

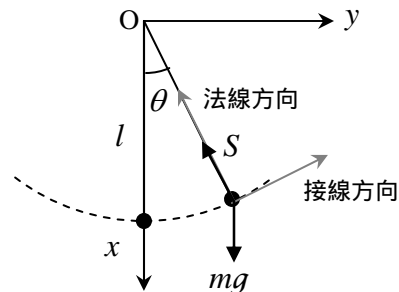
[第9回目] 運動方程式を解く 4 : 単振り子

今日の授業の目標

単振り子の運動方程式とその解 [単振動の式]

働く力は重力 mg と張力 S

x 軸は鉛直下向き, 振り子は xy 平面内を運動する



$$\text{運動方程式: } \begin{cases} \text{接線成分} & m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \theta \\ \text{法線成分} & m \frac{v^2}{l} = S - mg \cos \theta \end{cases} \quad (\text{等速円運動の方程式と同じ形})$$

$$\Downarrow \quad s = l\theta, \quad v = \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad \xrightarrow{\theta \text{ が小さいとき}} \quad \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta} \quad \text{単振動と同じ形!}$$

一般解: $\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \alpha\right)$ \cos の () の中身の単位は rad (ラジアン)

周期: $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ [s] は, 振幅: θ_0 [rad] によらない (振り子の等時性)

学習到達目標 (5) 単振動, 単振り子の運動を運動方程式から理解できる。

次回予定 [第10回目] 運動エネルギーと仕事 (教科書 68 ページまで)

レポート問題 第9回目 (右側の半分の解答用紙を切り取って提出しなさい)

数値で計算する問題は, 答えにも必ず単位をつける! MKS 単位系で答えること!

- A... 問1 質量 m の質点が, ばね定数 k のばねによる弾性力のみを受けて x 軸方向に単振動している。運動方程式と, その一般解 $x(t)$ を書け。振幅を A , 初期位相を α とする。
- B... $x(t)$ を微分して速度の x 成分 $v_x(t)$ を求めよ。 A... 角振動数 ω を m と k を用いて表せ。
- A... $k = 5.0 \text{ N/m}$, $m = 0.050 \text{ kg}$ のとき角振動数 ω と周期 T を数値で求めよ。
- B... $t = 0$ で質点を原点から速度 v_0 で打ち出した ($x(t=0) = 0$, $v_x(t=0) = v_0$)。 A と α を定めて特解を求めよ。
- 問2 教科書の図 1.87 のように, 単振り子をつるし, 座標軸を定める。
- B... 合力 \vec{F} の接線成分 $F_{\text{接}}$ を mg , θ で表せ。また, 法線成分 $F_{\text{法}}$ を mg , S , θ で表せ。
- B... 合力の接線成分 $F_{\text{接}}$ は, 物体の速さ v を変化させる。加速度の接線成分 $a_{\text{接}}$ は速さ v の時間変化率 (微分) である。単振り子の運動方程式の接線成分を書け。[教科書の式 (1.142)]
- B... 合力の法線成分 $F_{\text{法}}$ は, 物体の運動の向きを変化させる。その加速度 $a_{\text{法}}$ は向心加速度と同じ式で表される。単振り子の運動方程式の法線成分を書け。[教科書の式 (1.143)]
- B... 運動方程式の接線成分を回転角 θ の方程式で表せ。[教科書の式 (1.144)]
- B... 回転角 θ [rad] が小さいときの, $\sin \theta$ の近似式を書け。
- B... 回転角 θ が小さいときの回転角 θ の方程式を書け。[教科書の式 (1.145)]
- B... 単振動の運動方程式との比較から, 単振り子の一般解 (回転角 $\theta(t)$ の時間変化の式) を書き, 周期 T を l , g を用いて表せ。ただし, 振幅を θ_0 , 初期位相を α とする。
- A... 糸の長さが $l = 1.5 \text{ m}$ の振り子の周期 T を求めよ。
- C... 振幅 θ_0 を大きくし, 式 (1.145) で近似できなくなるときの, 周期 T はどう変化するか。

解答用紙 (曜 限) 学籍番号 _____ 氏名 _____

数値で計算する問題は, 答えにも必ず単位をつける! 指示がない限り MKS 単位系で答えること!

問1 運動方程式: 一般解: $x(t) =$

$v_x(t) =$ $\omega =$

$\omega =$ [], $T =$ []

問2

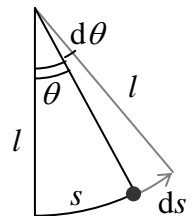
$F_{\text{接}} =$ $F_{\text{法}} =$

接線成分 $ma_{\text{接}} = F_{\text{接}}$ より

法線成分 $ma_{\text{法}} = F_{\text{法}}$ より

接線成分の式に, $v = \frac{ds}{dt} = \frac{\boxed{}}{dt} = \boxed{}$ を代入して, 両辺を ml で割ると,

$\sin \theta$ $\boxed{}$



一般解 $\theta(t) =$ 周期 $T =$ $\boxed{}$

周期 $T = 2\pi \sqrt{\frac{\boxed{}}{\boxed{}}} = \boxed{}$ []

振幅 θ_0 が小さくて $\sin \theta \approx \theta$ が成り立ち, 復元力 (揺り戻そうとする力) $F_{\text{接}}$ が回転角 θ に比例し $-mg\theta$ と表されるとき, 振り子の等時性が成り立つ。振幅 θ_0 が大きくなると, 回転角 θ の大きいところでは $\sin \theta < \theta$ となるので, 復元力 $|-mg \sin \theta|$ が $|-mg\theta|$ よりも小さくなる。すると, 加速度の接線成分 $a_{\text{接}}$ の絶対値が小さくなり, 質点が減速して逆向きに振れ始めるまでに時間が余分にかかるようになる。したがって, 振幅 θ_0 が大きくなると, 周期 T は 長くなる・短くなる。(定性的な議論)

このレポートをやるのに _____ 時間 _____ 分,

それ以外に力学 の予習復習を _____ 時間 _____ 分した。