

問２ ①



②



問３　①

②　$\omega =$　　　　［　　　］③

④

⑤

⑥　$X(t)$ を微分すると，$v(t) =$

⑦　$\omega' =$　　　　［　　　］，$T' =$　　　　［　　］

⑧　$t = 0$ で $X(0) = 0.0800$，$v(0) = 0$ より

（ヒント：$A\cos\alpha = 0.0800$ と $\tan\alpha = -\gamma/\omega'$）

⑨　$x(T'/2) =$

⑩

問４　L，R，C で表すと，$\omega =$　　　　，$\gamma =$　　　　。ω，γ を用いて，

$Q(t) =$

となる。

☆このレポートをやるのに ＿＿＿時間＿＿＿分，

それ以外に力学Ⅱの予習復習を ＿＿＿時間＿＿＿分した。