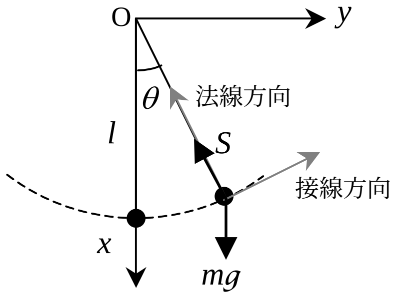
［第９回目］運動方程式を解く４：単振り子

≪今日の授業の目標≫

◎　単振り子の運動方程式とその解［単振動の式］

働く力は重力 mg と張力 S

※　x は鉛直下向き，振り子は xy 平面内を運動する



運動方程式：
$$\begin{cases} \text{接線成分} & m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg\sin\theta \\ \text{法線成分} & m\dfrac{v^2}{l} = S - mg\cos\theta \end{cases}$$
（等速円運動の方程式と同じ形）

⇩　$s = l\theta$，$v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \xrightarrow{\theta\text{ が小さいとき}} \boxed{\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\theta}$$
☆単振動と同じ形！

一般解：$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\dfrac{g}{l}}t + \alpha\right)$　　※ cos の（）の中身の単位は rad（ラジアン）

周期：$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ ［s］は，振幅：θ_0［rad］によらない（振り子の等時性）

学習到達目標（5）単振動，単振り子の運動を運動方程式から理解できる。

次回予定［第１０回目］運動エネルギーと仕事（教科書 68 ページまで）

＊＊

レポート問題　第９回目（右側の半分の解答用紙を切り取って提出しなさい）

数値で計算する問題は，答えにも必ず単位をつける！MKS 単位系で答えること！

問１

☆ ①　質量 m の質点が，ばね定数 k のばねによる弾性力によって単振動しているときの，角振動数ω を式で表せ。

☆ ②　$k = 5$ N/m，$m = 0.05$ kg のとき角振動数ω と周期 T を求めよ。

問２　教科書の図 1.87 のように，単振り子をつるし，座標軸を定める。

☆ ①　合力の接線成分 $F_{接}$ を mg，θ で表せ。また，法線成分 $F_{法}$ を mg，S，θ で表せ。

☆ ②　合力の接線成分は，物体の速さ v を変化させる。単振り子の運動方程式の接線成分を書け。［教科書の式（1.142）］

③　合力の法線成分は，物体の向きを変化させる。その加速度 $a_{法}$ は向心加速度と同じ式で表される。単振り子の運動方程式の法線成分を書け。［教科書の式（1.143）］

☆ ④　運動方程式の接線成分を回転角θ の方程式で表せ。［教科書の式（1.144）］

☆ ⑤　回転角θ が小さいとき，$\sin\theta$ の近似式を書け。

☆ ⑥　回転角θ が小さいときの回転角θ の方程式を書け。［教科書の式（1.145）］

☆ ⑦　単振動の運動方程式との比較から，単振り子の一般解（回転角θ の時間変化の式）を書き，周期 T を l，g で表せ。

☆ ⑧　糸の長さが $l = 1.5$ m の振り子の周期 T を求めよ。

⑨　振幅θ_0を大きくし，式（1.145）で近似できなくなるとき，周期 T はどうなるか。

解答用紙　（　　曜　　限）学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

数値で計算する問題は, 答えにも必ず単位をつける！指示がない限り MKS 単位系で答えること！

問１

① $\omega =$

② $\omega =$ [　　], $T =$ [　　]

問２

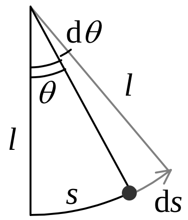
① $F_{接} =$

$F_{法} =$

② 接線成分 $ma_{接} = F_{接}$ より

③ 法線成分 $ma_{法} = F_{法}$ より

④ 接線成分の式に，$v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\boxed{\quad}}{\mathrm{d}t} = \boxed{\quad}$ を代入して，両辺を ml で割ると，



⑤ $\sin\theta$ $\boxed{\quad}$

⑥ $\boxed{\quad}$

⑦ 一般解 $\boxed{\quad}$

周期　$T = \boxed{\quad}$

⑧ 周期　$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}}} = \boxed{\quad}$ [　]

⑨ 振幅 θ_0 が小さくて $\sin\theta$　　θ が成り立ち，復元力（運動方程式の接線成分の右辺）が回転角 θ に比例し $-mg\theta$ と表されるとき，振り子の等時性が成り立つ。振幅 θ_0 が大きくなると，回転角 θ の大きいところでは $\sin\theta < \theta$ となるので，復元力 $|-mg\sin\theta|$ が $|-mg\theta|$ よりも小さくなる。すなわち，加速度の接線成分の大きさが小さくなり，質点が減速して逆向きに振れ始めるまでに時間が余分にかかるようになる。したがって，振幅 θ_0 が大きくなると，周期 T は $\boxed{\quad}$ なる。（定性的な議論）

☆このレポートをやるのに ＿＿＿時間＿＿＿分，

それ以外に力学Ｉの予習復習を　　　時間　　　分した。