

[第6回目] 強制振動と共振

今日の授業の目標

強制振動 減衰振動系を外部から強制的にゆする

運動方程式
$$m \frac{dv_x}{dt} = -kx - c v_x + F_0 \cos \Omega t$$

$$\left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \gamma = \frac{c}{2m}, f = \frac{F_0}{m} \right) \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f \cos \Omega t$$

一般解 ($\gamma < \omega$ のとき): $x(t) = A^{\text{強}} \cos(\Omega t - \delta) + x_0(t)$ $\left(x_0(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \alpha) \right)$

減衰振動部分 $x_0(t)$ は時間がたつとゼロになる (過渡現象)

振幅:
$$A^{\text{強}}(\Omega) = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}} \left(\Omega = \omega \text{ のとき振幅が最大: 共振} \right)$$

位相の遅れ:
$$\delta = \tan^{-1} \frac{2\gamma\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \left(\Omega \approx 0 \text{ のとき } \delta \approx 0, \Omega \rightarrow \infty \text{ のとき } \delta \approx \pi \right)$$

学習到達目標 (3) 減衰振動および強制振動と共振の意味が理解できる。

次回予定 [第7回目] 非慣性系と見かけの力 (教科書 115 ページの終わりまで)

レポート問題 第6回目 (右側の半分の解答用紙を切り取って提出しなさい)

数値で計算する問題は、答えにも必ず単位をつける！指示がない限り MKS 単位系で答えること！

問1 減衰振動解 (1.237) が減衰振動の運動方程式 (1.232) の解であることを示せ。

問2

質点 m に弾性力, 抵抗, 角振動数 Ω [rad/s] の強制振動力が働くとき, 強制振動の運動方程式を立てよ。

十分時間が経過した後の, 強制振動の解 (運動を表す式) を書け。[教科書の式 (1.252)]

問3

三角関数の加法定理の公式を使って, $\cos(\Omega t - \delta)$ と $\sin(\Omega t - \delta)$ を展開しなさい。

式(1.250)で $\tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \frac{2\gamma\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}$ と表されることが分かった。このとき $\omega^2 - \Omega^2 = a$,

$2\gamma\Omega = b$ と略記し, 図 1.142 のような図を書いて $\cos \delta$ と $\sin \delta$ を求めなさい。

問4 強制振動の振幅は $A^{\text{強}}(\Omega) = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}$ で表される。固有角振動数を $\omega = 1$

rad/s, $f = F_0/m = 1$ N/kg とする。減衰率が $\gamma = 0.02$ s⁻¹ であるとする。ここでは, 抵抗は小さく共振が起こる角振動数 ω_R は $\omega_R = \omega = \sqrt{k/m} = 1$ rad/s と近似できるとする。

$A^{\text{強}}(\Omega)$ を $\Omega = 0.9$ rad/s から $\Omega = 1.1$ rad/s までを 0.02 rad/s 間隔で計算して, 下の図のような共振曲線のグラフを書きなさい。

強制振動力の最大の力 F_0 で静かに質点 m を引いたときのばねの伸び x_0 を, f と ω で表せ。

共振したときの強制振動の振幅 $A^{\text{強}}(\omega)$ を, f と ω と γ で表せ。

共振したときの振幅 $A^{\text{強}}(\omega)$ と, 強制振動力の最大の力 F_0 で引いたときの伸び x_0 との比 $A^{\text{強}}(\omega)/x_0$ を, ω と γ で表せ。上の値を使って何倍大きく振動するか数値で求めよ。

解答用紙 (曜 限) 学籍番号 _____ 氏名 _____

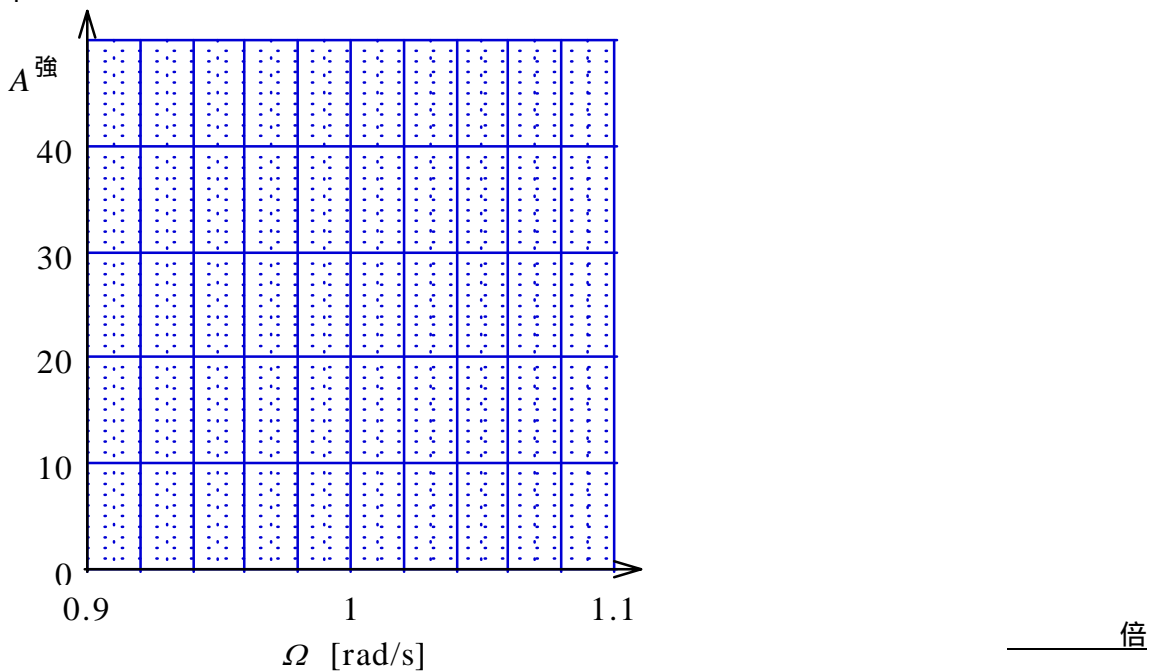
数値で計算する問題は, 答えにも必ず単位をつける! 指示がない限り MKS 単位系で答えること!

問1 解答用紙の裏に書け。

問2

問3

問4



このレポートをやるのに _____ 時間 _____ 分,

それ以外に力学 の予習復習を _____ 時間 _____ 分した。